Вариант № 2887385

1. B 1 № 25005.
Шоколадка стоит 40 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 320 рублей в воскресенье?

Решение.

На 320 рублей можно купить 8 шоколадок по 40 рублей. Еще 4 будут даны в подарок. Всего можно будет получить 12 шоколадок.

Ответ: 12.

2. B 2 № 26633. Клиент взял в банке кредит 12000 рублей на год под 16%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Решение.

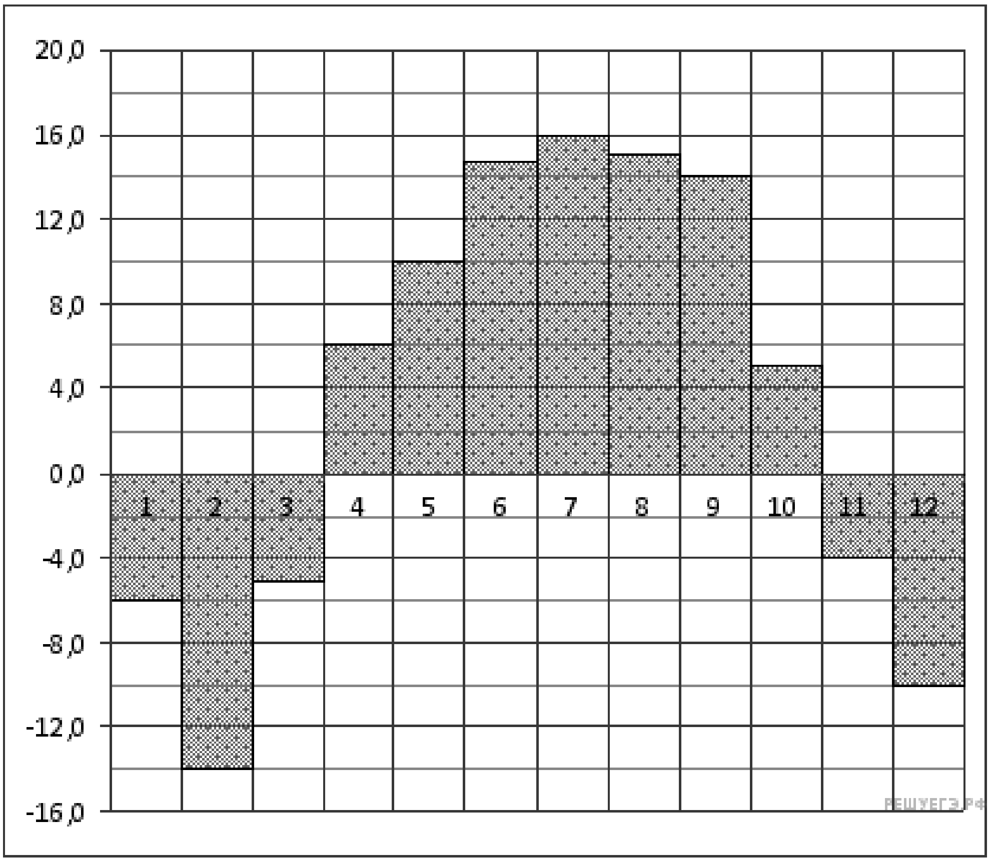
Через год клиент должен будет выплатить 12 000 + 0,16 · 12 000 = 13 920 рублей. Разделим 13 920 руб. на 12 мес.:

$$\frac{13\,920}{12} = 1160 \text{ руб./мес.}$$

Значит, клиент должен вносить ежемесячно в банк 1160 рублей.

Ответ: 1160.

3. B 3 № 27519. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с положительной среднемесячной температурой.



Решение.

Из диаграммы видно, что было 7 месяцев с температурой выше нуля (см. рисунок).

Ответ: 7.

4. B 4 № 316047. Автомобильный журнал определяет рейтинги автомобилей на основе показателей безопасности S, комфорта C, функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей автомобилей.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3	5	2	5	2
Б	4	2	4	1	5
В	5	3	4	5	2

Решение.

Рассмотрим все варианты.

