Вариант № 2887404

1. B 1 № 314968. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 5% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,4 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку весом в возрасте четырёх месяцев и весом 5 кг в течение суток?

Решение.

В одной таблетке лекарства содержится $20 \cdot 0{,}05 = 1$ мг активного вещества. Суточная норма активного вещества для ребенка весом 5 кг составит: $1{,}4 \cdot 5 = 7$ мг. Тем самым, ребенку следует дать 7 таблеток.

Ответ: 7.

2. B 2 № 77341. 27 выпускников школы собираются учиться в технических вузах. Они составляют 30% от числа выпускников. Сколько в школе выпускников?

Решение.

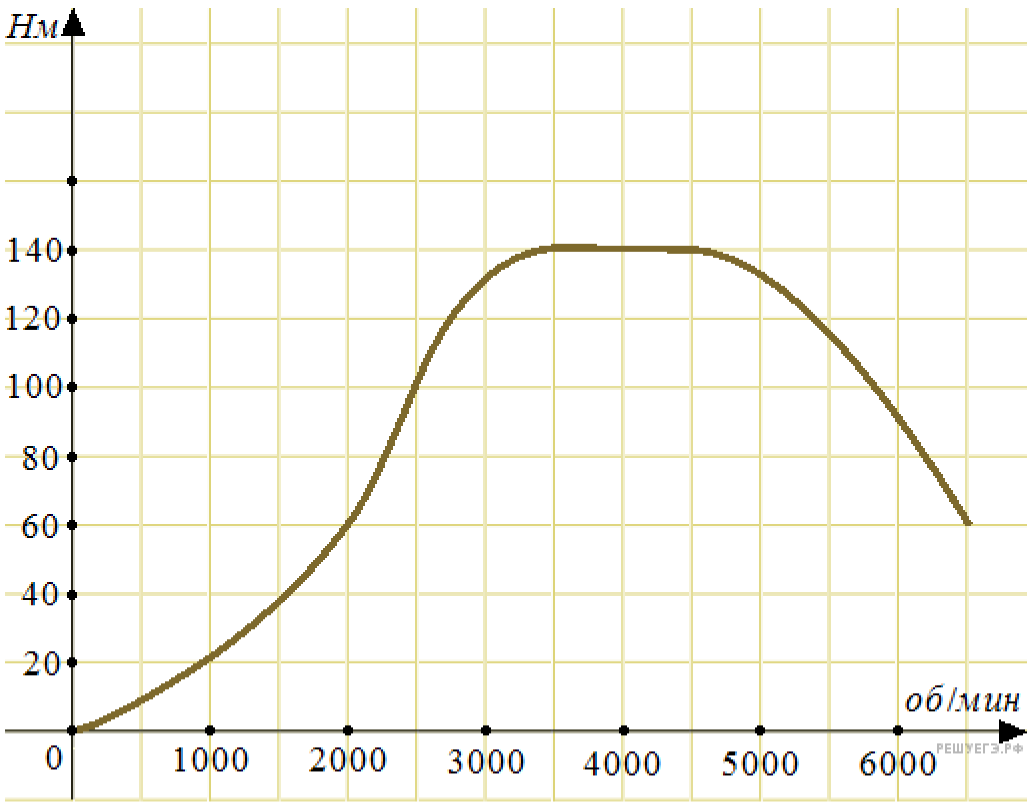
Разделим 27 на 0,3:

$$\frac{27}{0,3} = \frac{27 \cdot 10}{3} = 90.$$

Значит, в школе 90 выпускников.

Ответ: 90.

3. B 3 № 26864. На графике изображена зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту. На оси ординат — крутящий момент в Н · м. Чтобы автомобиль начал движение, крутящий момент должен быть не менее 60 Н · м. Какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение?



Решение.

Из графика видно, что крутящий момент 60 Н · м достигается при 2000 оборотов двигателя в минуту (см. рисунок).

