Вариант № 2887393

1. B 1 № 77335. Маша отправила SMS-сообщения с новогодними поздравлениями своим 16 друзьям. Стоимость одного SMS-сообщения 1 рубль 30 копеек. Перед отправкой сообщения на счету у Маши было 30 рублей. Сколько рублей останется у Маши после отправки всех сообщений?

Решение.

За 16 SMS-сообщений Маша заплатила $16 \cdot 1{,}3 = 20{,}8$ рубля. Значит, после отправки всех сообщений у Маши осталось: $30 - 20{,}8 = 9{,}2$ рубля.

Ответ: 9,2.

2. B 2 № 26627. Оптовая цена учебника 170 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 7000 рублей?

Решение.

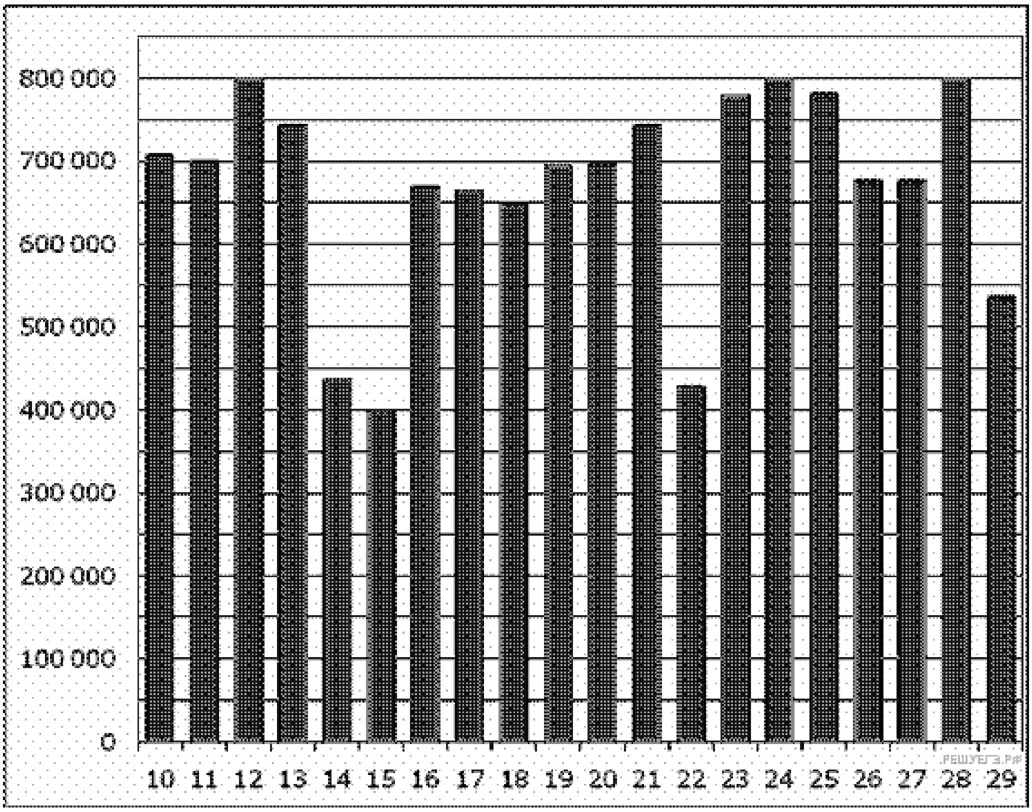
С учетом наценки учебник будет стоить $170 + 0{,}2 \cdot 170 = 204$ рубля. Разделим 7000 на 204:

$$\frac{7000}{204} = \frac{1750}{51} = \frac{1734+16}{51} = \frac{1734}{51} + \frac{16}{51} = 34\frac{16}{51}.$$

Значит, можно будет купить 34 учебника.

Ответ: 34.

3. B 3 № 28765. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, во сколько раз наибольшее количество посетителей больше, чем наименьшее количество посетителей за день.



Решение.

Из графика видно, что наибольшее количество посетителей (800 тысяч) больше, чем наименьшее количество посетителей за день (400 тысяч) в 2 раза (см. рисунок).

Ответ: 2.

4. B 4 № 77361. В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным на начало 2010 года).

Наименование продукта	**Тверь**	**Липецк**	**Барнаул**
Пшеничный хлеб (батон)	11	12	14
Молоко (1 литр)	26	23	25
Картофель (1 кг)	9	13	16
Сыр (1 кг)	240	215	260
Мясо (говядина) (1 кг)	260	280	300
Подсолнечное масло (1 литр)	38	44	50

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов: 2 батона пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Решение.