Модель А: $R = \frac{9+10+4+10+2}{50} = \frac{35}{50} = 0,7.$

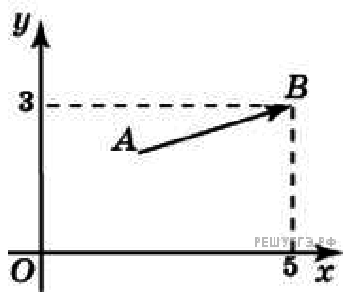
Модель Б: $R = \frac{12+4+8+2+5}{50} = \frac{31}{50} = 0,62.$

Модель В: $R = \frac{15+6+8+10+2}{50} = \frac{41}{50} = 0,82.$

Тем самым, наивысший рейтинг имеет имеет модель В, он равен 0,82

Ответ: 0,82.

5. B 5 № 27727. Вектор $\vec{AB}$ с концом в точке $B(5;\ 3)$ имеет координаты (3; 1). Найдите абсциссу точки A.



Решение.

Координаты вектора равны разности координат конца вектора и его начала. Координаты точки A вычисляются следующим образом: $5 - x = 3$, $3 - y = 1$. Откуда $x = 2$, $y = 2$.

Ответ: 2.

6. B 6 № 1011. В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 10 черных, 2 желтых и 8 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.

Решение.

Вероятность того, что к заказчице приедет зеленое такси равна

$$\frac{8}{20}=\frac{4}{10}=0,4.$$

Ответ: 0,4.

7. B 7 № 26663. Найдите корень уравнения: $-\frac{2}{9}x=1\frac{1}{9}.$

Решение.

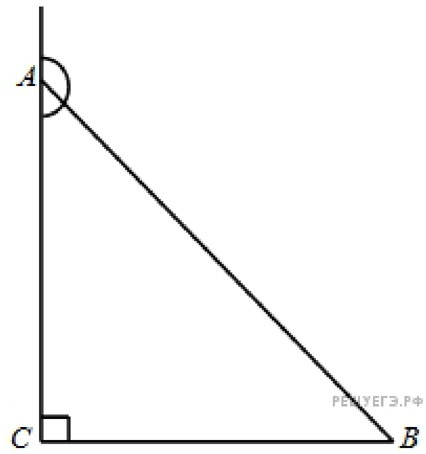
Последовательно получаем:

$$-\frac{2}{9}x=1\frac{1}{9}\Leftrightarrow-\frac{2}{9}x=\frac{10}{9}\Leftrightarrow-2x=10\Leftrightarrow x=-5.$$

Ответ: −5.

8. B 8 № 27416.

В треугольнике ABC угол C равен $90°$, синус внешнего угла при вершине A равен 0,5, $BC=4$. Найдите AB.



Решение.

так как

$$AB=\frac{BC}{\sin A}=\frac{BC}{\sin A_{\text{внеш}}}=\frac{4}{1/2}=8.$$

Ответ: 8.

9. B 9 № 124215.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{6}t^3-2t^2-4t+3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 38 м/с?

Решение.

Найдем закон изменения скорости:

$$v(t)=x'(t)=\frac{1}{2}t^2-4t-4.$$

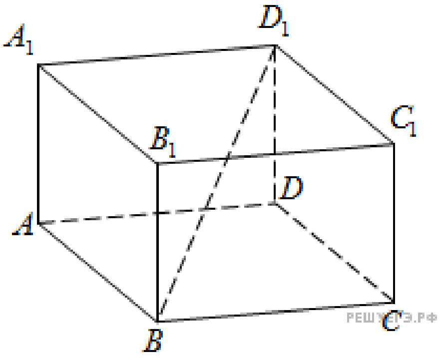
Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 38 м/с, решим уравнение:

$$\frac{1}{2}t^2-4t-4=38\Leftrightarrow t^2-8t-84=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=14;\\ t=-6\end{array}\right.\underset{t>0}{\Leftrightarrow}t=14\text{ с}.$$

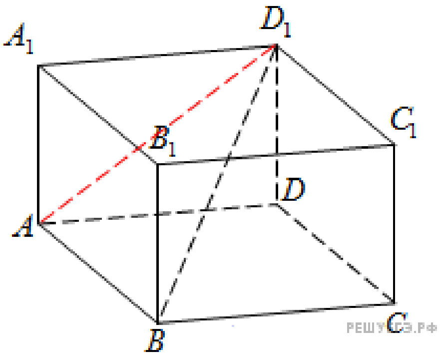
Следовательно, скорость точки была равна 38 м/с на четырнадцатой секунде движения.