Ответ: 2000.

4. B 4 № 246261.

В среднем гражданин А. в дневное время расходует 125 кВт · ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 155 кВт · ч электроэнергии. Раньше у А. в квартире был установлен однотарифный счетчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 2,6 руб. за кВт · ч. Год назад А. установил двухтарифный счетчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 2,6 руб. за кВт · ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 0,7 руб. за кВт · ч. В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько больше заплатил бы А. за этот период, если бы не поменялся счетчик? Ответ дайте в рублях.

Решение.

Рассмотрим оба типа счётчиков.

При использовании однотарифного счётчика, гражданин А. платил в месяц

$$(125 \text{ кВт} \cdot \text{ч} + 155 \text{ кВт} \cdot \text{ч}) \cdot 2{,}6 \text{ руб. за } 1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 728 \text{ руб.}$$

Поэтому за 12 месяцев он платил $728 \cdot 12 = 8736$ руб.

При использовании двухтарифного счётчика, гражданин А. платит в месяц

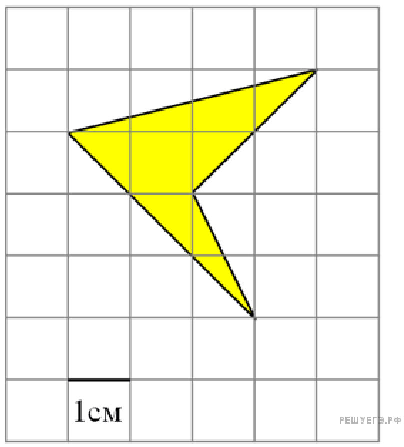
$$125 \text{ кВт} \cdot \text{ч} \cdot 2{,}6 \text{ руб.} + 155 \text{ кВт} \cdot \text{ч} \cdot 0{,}7 \text{ руб.} = 433{,}5 \text{ руб.}$$

Поэтому за 12 месяцев он заплатит 433,5 руб. · 12 = 5202 руб.

Установка нового типа счётчика позволяет экономить 8736 руб. − 5202 руб. = 3534 руб. в год.

5. B 5 № 245007.

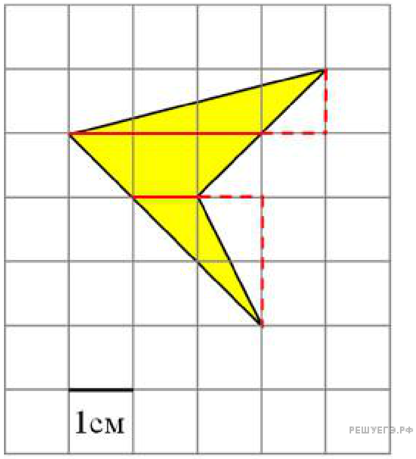
Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение.

Площадь четырёхугольника состоит из площадей двух треугольников и площади трапеции. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (3 + 1) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 4{,}5 \text{ см}^2.$$



6. B 6 № 320207. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение.

Анализ пациента может быть положительным по двум причинам: А) пациент болеет гепатитом, его анализ верен; В) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем:

$$P(A) = 0,9 \cdot 0,05 = 0,045,$$
$$P(B) = 0,01 \cdot 0,95 = 0,0095,$$
$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,045 + 0,0095 = 0,0545.$$

Ответ: 0,0545.

7. B 7 № 77372. Решите уравнение $\frac{x+8}{5x+7} = \frac{x+8}{7x+5}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

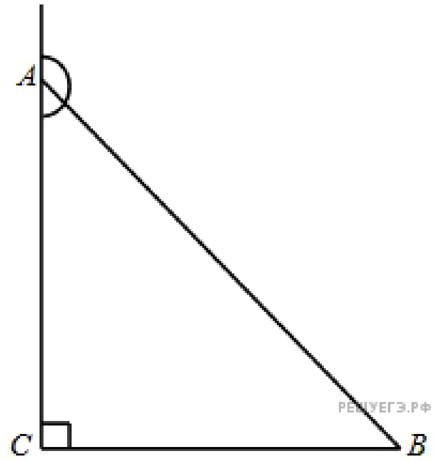
Решение.

