Вариант № 2887324

1. B 1 № 77338. В общежитии института в каждой комнате можно поселить четырех человек. Какое наименьшее количество комнат необходимо для поселения 83 иногородних студентов?

Решение.

Разделим 83 на 4:

$$\frac{83}{4} = 20\frac{3}{4}.$$

Значит, для поселения 83 иногородних студентов необходима 21 комната.

Ответ: 21.

2. B 2 № 26645. Розничная цена учебника 180 рублей, она на 20% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 10 000 рублей?

Решение.

Розничная цена учебника составляет 120% от оптовой цены. Чтобы найти 100% цены разделим 180 на 1,2:

$$\frac{180}{1,2} = \frac{1800}{12} = \frac{300}{2} = 150.$$

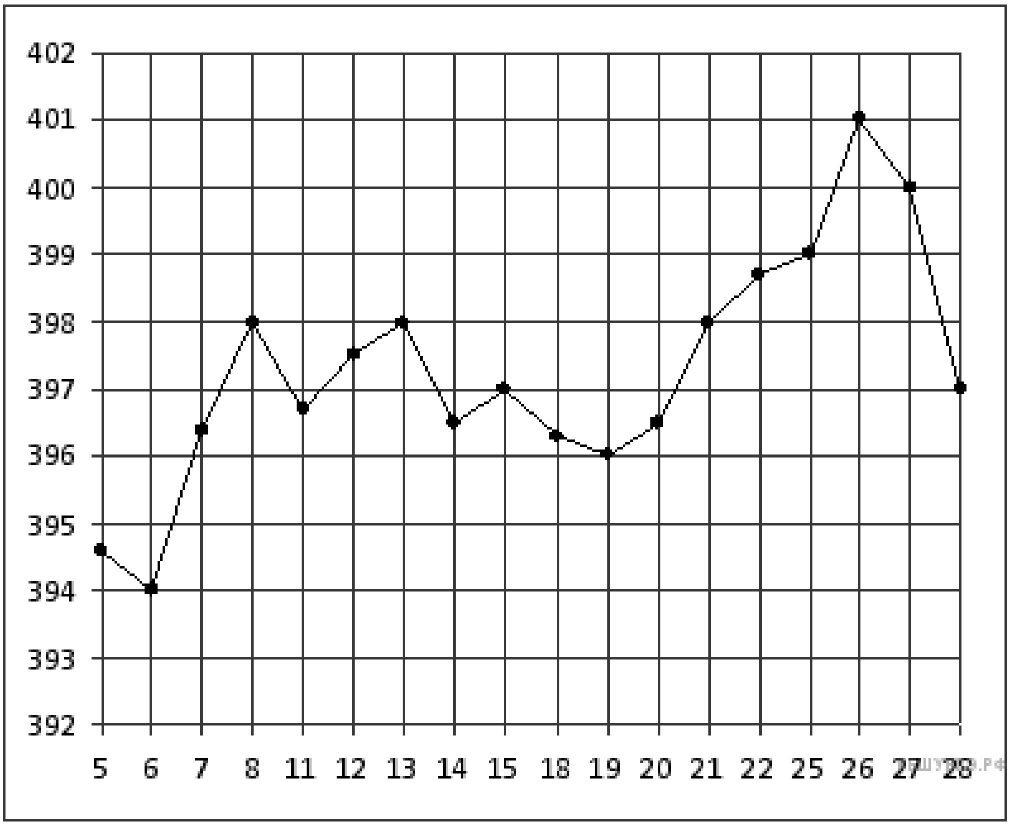
Поскольку

$$10000 : 150 = 66\frac{2}{3},$$

по оптовой цене на 10 000 рублей можно купить 66 учебников.

Ответ: 66.

3. B 3 № 26874. На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 5 по 28 марта 1996 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена золота на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



Решение.

Из графика видно, что наименьшей цена была 6 марта (см. рисунок).

Ответ: 6.

4. B 4 № 26679. Строительной фирме нужно приобрести 40 кубометров строительного бруса у одного из трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	**Цена бруса (руб. за 1 м^3)**	**Стоимость доставки**	**Дополнительные условия**
А	4200	10200	
Б	4800	8200	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	4300	8200	При заказе на сумму больше 200 000 руб. доставка бесплатно

Решение.

Рассмотрим все варианты.

При покупке у поставщика *А* стоимость заказа складывается из стоимости бруса $4200 \cdot 40 = 168\,000$ руб. и стоимости доставки: $168\,000 + 10\,200 = 178\,200$ руб.