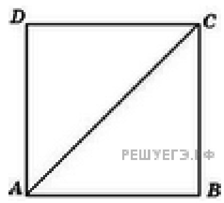
В Твери стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит $11 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 1{,}5 \cdot 260 + 1 \cdot 38 = 477$ руб.

В Липецке стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит $12 \cdot 2 + 13 \cdot 3 + 1{,}5 \cdot 280 + 1 \cdot 44 = 527$ руб.

В Барнауле стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит $14 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 1{,}5 \cdot 300 + 1 \cdot 50 = 576$ руб.

Самый дешёвый набор продуктов можно купить в Твери по цене 477 руб.

5. B 5 № 27814. Найдите сторону квадрата, диагональ которого равна $\sqrt{8}$.



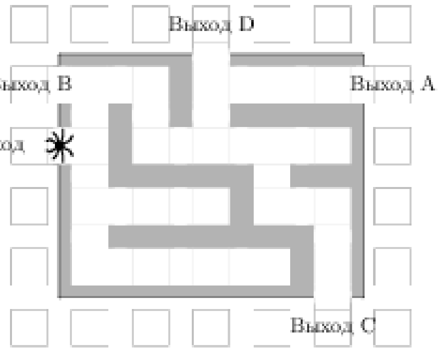
Решение.

По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2$, значит,

$$AB = \sqrt{\frac{AC^2}{2}} = 2.$$

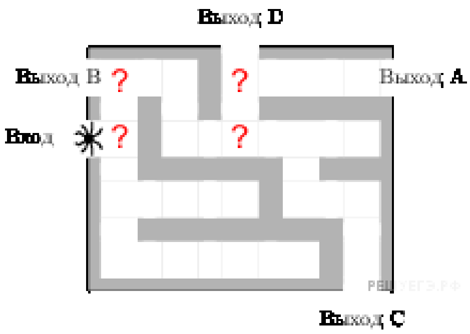
Ответ: 2.

6. B 6 № 320212. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу *D*.



Решение.

На каждой из четырех отмеченных развилок паук с вероятностью 0,5 может выбрать или путь, ведущий к выходу D, или другой путь. Это независимые события, вероятность их произведения (паук дойдет до выхода D) равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность прийти к выходу D равна $(0{,}5)^4 = 0{,}0625$.



Ответ: 0,0625.

7. B 7 № 26661. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2x+5}{3}} = 5$.

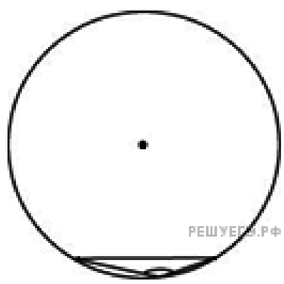
Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{2x+5}{3}} = 5 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{3} = 25 \Leftrightarrow 2x+5 = 75 \Leftrightarrow x = 35.$$

Ответ: 35.

8. B 8 № 27861. Радиус окружности равен 1. Найдите величину тупого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.

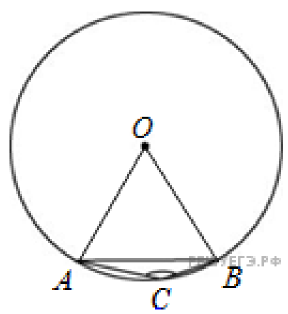


Решение.

вписанный угол дополняет половину центрального угла, опирающегося на ту же хорду, до 180°.

$$\angle ACB = 180^\circ - \frac{\angle AOB}{2},$$

значит, $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle ACB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.



Ответ: 135.

9. B 9 № 122715.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t + 13$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.

Решение.

Найдем закон изменения скорости:

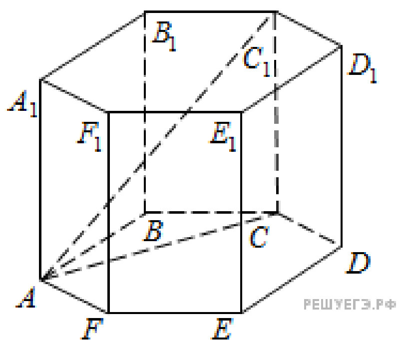
$$v(t) = x'(t) = -t^2 + 4t + 5.$$

Тогда находим:

$$v(3) = -9 + 4 \cdot 3 + 5 = 8 \text{ м/с}.$$

Ответ: 8.