Заметим, что числители дробей равны. Имеем:

$$\frac{x+8}{5x+7} = \frac{x+8}{7x+5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+8=0; \\ 5x+7=7x+5, 7x+5 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-8; \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: 1.

8. B 8 № 27394. В треугольнике ABC угол C равен 90°, косинус внешнего угла при вершине A равен $-\frac{4}{\sqrt{17}}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.



Решение.
так как

$$\cos A = -\cos A_{\text{внеш}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A} = \frac{\sqrt{1-\frac{16}{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

9. B 9 № 27485. Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

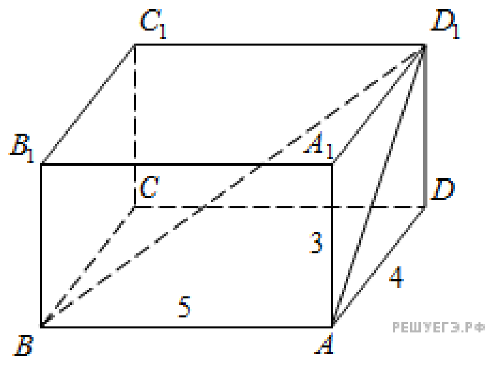
Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 7x - 5$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y' = 7$:

$$(x^2 + 6x - 8)' = \ 7 \Leftrightarrow 2x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

10. B 10 № 245361. Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. Дайте ответ в градусах.



Решение.

В прямоугольнике AA_1D_1D отрезок AD_1 является диагональю, $A_1D_1 = AD$. По теореме Пифагора

$$AD_1 = \sqrt{AA_1{}^2 + A_1D_1{}^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Прямоугольный треугольник ABD_1 равнобедренный: $AB = AD_1 = 5$, значит, его острые углы равны 45°

Ответ: 45.

11. B 11 № 26842. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}$ при $m = 64$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}} = m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{18}} = m^{\frac{1}{3}} = 4.$$

Ответ: 4.

12. B 12 № 27984. Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\dfrac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 4 километров? Ответ выразите в метрах.

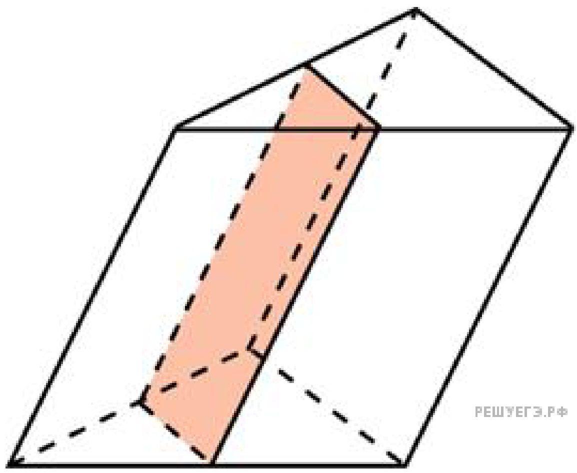
Решение.

Задача сводится к решению уравнения $l = 4$ при заданном значении R:

$$\sqrt{\frac{6400h}{500}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{64h}{5}} = 4 \Leftrightarrow \frac{64h}{5} = 16 \Leftrightarrow h = \frac{5}{4} \Leftrightarrow h = 1{,}25 \text{ м}.$$

Ответ: 1,25.

13. B 13 № 27106. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.



Решение.

Площадь основания отсеченной части меньше площади основания всей призмы в 4 раза (так как и высота и основание треугольника уменьшились в 2 раза). Высота осталась прежней, следовательно, объем уменьшился в 4 раза.

Ответ: 8.

