Вариант № 2887317

1. B 1 № 77339. Каждый день во время конференции расходуется 70 пакетиков чая. Конференция длится 6 дней. Чай продается в пачках по 50 пакетиков. Сколько пачек нужно купить на все дни конференции?

Решение.

На 6 дней конференции расходуется $70 \cdot 6 = 420$ пакетиков чая. Разделим 420 на 50:

$$\frac{420}{50} = 8\frac{2}{5}.$$

Значит, на все дни конференции нужно купить 9 пачек чая.

Ответ: 9.

2. B 2 № 77354. Магазин делает пенсионерам скидку на определенное количество процентов от цены покупки. Пакет кефира стоит в магазине 40 рублей. Пенсионер заплатил за пакет кефира 38 рублей. Сколько процентов составляет скидка для пенсионеров?

Решение.

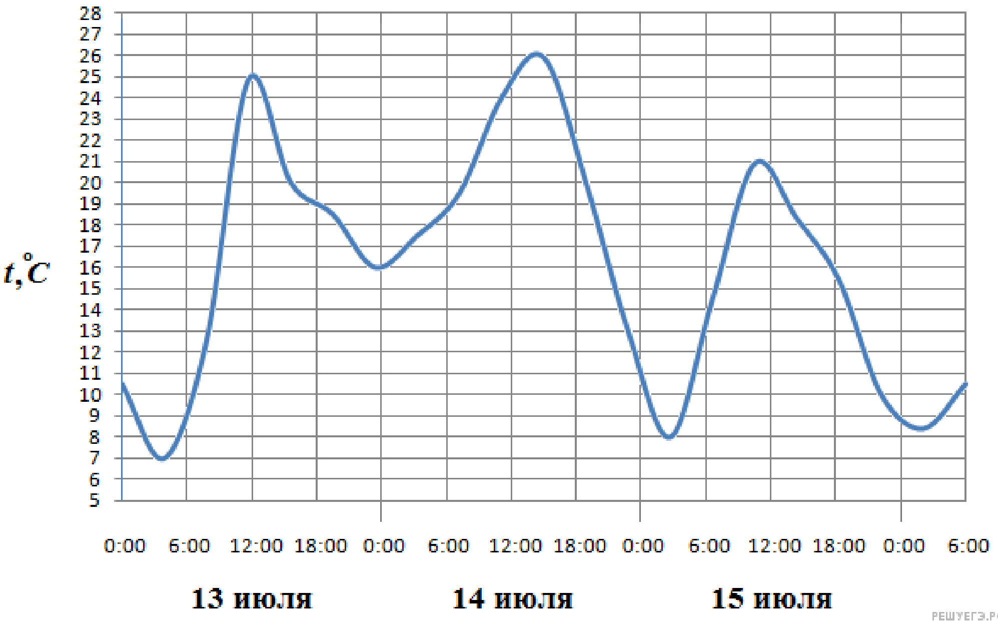
Магазин снизил цену на пакет кефира на $40 - 38 = 2$ рубля. Разделим 2 на 40:

$$\frac{2}{40} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Значит, скидка для пенсионеров составляет 5%.

Ответ: 5.

3. B 3 № 26870. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 15 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение.

Из графика видно, что 15 июля наибольшая температура составляла 21 °C, а наименьшая 8 °C. Их разность составляет 13 °C.

Ответ: 13.

4. B 4 № 26673. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	2,5 руб. за 1 Мб
План «500»	550 руб. за 500 Мб трафика в месяц	2 руб. за 1 Мб сверх 500 Мб
План «800»	700 руб. за 800 Мб трафика в месяц	1,5 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб

Пользователь предполагает, что его трафик составит 600 Мб в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 600 Мб?

Решение.

Рассмотрим все варианты.

По Плану «0» пользователь потратит $2{,}5 \cdot 600 = 1500$ руб. в месяц за 600 Мб трафика.

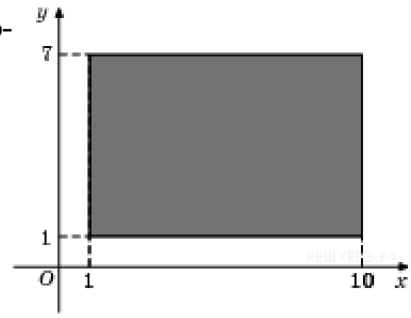
По плану «500» он потратит 550 руб. абонентской платы за 500 Мб и $2 \cdot 100 = 200$ руб. сверх того. Поэтому полная плата в месяц составит $550 + 200 = 750$ руб.