10. B 10 № 245369. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол AC_1C. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ACC_1:

$$\operatorname{tg} \angle AC_1C = \frac{AC}{CC_1} = AC.$$

Осталось найти диагональ основания. В правильном шестиугольнике углы между сторонами равны 120°, тогда по теореме косинусов для треугольника ABC имеем:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}.$$

Так как $\angle AC_1C$ — острый, он равен 60°.

Ответ: 60.

11. B 11 № 26845. Найдите значение выражения $36^{\log_6 5}$.

Решение.

Выполним перобразования:

$$36^{\log_6 5} = (6^{\log_6 5})^2 = 25.$$

Ответ: 25.

12. B 12 № 28011. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M}v\cos\alpha$ (м/с), где $m = 80$ кг – масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг – масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,25 м/с?

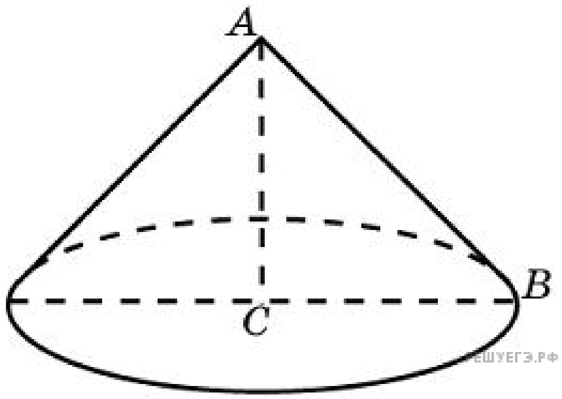
Решение.

Задача сводится к решению неравенства $u \geq 0,25$ на интервале $(0°;\quad 90°)$ при заданных значениях массы скейтбордиста $m = 80$ кг и массы платформы $M = 400$ кг:

$$u \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{m}{m+M} v\cos\alpha \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{80}{80+400} \cdot 3 \cdot \cos\alpha \geq 0{,}25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos\alpha \geq \frac{1}{4} \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 0° < \alpha \leq 60°.$$

Ответ: 60.

13. B 13 № 27122. Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника ABC вокруг катета, равного 6. Найдите его объем, деленный на π.



Решение.

Треугольник ABC – так же равнобедренный, т.к. углы при основании $AB = 45°$. Тогда радиус основания равен 6, и объем конуса, деленный на π:

$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3}\frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3}\frac{\pi r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3}r^2 r = \frac{1}{3} \cdot 6^3 = 72.$$

Ответ: 72.

14. B 14 № 26591. От пристани A к пристани B отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним со скоростью на 1 км/ч большей отправился второй. Расстояние между пристанями равно 110 км. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть u км/ч — скорость второго теплохода, тогда скорость первого теплохода равна $u - 1$ км/ч. Первый теплоход находился в пути на 1 час больше, чем второй, отсюда имеем:

$$\frac{110}{u-1} - \frac{110}{u} = 1 \Leftrightarrow \frac{110}{u^2-u} = 1 \Leftrightarrow 110 = u^2 - u \Leftrightarrow u^2 - u - 110 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 11; \\ u = -10 \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u = 11.$$

Ответ: 11.

15. B 15 № 26716. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - 4\ln(x+7) + 6$на отрезке $[-6,5;0]$.

Решение.

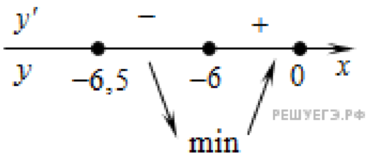
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 4 - \frac{4}{x+7}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 4 - \dfrac{4}{x+7} = 0, \\ -6,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6, \\ -6,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -6$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-6) = -6 \cdot 4 - 4\ln 1 + 6 = -18.$$

Ответ: -18.

16. C 1 № 501729. а) Решите уравнение $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3\cos x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

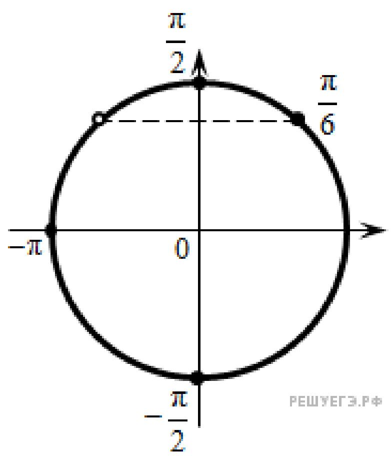
Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$3^{3\cos x \sin x} = 3^{\frac{3\cos x}{2}} \Leftrightarrow 3\cos x \sin x = \frac{3\cos x}{2} \Leftrightarrow \cos x \cdot \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 0$, откуда $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, либо $\sin x = \dfrac{1}{2}$, откуда $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, или $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}$.