14. B 14 № 99602. Расстояние между пристанями A и B равно 120 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот прошел 24 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Скорость плота равна скорости течения реки 2 км/ч. Пусть u км/ч – скорость яхты, тогда скорость яхты по течению равна $u+2$ км/ч, а скорость яхты против течения равна $u-2$ км/ч. Яхта, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A, а плоту понадобилось на час больше времени, чтобы пройти 24 км.

$$\frac{120}{u+2}+\frac{120}{u-2}+1=\frac{24}{2}\Leftrightarrow\frac{240u}{u^2-4}=11\Leftrightarrow 11u^2-240u-44=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u=\dfrac{240+\sqrt{240^2+44^2}}{22}=22; \\ u=\dfrac{240-\sqrt{240^2+44^2}}{22}=-\dfrac{2}{11} \end{array}\right.\underset{u>0}{\Leftrightarrow} u=22.$$

Ответ: 22.

15. B 15 № 77431. Найдите точку максимума функции $y=x^3-5x^2+7x-5$.

Решение.

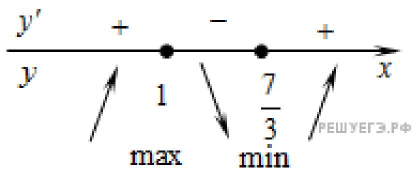
Найдем производную заданной функции:

$$y'=3x^2-10x+7.$$

Найдем нули производной:

$$3x^2-10x+7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{7}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=1$.

Ответ: 1.

16. C 1 № 502114. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\cdot\sin x=\cos x$.

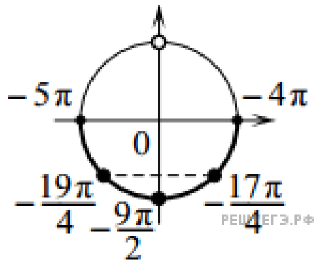
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5\pi;-4\pi]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$-\sqrt{2}\cos x\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow\cos x\cdot\left(\sqrt{2}\sin x+1\right)=0$$

Значит, либо $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, либо $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

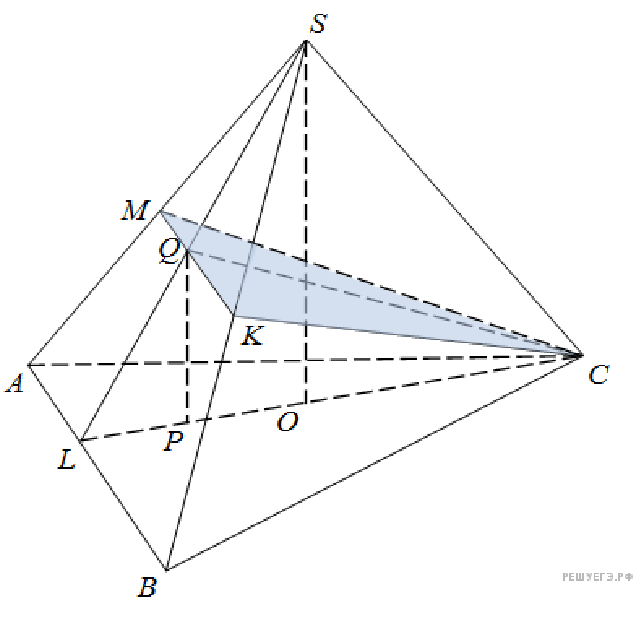


б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-5\pi;-4\pi]$. Получим числа $-\frac{19\pi}{4};-\frac{9\pi}{2};-\frac{17\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};-\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$. б) $-\frac{19\pi}{4};-\frac{9\pi}{2};-\frac{17\pi}{4}$.

17. C 2 № 486000. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если $SC=8, BC=6$.

Решение.



Проведем перпендикуляр CQ к MK, так как треугольник CMK — равнобедренный, то Q — середина MK. Из точки Q опустим перпендикуляр QP на плоскость основания. Точка P лежит на медиане CL треугольника ABC. Прямая MK параллельна прямой пересечения плоскостей CMK и ABC, $QP\perp MK$ и $CQ\perp MK$. Следовательно, $\angle QCP$ — линейный угол искомого угла между плоскостями.