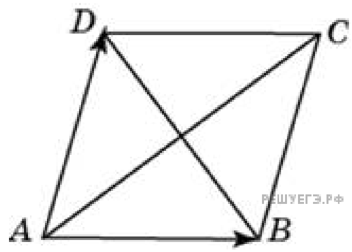
При покупке у поставщика *Б* стоимость бруса составляет $4800 \cdot 40 = 192\,000$ руб., что превышает 150 000 руб., поэтому доставка бесплатна. Таким образом, стоимость заказа 192 000 руб.

При покупке у поставщика *В* стоимость заказа складывается из стоимости бруса $4300 \cdot 40 = 172\,000$ руб. и стоимости доставки: $172\,000 + 8200 = 180\,200$ руб.

Стоимость самого дешевого варианта составляет 178 200 рублей.

Ответ: 178 200.

5. B 5 № 27714. Диагонали изображенного на рисунке ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AD}$.



Решение.

Длина вектора $\vec{AB} + \vec{AD}$ равна вектору $\vec{AC}$. Длина вектора $\vec{AC}$ равна 16.

Ответ: 16.

6. B 6 № 319353. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение.

Вероятность того, что стекло куплено на первой фабрике и оно бракованное: $0{,}45 \cdot 0{,}03 = 0{,}0135$.

Вероятность того, что стекло куплено на второй фабрике и оно бракованное: $0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}0055$.

Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $0{,}0135 + 0{,}0055 = 0{,}019$.

Ответ: 0,019.

7. B 7 № 77384. Найдите корень уравнения: $\frac{1}{4x-1} = 5$.

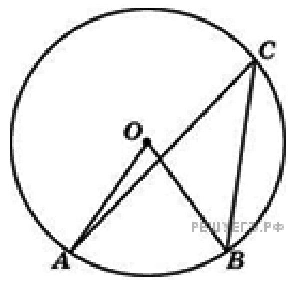
Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{1}{4x-1} = 5 \Leftrightarrow 4x - 1 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 4x = \frac{6}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3}{10}.$$

Ответ: 0,3.

8. B 8 № 27863. Центральный угол на 36° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности, значит

$$\angle ACB + 36^\circ = 2\angle ACB \Leftrightarrow \angle ACB = 36^\circ.$$

Ответ: 36.

9. B 9 № 119976. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 6$ с.

Решение.

Найдем закон изменения скорости:

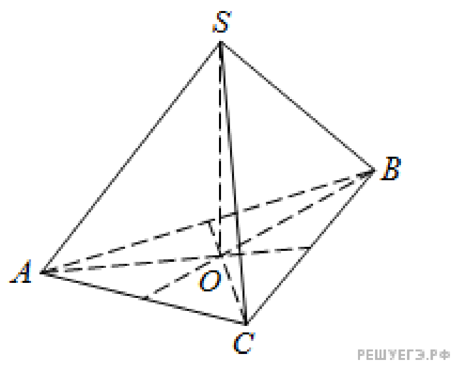
$$v(t) = x'(t) = \frac{3}{2}t^2 - 6t + 2 \text{ м/с}.$$

Тогда находим:

$$v(6) = \frac{3}{2} \cdot 36 - 6 \cdot 6 + 2 = 20 \text{ м/с}.$$

Ответ: 20.

10. B 10 № 901. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS.



Решение.

Отрезок OS высота треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO.$$

Таким образом,

$$SO = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9.$$

Ответ: 9.

11. B 11 № 26808. Найдите значение выражения $\left(4x^2 + y^2 - (2x - y)^2\right) : (2xy)$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{4x^2 + y^2 - (2x - y)^2}{2xy} = \frac{4x^2 + y^2 - 4x^2 + 4xy - y^2}{2xy} = \frac{4xy}{2xy} = 2.$$

Ответ: 2.

12. B 12 № 27976. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 – температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 – температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 15%, если температура холодильника $T_2 = 340$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

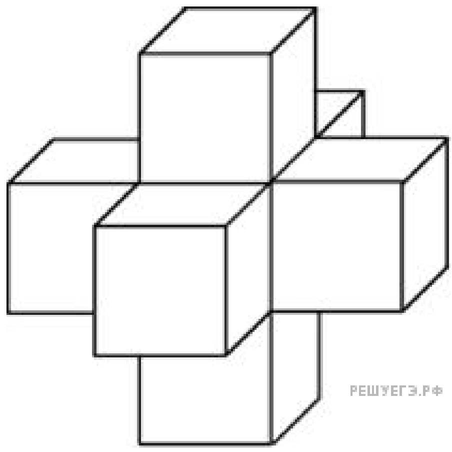
Решение.