Ответ: 14.

10. B 10 № 919. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BD_1=6;\ CC_1=2;\ AD=\sqrt{7}.$ Найдите длину ребра D_1C_1.



Решение.
По теореме Пифагора



$$AD_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1D_1^2} = \sqrt{CC_1^2 + AD^2} = \sqrt{4+7} = \sqrt{11}.$$

Тогда длина ребра D_1C_1 равна

$$D_1C_1 = BA = \sqrt{BD_1^2 - AD_1^2} = \sqrt{36-11} = 5.$$

Ответ: 5.

Приведем другое решение.

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений: $36 = 4 + 7 + x^2$, откуда искомая длина ребра x равна 5.

11. B 11 № 26860. Найдите значение выражения $\log_{0,8}3 \cdot \log_3 1{,}25$.

Решение.

Используем формулу

$$\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$$

.

Имеем:

$$\log_{0,8}3 \cdot \log_3 1{,}25 = \log_{0,8}1{,}25 \cdot \log_3 3 = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = -1.$$

Ответ: −1.

12. B 12 № 27998. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полета будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

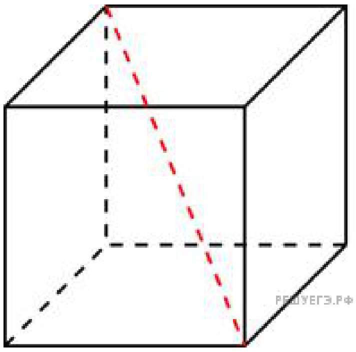
Решение.

Задача сводится к решению неравенства $t(\alpha) \geq 3$ на интервале $(0°;\ \ 90°)$ при заданных значениях начальной скорости и ускорения свободного падения:

$$\frac{2 \cdot 30 \cdot \sin\alpha}{10} \geq 3 \Leftrightarrow \sin\alpha \geq \frac{1}{2} \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 30° \leq \alpha < 90°.$$

Ответ: 30.

13. B 13 № 74429. Диагональ куба равна $\sqrt{243}$. Найдите его объем.



Решение.

Диагональ куба в $\sqrt{3}$ раз больше его ребра. Поэтому ребро куба равно

$$a = \frac{\sqrt{243}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{243}{3}} = \sqrt{81} = 9.$$

Тогда объем куба $V = a^3 = 729.$

Ответ: 729.

14. B 14 № 99565. В 2008 году в городском квартале проживало 40000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

Решение.

В 2009 году число жителей стало $40\ 000 + 0,08 \cdot 40\ 000 = 43\ 200$ человек, а в 2010 году число жителей стало $43\ 200 + 0,09 \cdot 43\ 200 = 47\ 088$ человек.

Ответ: 47088.

15. B 15 № 26692. Найдите наибольшее значение функции $y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

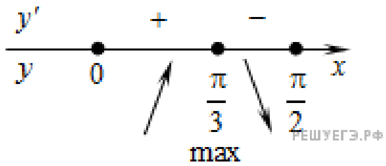
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -12\sin x + 6\sqrt{3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} -12\sin x + 6\sqrt{3} = 0, \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = \frac{\pi}{3}$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12.$$

Ответ: 12.

16. C 1 № 503146. а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

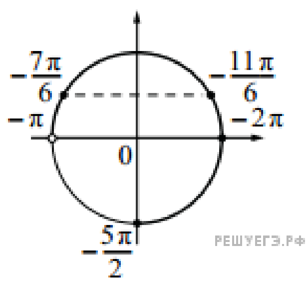
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right)$.

Решение.

Поскольку $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, имеем:

$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие заданному промежутку (см. рис.). Получаем числа: -2π, $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

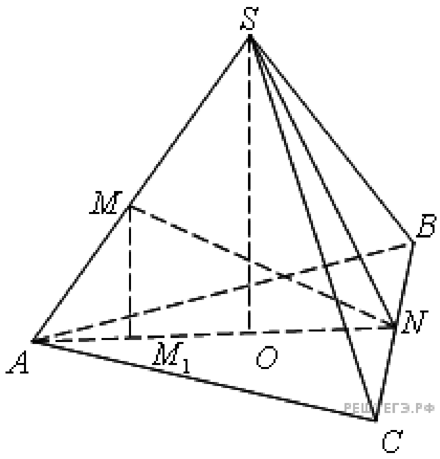


Ответ: а) $\left\{\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, б) -2π, $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

17. C 2 № 484559. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 7\sqrt{3}$, $SC = 25$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.