Далее находим:

$$CO=\frac{2}{3}CL=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}BC=2\sqrt{3}.$$

$$SO=\sqrt{SC^2-CO^2}=\sqrt{8^2-(2\cdot\sqrt{3})^2}=2\sqrt{13}.$$

$$QP=\frac{1}{2}SO=\sqrt{13}.$$

$$CP=\frac{1}{2}OL=\frac{5}{6}CL=\frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

Откуда

$$\operatorname{tg}\angle QCP=\frac{\sqrt{13}\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot 5}=\frac{2\sqrt{39}}{15}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{39}}{15}$.

18. C 3 № 500065. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 11^{x+1}+3\cdot 11^{-x}\le 34, \\ \log_{2x}0{,}25\le \log_2 32x-1. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y=11^x$.

$$11y+\frac{3}{y}\le 34 \Leftrightarrow \frac{11y^2-34y+3}{y}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(y-3)(11y-1)}{y}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<0, \\ \frac{1}{11}\le y\le 3. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $11^x>0$, получаем: $\frac{1}{11}\le 11^x\le 3$, откуда находим решение первого неравенства системы: $x\in[-1,\log_{11}3]$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{1}{\log_{0,25}2x}\le \log_2 32x-1 \Leftrightarrow -\frac{2}{\log_2 x+1}\le \log_2 x+4.$$

Сделаем замену $z=\log_2 x$.

$$-\frac{2}{z+1}\le z+4 \Leftrightarrow \frac{z^2+5z+6}{z+1}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(z+2)(z+3)}{z+1}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3\le z\le -2, \\ z>-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3\le \log_2 x\le -2, \\ \log_2 x>-1. \end{array}\right.$$

Откуда находим решение второго неравенства системы: $x\in\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right]\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

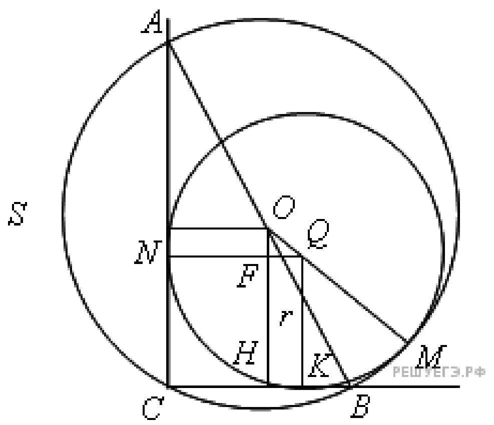
3. Поскольку $\frac{1}{4}<\log_{11}3<\frac{1}{2}$, получаем решение исходной системы неравенств.

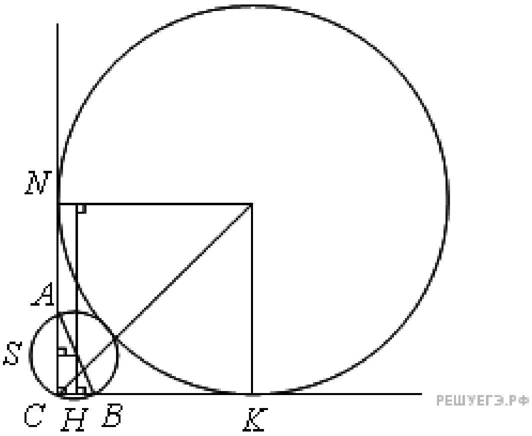
Ответ: $x\in\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right]$.

19. C 4 № 484616. Окружность S проходит через вершину C прямого угла и пресекает его стороны в точках, удаленных от вершины C на расстояния 6 и 8. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающийся окружности S.

Решение.