По плану «800» пользователь потратит в месяц за 600 Мб трафика 700 руб.

Наиболее выгодный вариант составляет 700 руб.

Ответ: 700.

5. B 5 № 27568. Найдите площадь прямоугольника, вершины которого имеют координаты (1;1), (10;1), (10;7), (1;7).



Решение.

Площадь прямоугольника равна произведению длины на ширину. Поэтому

$$S = 6 \cdot 9 = 54 \text{ см}^2.$$

Ответ: 54.

6. B 6 № 319355. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение.

Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: $0{,}52 \cdot 0{,}3 = 0{,}156$.

Ответ: 0,156.

7. B 7 № 77377. Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{3}=0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

Решение.

Решим уравнение:

$$\sin\frac{\pi x}{3}=0,5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi k;\\ \frac{\pi x}{3}=\frac{5\pi}{6}+2\pi k\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}+6k;\\ x=\frac{5}{2}+6k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Значениям $k\geq 2$ соответствуют большие положительные корни.

Если $k=1$, то $x=6,5$ и $x=8,5$.

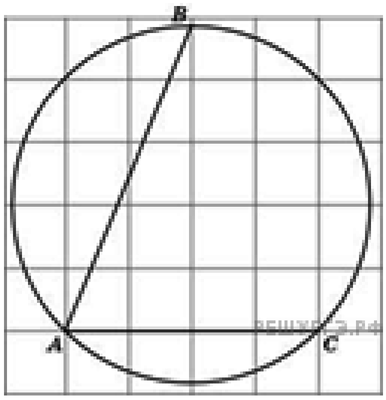
Если $k=0$, то $x=0,5$ и $x=2,5$.

Значениям $k\leq -2$ соответствуют меньшие значения корней.

Наименьшим положительным решением является 0,5.

Ответ: 0,5.

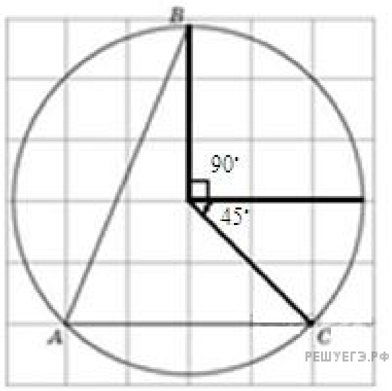
8. B 8 № 27891. Найдите градусную величину дуги BC окружности, на которую опирается угол BAC. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Дуга BC равна 90° и еще 45° (см. рис.). Всего 135°.

Ответ: 135.



9. B 9 № 119977. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-t^4+6t^3+5t+23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t=3$ с.

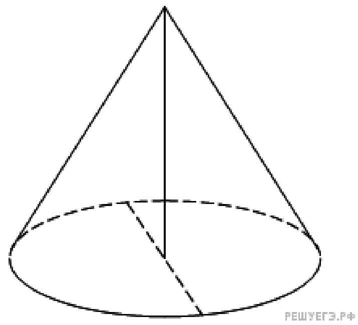
Решение.

Найдем закон изменения скорости: $v(t)=x'(t)=-4t^3+18t^2+5$ м/с. При $t=3$ имеем:

$$v(3)=-4\cdot 3^3+18\cdot 9+5=59 \text{ м/с.}$$

Ответ: 59.

10. B 10 № 906. Высота конуса равна 8, а диаметр основания — 30. Найдите образующую конуса.



Решение.
образующая конуса по теореме Пифагора равна

$$l=\sqrt{h^2+R^2_{\text{осн}}}=\sqrt{h^2+\left(\frac{D_{\text{осн}}}{2}\right)^2}=\sqrt{64+225}=17.$$

Ответ: 17.

11. B 11 № 77385. Найдите значение выражения $a\left(36a^2-25\right)\left(\frac{1}{6a+5}-\frac{1}{6a-5}\right)$ при $a=36,7$.

Решение.
Выполним действия в скобках:

$$\frac{1}{6a+5}-\frac{1}{6a-5}=\frac{6a-5-(6a+5)}{(6a+5)(6a-5)}=-\frac{10}{36a^2-25}.$$

Тогда

$$a\left(36a^2-25\right)\left(\frac{1}{6a+5}-\frac{1}{6a-5}\right)=a\left(36a^2-25\right)\frac{-10}{36a^2-25}=-10a=-367.$$

Ответ: -367.