Задача сводится к решению неравенства $\eta \geq 15$ при известном значении температуры холодильника $T_2 = 340$ К:

$$\eta \geq 15 \Leftrightarrow \frac{T_1 - 340}{T_1} \cdot 100 \ \geq 15 \Leftrightarrow 100T_1 - 34000 \geq 15T_1 \Leftrightarrow T_1 \geq 400 \text{ К}.$$

Ответ: 400.

13. B 13 № 27158. Найдите площадь поверхности пространственного креста, изображенного на рисунке и составленного из единичных кубов.



Решение.

Поверхности креста составлена из шести поверхностей кубов, у каждого из которых отсутствует одна грань. Тем самым, поверхность креста состоит из 30 единичных квадратов, поэтому ее площадь равна 30.

Ответ: 30.

14. B 14 № 26588. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть u км/ч — скорость течения, тогда скорость теплохода по течению равна $15+u$ км/ч, а скорость теплохода против течения равна $15-u$ км/ч. На весь путь теплоход затратил 40 – 10 = 30 часов, отсюда имеем:

$$\frac{200}{15-u}+\frac{200}{15+u}=30 \Leftrightarrow \frac{200\cdot 15\cdot 2}{225-u^2}=30 \Leftrightarrow \frac{200}{225-u^2}=1 \underset{0<u<15}{\Leftrightarrow} 200=225-u^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=5; \\ u=-5 \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u=5.$$

Таким образом, скорость течения реки равна 5 км/ч.

Ответ: 5.

15. B 15 № 77501. Найдите точку минимума функции $y=-\frac{x}{x^2+1}$.

Решение.

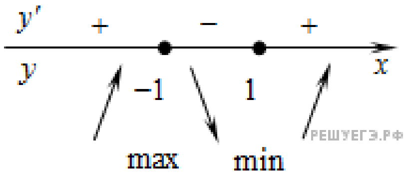
Найдем производную заданной функции:

$$y'=-\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=-\frac{\left(x^2+1\right)-x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=1$.

Ответ: 1.

16. C 1 № 484550. Решите систему уравнений $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\cos y}\cdot\sqrt{6x-x^2-8}=0, \\ \sqrt{\sin x}\cdot\sqrt{2-y-y^2}=0. \end{array}\right.$

Решение.

Рассмотрим первое уравнение. Из неравенства $6x - x^2 - 8 \geq 0$ получаем $2 \leq x \leq 4$.

Равенство нулю может достигаться в одном из двух случаев.

Первый случай. $6x - x^2 - 8 = 0$, тогда $x = 2$ или $x = 4$. Если $x = 4$, то $\sin x < 0$; если $x = 2$, то $\sin x > 0$. Из второго уравнения получаем $2 - y - y^2 = 0$, откуда $y = -2$ или $y = 1$. При $y = -2$ в первом уравнении $\cos y < 0$.

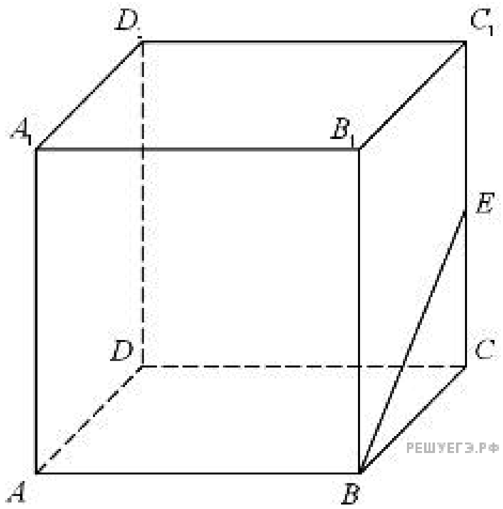
Второй случай. Если теперь $2 < x < 4$. Тогда $6x - x^2 - 8 > 0$, и поэтому из первого уравнения получаем: $\cos y = 0$.

Учтем, что $2 - y - y^2 \geq 0$. Тогда $-2 \leq y \leq 1$. Из всех решений уравнения $\cos y = 0$ этому условию удовлетворяет только $y = -\frac{\pi}{2}$. При этом $2 - y - y^2 > 0$ и, из второго уравнения получаем: $\sin x = 0$. Из всех решений этого уравнения интервалу $2 < x < 4$ принадлежит только $x = \pi$. Значит, $x = \pi, y = -\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $(x, y) \in \left\{(2, 1), \left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right)\right\}$.