Пусть окружность S с центром O и радиусом R пересекает стороны данного прямого угла в точках A и B, $AC = 8$, $BC = 6$, искомая окружность с центром Q касается сторон и BC угла ACB в точках N и K соответственно, а окружности S — в точке M.





Точка O — центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, поэтому O — середина его гипотенузы AB.

$$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{8^2+6^2} = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5.$$

Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому точки M, O и Q лежат на одной прямой. Опустим перпендикуляр OH из центра окружности S на прямую BC. Тогда OH — средняя линия треугольника ABC поэтому $OH = \frac{1}{2}AC = 4$ и $CH = \frac{1}{2}BC = 3$, а так как центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, то $\angle QCK = 45^\circ$, поэтому $CK = QK = r$.

Опустим перпендикуляр QF из центра искомой окружности на прямую OH. Тогда

$$OF = |OH - FH| = |OH - QK| = |4 - r|, \quad QF = KH = |r - 3|.$$

Предположим, что искомая окружность и окружность касаются внутренним образом. Тогда

$$OQ = OM - QM = R - r = 5 - r.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник OFQ. По теореме Пифагора $OQ^2 = OF^2 + QF^2$ или

$$(5-r)^2 = (4-r)^2 + (r-3)^2,$$ откуда находим, что $r = 4$.

Если же искомая окружность касается данной внешним образом, то

$$OQ = OM + QM = R + r = 5 + r.$$

Тогда из соответствующего уравнения $(5+r)^2 = (4-r)^2 + (r-3)^2$ находим, что $r = 24$.

Ответ: 4 или 24.

20. C 5 № 500451. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве $|x| \geq 1$ не меньше 6.

Решение.

Графиком функции $f(x)=(2x+a)^2-2a+2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина имеет координаты $\left(-\frac{a}{2};-2a+2\right)$. Значит, минимум функции $f(x)$ на всей числовой оси достигается при $x=-\frac{a}{2}$.

На множестве $|x|\geq 1$ эта функция достигает наименьшего значения либо в точке $x=-\frac{a}{2}$, если эта точка принадлежит множеству, либо в одной из граничных точек $x=\pm 1$.

Если наименьшее значение функции не меньше 6, то и всякое значение функции не меньше 6. В частности,

$$f(1)\geq 6 \Leftrightarrow a^2+2a+6\geq 6; a(a+2)\geq 0,$$

$$f(-1)\geq 6 \Leftrightarrow a^2-6a+6\geq 6; a(a-6)\geq 0,$$

откуда получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a(a+2)\geq 0, \\ a(a-6)\geq 1. \end{cases}$$

.

решениями которой являются $a\leq -2$; $a=0$; $a\geq 6$.

При $a\leq -2$ имеем: $-\frac{a}{2}\geq 1$, значит, наименьшее значение функции достигается в точке $x=\frac{a}{2}$ и $f\left(-\frac{a}{2}\right)=-2a+2\geq 6$, что удовлетворяет условию задачи.

При $a=0$ имеем: $-\frac{a}{2}=0$, значит, наименьшее значение функции достигается в одной из граничных точек $x=\pm 1$, в которых значение функции не меньше 6.

При $a\geq 6$ имеем: $-\frac{a}{2}\leq -3$, значит, наименьшее значение функции достигается в точке $x=-\frac{a}{2}$ и $f\left(-\frac{a}{2}\right)=-2a+2\leq -10$, что не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a\leq -2$; $a=0$.

21. C 6 № 501989. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Решение.

а) Задуманные числа *2, 2, 2, 2* дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число *9* — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит
целой части, то есть *5*. Кроме того, числа *10* и *11* меньше, чем сумма двух чисел *9,* поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $52 - 9 - 10 - 11 = 22$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно *9*. оставшиеся задуманные числа — это *11* и *11* или *22.* Для задуманных чисел *9, 10, 11, 11, 11* и *9, 10, 11, 22* на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2: б) нет: в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.