12. B 12 № 27969. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры: $P=\sigma ST^4$, где $\sigma=5,7\cdot10^{-8}$ – постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S=\frac{1}{16}\cdot10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $9,12\cdot10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Решение.

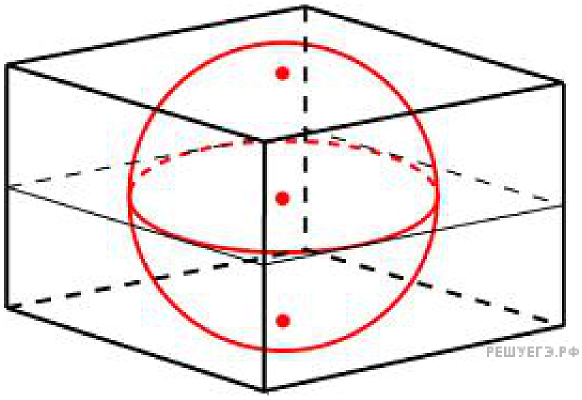
Задача сводится к нахождению наименьшего решения неравенства $P\geq9,12\cdot10^{25}$ при известном значениях постоянной $\sigma=5,7\cdot10^{-8}$ и заданной площади звезды $S=\frac{1}{16}\cdot10^{20}$:

$$P\geq9,12\cdot10^{25}\Leftrightarrow\sigma ST^4\geq9,12\cdot10^{25}\Leftrightarrow T^4\geq\frac{9,12\cdot10^{25}}{\sigma S}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T\geq\sqrt[4]{\frac{9,12\cdot10^{25}}{5,7\cdot10^{-8}\cdot\frac{1}{16}\cdot10^{20}}}\Leftrightarrow T\geq\sqrt[4]{256\cdot10^{12}}=4000\text{ К}.$$

Ответ: 4000.

13. B 13 № 27105. Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.



Решение.

Прямоугольный параллелепипед, описанный вокруг сферы, является кубом. Тогда длина его ребра

$$a = V^{\frac{1}{3}} = 6.$$

Радиус сферы равен половине длины ребра $r = 3$.

Ответ: 3.

14. B 14 № 26597. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба?

Решение.

Обозначим x — количество литров воды, пропускаемой первой трубой в минуту, тогда вторая труба пропускает $x+1$ литров воды в минуту. Резервуар объемом 110 литров первая труба заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба, отсюда имеем:

$$\frac{110}{x} - \frac{110}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{110}{x^2+x} = 1 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} 110 = x^2 + x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x - 110 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10; \\ x = -11 \end{array}\right. \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 10.$$

Таким образом, первая труба пропускает 10 литров воды в минуту.

Ответ: 10.

15. B 15 № 26720. Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^2 - 13x + 9\ln x + 8$ на отрезке $\left[\frac{13}{14}; \frac{15}{14}\right]$.

Решение.

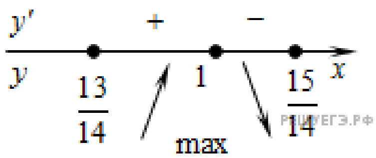
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 4x - 13 + \frac{9}{x}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 4x - 13 + \dfrac{9}{x} = 0, \\ \dfrac{13}{14} \le x \le \dfrac{15}{14} \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = \dfrac{18}{8}, \end{array}\right. \\ \dfrac{13}{14} \le x \le \dfrac{15}{14} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 1$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(1) = 2 \cdot 1 - 13 \cdot 1 + 9 \cdot 0 + 8 = -3.$$

Ответ: −3.

16. С 1 № 484546. Решите уравнение $(2\cos^2 x - \cos x)\sqrt{-11 \operatorname{tg} x} = 0.$

Решение.