Ответ: а) $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z},\ \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}$.

17. C 2 № 500025. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, известны $AB = 1$, $AD = AA_1 = 2$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Решение.

Плоскости ABC_1 и BCC_1 перпендикулярны. Перпендикуляр из точки B_1 к плоскости ABC_1 лежит в плоскости BCC_1 и пересекает прямую BC_1 в точке E. Значит, искомый угол равен углу B_1AE. В прямоугольном треугольнике B_1AE с катетом $B_1E = \sqrt{2}$ и гипотенузой $AB_1 = \sqrt{5}$ имеем:

$$\sin \angle B_1AE = \frac{B_1E}{AB_1} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Следовательно,

$$\angle B_1AE = \arcsin \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Примечание.

Возможны другие формы записи ответа:

$$\angle B_1AE = \arccos \frac{\sqrt{15}}{5} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{3} = \operatorname{arcctg} \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

18. C 3 № 500113. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^x + 32 \cdot 2^{-x} \geq 33, \\ 2\log_9 \left(4x^2+1\right) \geq \log_3 \left(3x^2+4x+1\right). \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 2^x$, тогда:

$$y+\frac{32}{y} \geq 33 \Leftrightarrow \frac{y^2-33y+32}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)(y-32)}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<y\leq 1, \\ y\geq 32. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} 0<2^x\leq 1, \\ 2^x\geq 32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 0, \\ x\geq 5. \end{array}\right.$$

Решим второе неравенство системы. Используя формулу $\log_{a^2} b = \frac{1}{2}\log_a b$, получаем:

$$2\log_9(4x^2+1) \geq \log_3(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow \log_3(4x^2+1) \geq \log_3(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+1>0, \\ 3x^2+4x+1>0, \\ 4x^2+1\geq 3x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+1)(x+1)>0, \\ x(x-4)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ -\frac{1}{3}<x\leq 0, \\ x\geq 4. \end{array}\right.$$

Тем самым, решениями исходной системы неравенств являются $x<-1, -\frac{1}{3}<x\leq 0, x\geq 5.$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right]\cup[5;+\infty).$

19. C 4 № 501458. Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина C, на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 16$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Решение.

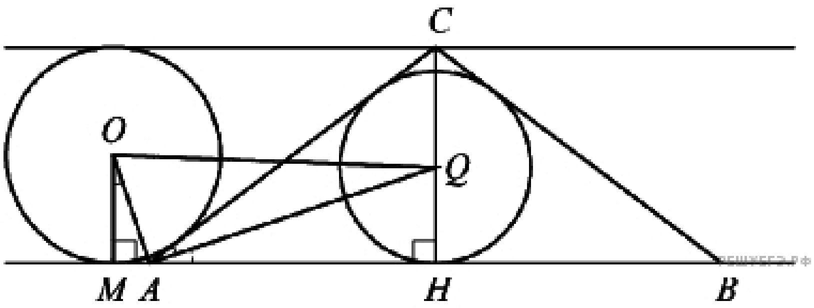
Пусть CH — высота треугольника ABC, r и Q — радиус и центр вписанной окружности, $CH = 6$, $AH = 8$, поэтому $AC = 10$. Найдем площадь, полу периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC:

$$S = \frac{CH\cdot AB}{2} = \frac{6\cdot 16}{2} = 48,\ p = \frac{1}{2}(AC+AB+CB) = AC+AH = 18.$$

Тогда $r = \frac{S}{p} = \frac{8}{3}$. Кроме того, по теореме Пифагора

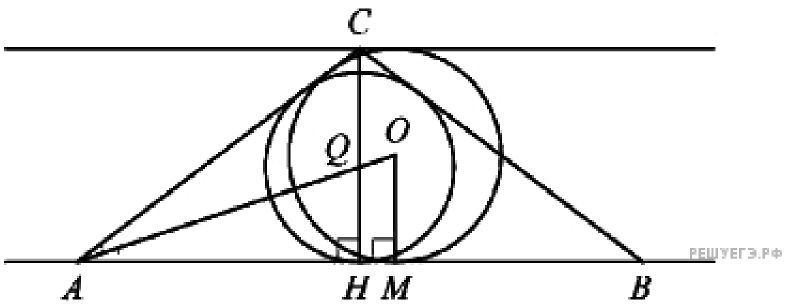
$$AQ = \sqrt{AH^2+QH^2} = \sqrt{64+\frac{64}{9}} = \frac{8\sqrt{10}}{3}.$$

Пусть окружность с центром в точке O касается боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC и данных параллельных прямых. Радиус этой окружности равен 3, поскольку он вдвое меньше расстояния между прямыми. Точку касания окружности с прямой AB обозначим M.