Решение.

Пусть M и N — середины ребер AS и BC соответственно. AN — медиана правильного треугольника ABC, следовательно, находится по формуле $AN=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{21}{2}$. Прямая AS проецируется на плоскость основания и прямую AN. Поэтому проекция точки M — точка M_1 — лежит на отрезке AN. Значит, прямая AN является проекцией прямой MN, следовательно, угол MNM_1 — искомый.



$MM_1 \parallel SO$, где O — центр основания, значит, MM_1 — средняя линия треугольника ASO поэтому $AM_1=\frac{1}{2}AO$. Тогда $AM_1=\frac{1}{3}AN=\frac{7}{2}$ и $M_1N=\frac{2}{3}AN=7$. Из прямоугольного треугольника AMM_1 находим:

$$MM_1=\sqrt{AM^2-AM_1^2}=\sqrt{\frac{625}{4}-\frac{49}{4}}=12.$$

Из прямоугольного треугольника MM_1N находим:

$$\operatorname{tg}\angle MNM_1=\frac{MM_1}{M_1N}=\frac{12}{7}.$$

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{12}{7}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{12}{7}$.

18. C 3 № 501946. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{5-x}\frac{x+4}{(x-5)^{10}} \geq -10, \\ x^3+8x^2+\frac{50x^2+x-7}{x-7} \leq 1. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{5-x}\frac{x+4}{(x-5)^{10}} \geq -10 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+4)-\log_{5-x}(x-5)^{10} \geq -10 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+4) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<5-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+4) \leq 0,\\ 0<5-x<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x+4 \leq 1,\\ 4<x<5.\end{cases}$$

Эта система не имеет решений.

Второй случай: $5-x>1$. Имеем:

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+4) \leq 0,\\ 5-x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+4>1,\\ x<4.\end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x<4.$$

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+8x^2+\frac{50x^2+x-7}{x-7} \leq 1 \Leftrightarrow x^3+8x^2+\frac{50x^2}{x-7} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^4+x^3-6x^2}{x-7} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-2)(x+3)}{x-7} \leq 0.$$

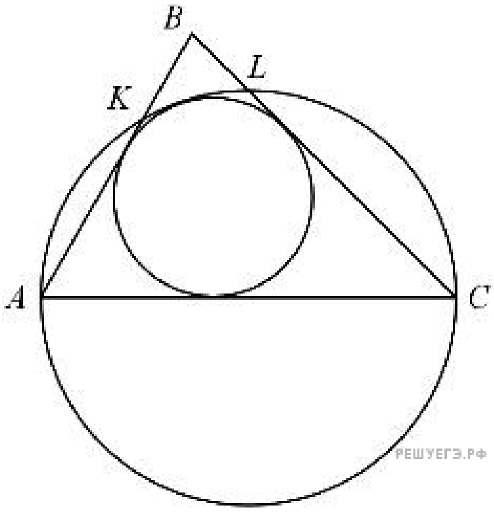
Решение второго неравенства исходной системы: $x \leq -3,\ x=0,\ 2 \leq x<7.$

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-3,\ x=0,\ 2 \leq x<4.$

Ответ: −3; 0; [2; 4).

19. C 4 № 500369. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=5,\ BC=6,\ AC=7.$ Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BC и BA соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Решение.



Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника. Четырехугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно,

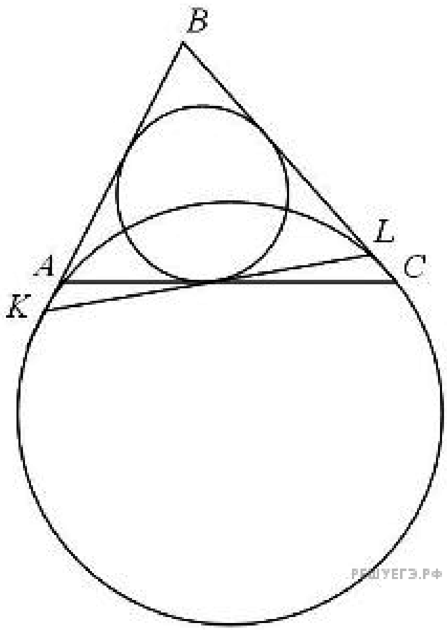
$$\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK.$$

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k, тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$. Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC;$$

$$AB(1-k) + BC(1-k) = AC(1+k) \Leftrightarrow k = \frac{AB+BC-AC}{AC+AB+BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \frac{5+6-7}{5+6+7} = \frac{2}{9}$. Следовательно, $KL = \frac{2}{9}AC = \frac{14}{9}$.



Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB. Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть, треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 7$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB.

Если точка L лежит на продолжении стороны BC, то $BL > BC$, но, аналогично предыдущему случаю, получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{14}{9}$; 7.

20. C 5 № 484648. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 - 8x + |y| + 12 = 0, \\ x^2 + (y-a)(y+a) = 8(x-2) \end{cases}$ имеет ровно 8 решений.

Решение.

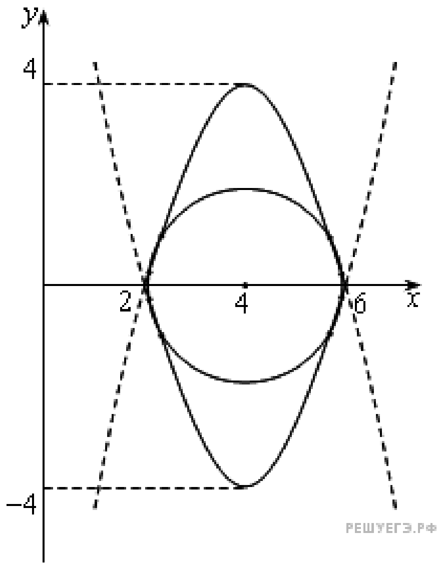
Преобразуем систему:

$$\begin{cases} |y| = 4-(x-4)^2, \\ (x-4)^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

Первое уравнение задает части двух парабол:

$$y = \begin{cases} 4-(x-4)^2, & y \ge 0, \\ (x-4)^2-4, & y < 0 \end{cases}$$

(см. рисунок).



Второе уравнение задает окружность радиусом $|a|$ с центром $(4;\ 0)$. На рисунке видно, что система имеет восемь решений, только если радиус окружности меньше 2 и окружность дважды пересекает каждую ветвь каждой из парабол. Это условие в силу симметрии равносильно тому, что окружность пересекает правую ветвь параболы $y = 4-(x-4)^2$ в двух точках с положительными ординатами.

Получаем уравнение $y = 4-(a^2-y^2)$, откуда

$$y^2-y+(4-a^2)=0,$$

которое должно иметь два различных положительных корня. Следовательно, дискриминант и свободный член этого уравнения должны быть положительны:

$$\begin{cases} 1+4a^2-16>0, \\ 4-a^2>0, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} a^2 > \frac{15}{4}, \\ a^2 < 4; \end{cases} \begin{cases} |a| > \frac{\sqrt{15}}{2}, \\ -2 < a < 2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-2;\ -\frac{\sqrt{15}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{15}}{2};\ 2\right)$.

21. C 6 № 501889. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k-8l+0\cdot m=-3(k+l+m)$.

Вопрос а) Заметим, что в лувой части приведенного выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k+l+m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40<k+l+m<48$, поэтому $k+l+m=44$. Таким образом, написано 44 числа.

Вопрос б) Приведем равенство $4k-8l=-3(k+l+m)$ к виду $5l=7k+3m$. Так как $m\geq 0$, получаем, что $5l\geq 7k$, откуда $l>k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

Вопрос в) Подставим $k+l+m=44$ в правую часть равенства $4k-8l=-3(k+l+m)$: $4k-8l=-132$, откуда $k=2l-33$. Так как $k+l\leq 44$, получаем: $3l-33\leq 44$, $3l\leq 77$, $l\leq 25$, $k=2l-33\leq 17$; то есть положительных чисел не более 17.

Приведем пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число −8 и два раза написан 0. Тогда $\dfrac{4\cdot 17-8\cdot 25}{44}=\dfrac{68-200}{44}=-3$, указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

О т в е т : а) 44; б) отрицательных; в) 17.