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла. Поэтому данное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\cos^2 x - \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0, \\ \cos x \ne 0, \end{cases} \\ \operatorname{tg} x = 0. \end{array}\right.$$

Из уравнения $2\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$ получаем только $\cos x = \frac{1}{2}$, так как $\cos x \ne 0$. Решением уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ является $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Одно из которых лежит в первой четверти (и значит, для него неравенство $\operatorname{tg} x < 0$ не выполняется), а другое — в четвертой четверти (для него неравенство $\operatorname{tg} x < 0$ выполняется), значит решение только $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

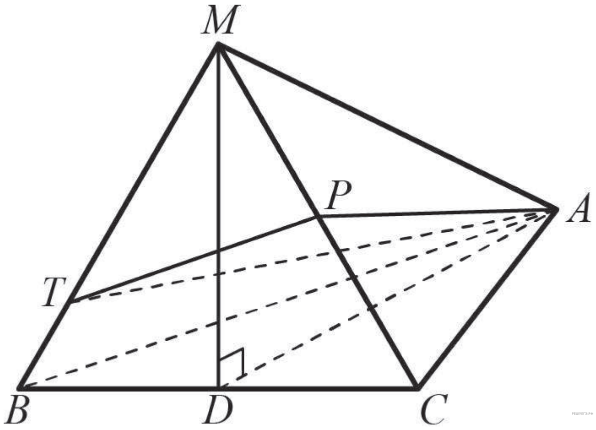
Теперь осталось решить второе уравнение совокупности $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

17. С 2 № 501555. Правильные треугольники ABC и MBC лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P — середина CM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 1 : 3$. Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

Решение.

Проведём высоту AD треугольника ABC. В тоже время AD — высота пирамиды $MPTA$, опущенная из вершины A на плоскость основания MPT.



$$AD = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Площадь треугольника MPT составляет $\frac{3}{8}S_{BCM}$. Следовательно,

$$S_{MPT} = \frac{3BC^2\sqrt{3}}{32} = \frac{3 \cdot 64\sqrt{3}}{32} = 6\sqrt{3}.$$

Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{MPT} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 24.$$

Ответ: 24.

Приведём другое решение:

$V_{MPTA} = \frac{1}{3}S_{MPT} \cdot AD$, где D — середина BC.

а) Поскольку AD — медиана треугольника ABC, AD — его высота. Поскольку $AD \perp BC$ и $AH \perp MH$ (т. к. по условию $(ABC) \perp (MBC)$), $AD \perp (ABC)$, т. е. является высотой пирамиды $MPTA$.

б) $S_{MPT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot S_{MBC} = \frac{3}{8} \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$.

в) $AD = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

г) $V_{MPTA} = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 24$.

Ответ: 24.

18. C 3 № 501753. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{4-x} \dfrac{-5-x}{x-4} \le -1, \\ \dfrac{x^2-5x+3}{x-4} + \dfrac{5x-27}{x-6} \le x+4. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x}\frac{-5-x}{x-4}\le -1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(5+x)-\log_{4-x}(4-x)\le -1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(x+5)\le 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<4-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+5)\le 0,\\ 0<4-x<1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+5\ge 1,\\ 3<x<4,\end{cases} \text{откуда } 3<x<4.$$

Второй случай: $4-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+5)\le 0,\\ 4-x>1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x+5\le 1,\\ x<3,\end{cases} \text{откуда } -5<x\le -4.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $x\in(-5,\,-4]\cup(3,4)$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^2-5x+3}{x-4}+\frac{5x-27}{x-6}\le x+4 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-4)}{x-4}-\frac{1}{x-4}+\frac{5(x-6)}{x-6}+\frac{3}{x-6}\le x+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-6}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{(x-4)(x-6)}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\in(-\infty,\,3]\cup(4,6)$.

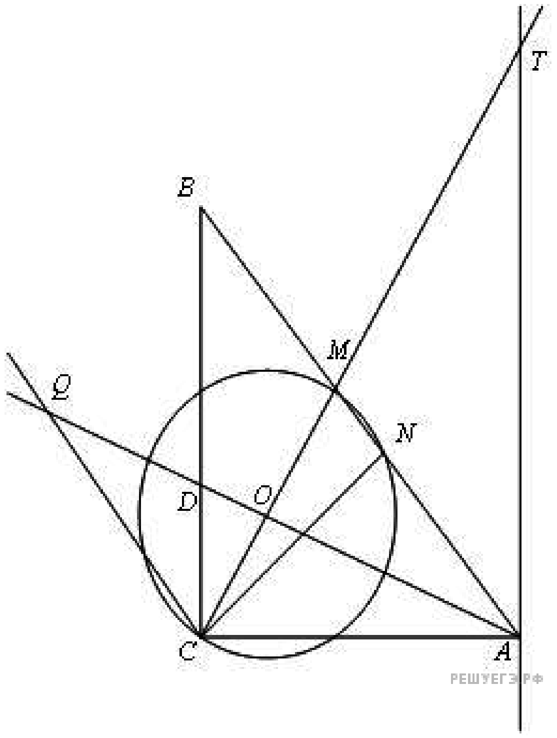
3. Решение исходной системы неравенств: $-5<x\le -4$.