Пусть точки B и M лежат по разные стороны от точки A (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO и AQ — биссектрисы смежных углов $\angle MAC$ и $\angle CAB$ соответственно. Значит, $\angle OAQ = 90^0$, и $\angle MOA = \angle QAH$, поскольку эти углы образованы парами соответственно перпендикулярных прямых. Следовательно, прямоугольные треугольники OMA и AHQ подобны с коэффициентом $\frac{OM}{AH} = \frac{3}{8}$. Поэтому

$$OQ = \sqrt{OA^2 + AQ^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{8}AQ\right)^2 + AQ^2} = \sqrt{\frac{9}{64} + 1} \cdot AQ = \frac{\sqrt{73}}{8} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{730}}{3}.$$



Пусть точки B и M лежат по одну сторону от точки A (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому лучи AO и OQ совпадают и являются биссектрисой угла MAC Значит, прямоугольные треугольники AOM и AQH подобны с коэффициентом $\frac{OM}{QH} = \frac{3}{8/3} = \frac{9}{8}$. Тогда

$$OQ = AO - AQ = \frac{9}{8}AQ - AQ = \frac{1}{8} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{730}}{3}$, $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

20. C 5 № 500022. Найдите все значения a при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 + 2a + 2$ на множестве $|x| \geq 1$ не менее 6.

Решение.

Графиком функции $f(x)=(2x-a)^2+2a+2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина имеет координаты $\left(\frac{a}{2}, 2a+2\right)$. Значит, минимум функции $f(x)$ на всей числовой оси достигается в вершине при $x=\frac{a}{2}$.

На множестве $|x|\geq 1$ эта функция достигает наименьшего значения либо в точке $x=\frac{a}{2}$, если эта точка принадлежит множеству, либо в одной из граничных точек $x=\pm 1$.

Если наименьшее значение функции не меньше 6, то и всякое значение функции не меньше 6. В частности,

$$f(1)\geq 6 \Leftrightarrow\ a^2-2a+6\geq 6 \Leftrightarrow\ a(a-2)\geq 0,$$

$$f(-1)\geq 6 \Leftrightarrow a^2+6a+6\geq 6 \Leftrightarrow a(a+6)\geq 0,$$

откуда получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a(a-2)\geq 0, \\ a(a+6)\geq 0, \end{cases}$$

решениями которой являются $a\leq -6$, $a=0$, $a\geq 2$.

При $a\leq -6$ имеем: $\frac{a}{2}\leq -3$, значит, наименьшее значение функции достигается в точке $x=\frac{a}{2}$ и $f\left(\frac{a}{2}\right)=2a+2\leq -10$, что не удовлетворяет условию задачи.

При $a=0$ имеем: $\frac{a}{2}=0$, значит, наименьшее значение функции достигается в одной из граничных точек $x=\pm 1$, в которых значение функции не меньше 6.

При $a\geq 2$ имеем: $\frac{a}{2}\geq 1$, значит, наименьшее значение функции достигается в точке $x=\frac{a}{2}$ и $f\left(\frac{a}{2}\right)=2a+2\geq 6$, что удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a=0$, $a\geq 2$.

21. C 6 № 502298. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число *n,* выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число *n,* а остальные числа, равные *n,* стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Решение.

а) Задуманные числа 3, 3, 3, 3, 3 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $23 - 1 = 22$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 8 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части числа $\frac{47}{8}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 10 меньше, чем сумма двух восьмёрок, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $47 - 8 - 9 - 10 = 20$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 8, оставшиеся задуманные числа — это 10 и 10 или 20 (если бы 20 получалось как $8 + 12$ или $9 + 11$, то были бы выписаны числа 12 или 11, но их нет). Для задуманных чисел 8, 9, 10, 10, 10 и 8, 9, 10, 20 на доске будет записан набор, данный в условии. (Для чисел 8, 9, 10, 20 это можно проверить непосредственно, а для чисел 8, 9, 10, 10, 10 — заметить, что они будут давать точно те же суммы, что и числа 8, 9, 10, 20.)

Ответ: а) 3, 3, 3, 3,3; б) нет; в) 8, 9, 10, 10, 10 или 8, 9, 10, 20.