17. C 2 № 500112. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BE и AD.

Решение.



Примем ребро куба за единицу. Тогда $CE = \frac{1}{2}$.

Прямая AD параллельна прямой BC, значит, искомый угол равен углу CBE.

Из прямоугольного треугольника CBE с прямым углом C имеем:

$$\operatorname{tg}\angle CBE = \frac{CE}{BC} = \frac{1}{2},$$

тогда

$$\angle CBE = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Ответ также может быть представлен в следующем виде: $\angle CBE = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$ или $\angle CBE = \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

18. C 3 № 500020. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3 \cdot 9^{-x} - 28 \cdot 3^{-x} + 9 \leq 0, \\ \log_{x^2}(x+1)^2 \leq 1. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 3^{-x}$.

$$3y^2 - 28y + 9 \leq 0; (3y-1)(y-9) \leq 0; \frac{1}{3} \leq y \leq 9.$$

Тогда $\frac{1}{3} \leq 3^{-x} \leq 9$, откуда находим решение первого неравенства системы: $-2 \leq x \leq 1$.

2. Решим второе неравенство системы. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2}(x+1)^2 \leq 1; (x+1)^2 \leq x^2; 2x+1 \leq 0; x \leq -\frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $x^2 > 1$, получаем: $x < -1$. Второй случай: $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2}(x+1)^2 \leq 1; (x+1)^2 \geq x^2; 2x+1 \leq 0; x \geq -\frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем $-\frac{1}{2} \leq x < 0; 0 < x < 1$.

Решение второго неравенства системы: $x < -1; -\frac{1}{2} \leq x < 0; 0 < x < 1$.

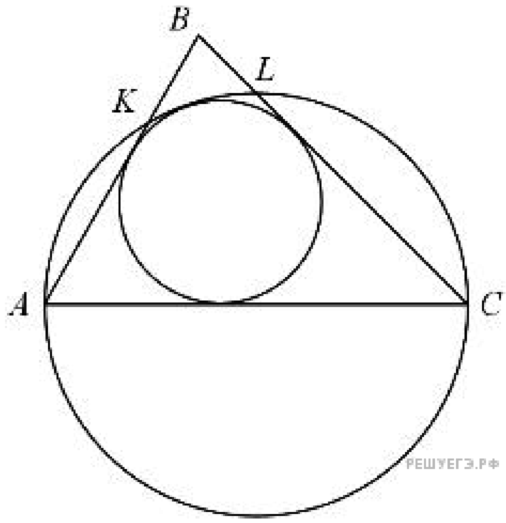
3. Решение исходной системы неравенств: $-2 \leq x < -1; -\frac{1}{2} \leq x < 0; 0 < x < 1$.

Ответ: $[-2;\ -1); \left[-\frac{1}{2};\ 0\right); (0;\ 1)$.

19. C 4 № 500369. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5,\ BC = 6,\ AC = 7$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BC и BA соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Решение.

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.



Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника. Четырехугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно,

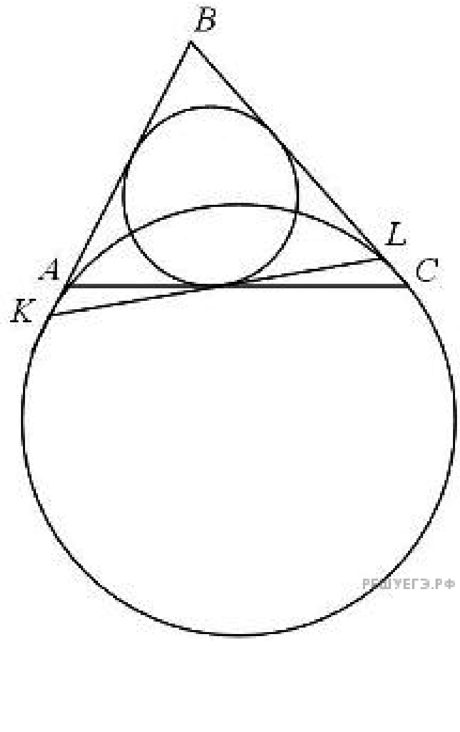
$$\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK.$$

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k, тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$. Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC;$$

$$AB(1-k) + BC(1-k) = AC(1+k) \Leftrightarrow k = \frac{AB+BC-AC}{AC+AB+BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \frac{5+6-7}{5+6+7} = \frac{2}{9}$. Следовательно, $KL = \frac{2}{9}AC = \frac{14}{9}$.



Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB. Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть, треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 7$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB.

Если точка L лежит на продолжении стороны BC, то $BL > BC$, но, аналогично предыдущему случаю, получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{14}{9}; 7.$

20. C 5 № 484646. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} x^2 - 2x + |y| - 15 = 0, \\ x^2 + (y-a)(y+a) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$
имеет ровно 6 решений.

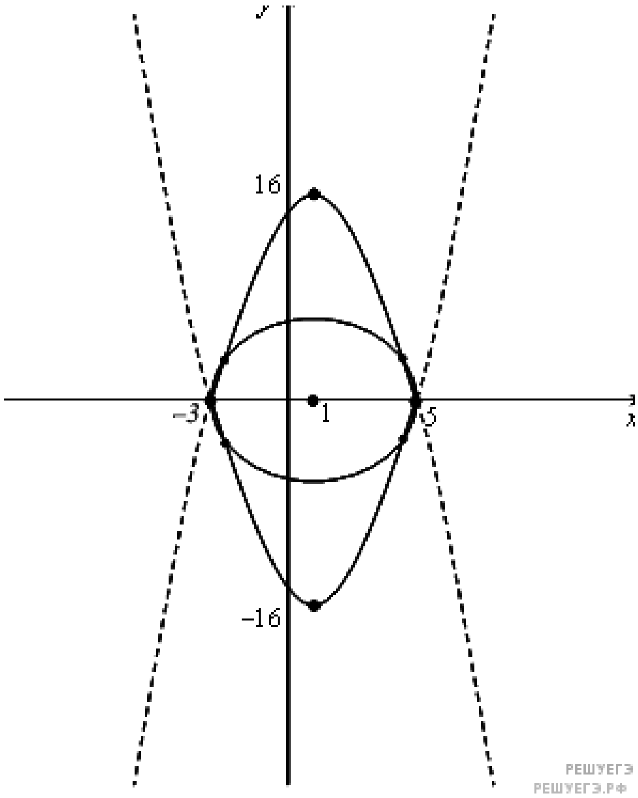
Решение.

Преобразуем систему: $\begin{cases} (x-1)^2+|y|=16, \\ (x-1)^2+y^2=a^2. \end{cases}$

Первое уравнение задает части двух парабол:

$y=\begin{cases} 16-(x-1)^2, \ y\geq 0, \\ (x-1)^2-16, \ y<0. \end{cases}$

(см. рисунок).



Второе уравнение задает окружность радиусом $|a|$ с центром $(1,0)$. На рисунке видно, что шесть решений системы получаются, только если окружность проходит через точки $(-3,0)$ и $(5, \ 0)$, пересекая параболу еще в четырех точках.

При этом радиус окружности равен 4, откуда $a=-4$ или $a=4$.

Ответ: $-4, 4$.

21. C 6 № 484665. Найдите несократимую дробь $\frac{p}{q}$ такую, что $\frac{p}{q}=\frac{1234567\overbrace{888...8}^{2000}7654321}{12345678\underbrace{999...9}_{1999}87654321}$.

Решение.

Пусть $a = 1234567888...87654321$, $b = 12345678999...987654321$, а $\text{НОД}(a, b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b. Тогда $p = \dfrac{a}{\text{НОД}(a, b)}$, $q = \dfrac{b}{\text{НОД}(a, b)}$.

Число a состоит из 2014 знаков, а число b — из 2015 знаков, а значит, b и $10a$ состоят из одинакового количества разрядов. Более того, рассмотрим разность $b - 10a$:

$$\begin{array}{r} _{-}\,12345678\overbrace{99...9}^{1999}87654321 \\ \underline{12345678\,88...8\,76543210} \\ \underbrace{11...1}_{1999}11111111 \end{array}$$

По свойствам наибольшего общего делителя $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b - 10a) = \text{НОД}(a, \underbrace{11...1}_{2007})$.

Заметим, что $a = \underbrace{11111111}_{8} \cdot \underbrace{11...1}_{2007}$, значит, число a кратно числу $\underbrace{11...1}_{2007}$.

Поэтому $\text{НОД}(a,b) = \underbrace{11...1}_{2007}$, и тогда $p = \dfrac{a}{\underbrace{11...1}_{2007}} = \underbrace{11...1}_{8}$, $q = \dfrac{b}{\underbrace{11...1}_{2007}} = \underbrace{11...1}_{9}$.

Ответ: $\dfrac{11111111}{111111111}$.