Предел функции

Определение

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что для всех x таких, что $|x| > M$, верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

или

$$f(x) \to A \text{ при } x \to \infty.$$

Если в сформулированном определении условие $|x| > M$ заменить на условие $x > M$ $(x < -M)$, то получим определение предела функции при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Обозначение:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

или

$$f(x) \to A \text{ при } x \to +\infty$$

$$\Big(\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

или

$$f(x) \to A \text{ при } x \to -\infty\Big).$$

Геометрический смысл $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

Число A *есть предел функции* $y = f(x)$ *при* x, *стремящемся к бесконечности, если для любого сколь угодно малого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $m = m(\varepsilon) > 0$, *что для всех* x *таких, что* $|x| > m$, *соответствующие значения функции* $f(x)$ *будут принадлежать* ε*- окрестности точки* A.

Предел функции

Определение

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = A$$

или

$$f(x) \longrightarrow A \text{ при } x \longrightarrow x_0.$$

Если в сформулированном определении условия $x \neq x_0$ *и* $|x - x_0| < \delta$ *заменить на условие* $x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$, *то получим определение правостороннего (левостороннего) или предела справа (слева), т.е. предела функции при* $x \longrightarrow x_0+$ $(x \longrightarrow x_0-)$.

Предел функции

Обозначение:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = A$$

или

$$f(x) \to A \text{ при } x \to x_0+$$

$$\Big(\lim_{x \to x_0-} f(x) = A$$

или

$$f(x) \to A \text{ при } x \to x_0-\Big).$$

Предел функции

Геометрический смысл $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$*.*
Число A *есть предел функции* $y = f(x)$ *при* x*, стремящемся к* x_0*, если для любого сколь угодно малого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такая* δ*- окрестность* $(\delta = \delta(\varepsilon))$ *точки* x_0*, что для всех* $x \neq x_0$ *из этой окрестности соответствующие значения функции* $f(x)$ *будут принадлежать* ε*- окрестности точки* A*.*

Предел функции

Определение

Функция $y = f(x)$ *имеет бесконечный предел при* x, *стремящемся к бесконечности (функция* $y = f(x)$ *стремится к бесконечности при* x, *стремящемся к бесконечности), если для любого сколь угодно большого числа* $M > 0$ *существует такое число* $m = m(M) > 0$, *что для всех* x *таких, что* $|x| > m$, *верно неравенство*

$$|f(x)| > M.$$

Предел функции

Обозначение:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

или

$f(x) \to \infty$ *при* $x \to \infty$.

Предел функции

Если в сформулированном определении условие $|x| > M$ заменить на условие $x > M$ $(x < -M)$, то получим определение предела функции при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Обозначение:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

или

$f(x) \to \infty$ *при* $x \to +\infty$

$(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

или

$f(x) \to \infty$ *при* $x \to -\infty).$

Предел функции

Определение

Функция $y = f(x)$ *имеет бесконечный предел при* x, *стремящемся к* x_0 *(функция* $y = f(x)$ *стремится к бесконечности при* x, *стремящемся к* x_0*), если для любого сколь угодно большого числа* $M > 0$ *существует такое число* $\delta = \delta(M) > 0$, *что для всех* $x \neq x_0$, *удовлетворяющих условию* $|x - x_0| < \delta$, *верно неравенство*

$$|f(x)| > M.$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

или

$$f(x) \to \infty \text{ при } x \to x_0.$$

Если в сформулированном определении условия $x \neq x_0$ *и* $|x - x_0| < \delta$ *заменить на условие* $x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$, *то получим определение правостороннего (левостороннего) или предела справа (слева), т.е. предела функции при* $x \to x_0+$ $(x \to x_0-)$.

Обозначение:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \infty$$

или

$$f(x) \to \infty \text{ *при* } x \to x_0+$$

$$\Big(\lim_{x \to x_0-} f(x) = \infty$$

или

$$f(x) \to \infty \text{ *при* } x \to x_0-\Big).$$

Основные теоремы о пределах

Теорема

Если функция имеет предел при $x \longrightarrow x_0$ $(x \longrightarrow \infty)$, то этот предел единственный.

Теорема

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} C = C \ (C - \textit{постоянная}).$$

Основные теоремы о пределах

Теорема

Если $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} g(x) = B$, *то:*

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \ (B \neq 0).$$

Теорема

Если $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x) = A,$

$\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x) = B$, *то:*

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \; (B \neq 0).$$

Теорема

Если $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x) = B$, *то:*

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0).$$

Теорема

Если $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} g(x) = B$, *то:*

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \ (B \neq 0).$$

Теорема

Если $\lim\limits_{y\longrightarrow y_0} f(y) = A,\ \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x) = y_0,$
то: $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f\left(g(x)\right) = A.$

Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы

Неопределенность 1 типа.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *с неопределенностью вида* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $f(x)$ *и* $g(x)$ *— сложные степенные или показательные функции.*

В случае степенных функций необходимо вынести за скобку в числителе и знаменателе дроби x с наибольшим среди всех слагаемых дроби показателем степени.

Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы

В случае показательных функций за скобку выносится наиболее быстро возрастающее среди всех слагаемых дроби слагаемое. После сокращения дроби неопределенность устраняется.

Неопределенность 2 типа.

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$ *с неопределенностью вида* $$\left(\frac{0}{0}\right).$$

В этом случае необходимо разложить на множители и числитель и знаменатель дроби или домножить и числитель и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. При сокращении дроби неопределенность устраняется.

Неопределенность 3 типа.

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} (f(x) - g(x)) \text{ с}$$

неопределенностью вида $(\infty - \infty)$.

Если функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму дробей, то неопределенность устраняется или приводится ко второму типу после приведения дробей к общему знаменателю.

Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы

Если функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму иррациональных выражений, то неопределенность или устранится или приводится к первому типу путем домножения и деления функции на одно и то же (например, сопряженное) выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы

Неопределенность 4 типа.

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} (f(x))^{g(x)} \text{ с}$$

неопределенностью вида (1^{∞}).

В этом случае выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой степенно-показательную функцию, в основании которой необходимо выделить целую часть дроби, равную единице.

Неопределенность устраняется путем сведения ко второму замечательному пределу.

Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы

Неопределенность 5 типа.

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *с неопределенностью вида* $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, *сводится к первому замечательному пределу.*

Неопределенность 6 типа.

$\lim\limits_{x \longrightarrow x_0(\infty)} (f(x) \cdot g(x))$ *с неопределенностью вида* $(0 \cdot \infty)$.

Сводится к рассмотренным выше неопределенностям $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ *и* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ *следующим образом:*

произведение $f(x)\cdot g(x)$ *следует записать в виде* $\dfrac{f(x)}{\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]}$ *или* $\dfrac{g(x)}{\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]}$ *и получить неопределенность вида* $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ *или* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Неопределенность 7 типа.

$\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} (f(x))^{g(x)}$ *с неопределенностью вида* $\left(0^0\right)$.

Сводится к рассмотренным выше неопределенностям $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ *и* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Находят предел натурального логарифма выражения, содержащего данную неопределённость. После нахождения предела от него берут экспоненту:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)\ln f(x)}.$$

Неопределенность 8 типа.

$\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} (f(x))^{g(x)}$ *с неопределенностью вида* $\left(\infty^0\right)$.

Сводится к рассмотренным выше неопределенностям $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ *и* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Находят предел натурального логарифма выражения, содержащего данную неопределенность. После нахождения предела от него берут экспоненту:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)\ln f(x)}.$$