Ответ: $(-5;\ -4]$.

19. C 4 № 485995. Дан треугольник ABC со сторонами $AB=25$, $AC=7$ и $BC=24$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD — точка O, причем $CD=8$ и $AO=3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

Решение.

Проведем через вершину A прямую, параллельную BC. Пусть T — точка ее пересечения с прямой CO, а M — точка пересечения AB и CT. Треугольник AOT подобен треугольнику DOC с коэффициентом $\frac{AO}{OD} = 3$, поэтому $AT = 3CD = 24$. Значит, треугольник AMT равен треугольнику BMC по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда M — середина AB. Следовательно, CM — медиана треугольника ABC.



Через вершину C проведем прямую, параллельную AB. Пусть Q — точка ее пересечения с прямой AO. Треугольник CDQ подобен треугольнику BDA с коэффициентом $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}$, поэтому $CQ = \frac{1}{2}AB = 12{,}5 = AM$. Тогда треугольники AMO и QCO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Поэтому O — середина CM.

Окружность с центром O проходит через точку C, и при этом $OM = OC$. Следовательно, OM — радиус этой окружности. Треугольник ABC прямоугольный, $CM = \frac{1}{2}AB = 12{,}5$, а точка M — одна из точек пересечения прямой AB и окружности. Пусть N — вторая точка пересечения окружности с прямой AB. Тогда угол CNM — вписанный и опирающийся на диаметр CM, так что $CN \perp AB$, то есть CN — высота треугольника ABC.

Отсюда $CN = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{24 \cdot 7}{25} = 6{,}72.$

Ответ: 12,5 или 6,72.

20. C 5 № 500965. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых на интервале $(1;2)$ существует хотя бы одно число x, **не** удовлетворяющее неравенству $a + \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leq 3x - x^2$.

Решение.

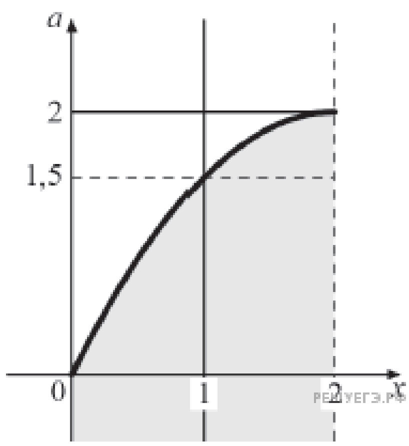
Преобразуем неравенство:

$$a+\sqrt{a^2-2ax+x^2}\le 3x-x^2;\quad |x-a|\le 3x-x^2-a;$$

$$\begin{cases} x-a\le 3x-x^2-a, \\ x-a\ge -3x+x^2+a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-2)\le 0, \\ a\le -\dfrac{1}{2}x^2+2x; \end{cases}$$

Неравенство $x(x-2)\le 0$ определяет на плоскости Oxa полосу, заключенную между прямыми $x=0$ и $x=2$. Неравенство $a\le -\dfrac{1}{2}x^2+2x$ задаёт часть плоскости, ограниченную сверху параболой.



На рисунке видно, что на интервале $(1;2)$ есть x, не удовлетворяющие неравенству, только если $a>1,5$.

Ответ: $(1,5;+\infty)$.

21. C 6 № 484661. Перед каждым из чисел 3, 4, 5, . . . 11 и 14, 15, . . . 18 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа обоих наборов взяты с плюсами, то сумма максимальна и равна

$$5(3+\ldots+1)+9(14+\ldots+18)=5\left(\frac{3+11}{2}\cdot 9\right)+9\left(\frac{14+18}{2}\cdot 5\right)=45\cdot 23=1035.$$

2. Так как сумма нечетная, число нечетных слагаемых в ней нечетно, причем это свойство суммы не меняется при изменении знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получены сумм будет не четной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$5(3+4+5+6+7-8-9+10+11)+9(14-15-16-17+18)=5\cdot 29+9\cdot(-16)=145-144=1.$$

Ответ: 1 и 1035.