Вариант № 2887281

1. B 1 № 26632. Таксист за месяц проехал 6000 км. Стоимость 1 литра бензина — 20 рублей. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

Решение.

Средний расход бензина за месяц составил (6000 : 100) · 9 = 540 литров. Умножим 540 на 20:

$$540 \cdot 20 = 10\,800.$$

Значит, за месяц таксист потратил 10 800 рублей.

Ответ: 10 800.

2. B 2 № 26618. Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25% ?

Решение.

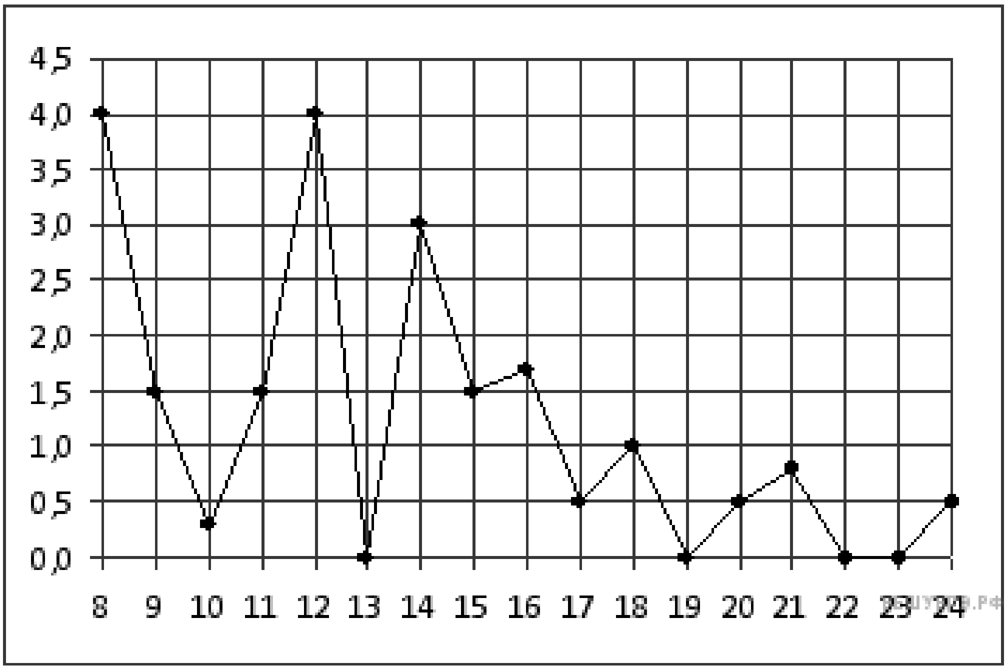
Во время распродажи шампунь станет стоить 160 − 0,25 · 160 = 120 рублей. Разделим 1000 на 120:

$$\frac{1000}{120} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}.$$

Значит, можно будет купить 8 флаконов шампуня.

Ответ: 8.

3. B 3 № 26876. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какое наибольшее количество осадков выпадало в период с 13 по 20 января. Ответ дайте в миллиметрах.



Решение.

Из графика видно, что наибольшее количество осадков в период с 13 по 20 января выпало 14 января и составляло 3 мм (см. рисунок).

Ответ: 3.

4. B 4 № 26675. Для остекления музейных витрин требуется заказать 20 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,25 м^2. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	300	17	
Б	320	13	
В	340	8	При заказе на сумму больше 2500 руб. резка бесплатно.

Решение.

Общая площадь стекла, которого нужно изготовить равна $20 \cdot 0{,}25 = 5$ м^2.

Стоимость заказа в фирме *А* складывается из стоимости стекла $300 \cdot 5 = 1500$ руб. и стоимости его резки и шлифовки $17 \cdot 20 = 340$ руб. Всего 1840 руб.

Стоимость заказа в фирме *Б* складывается из стоимости стекла $320 \cdot 5 = 1600$ руб. и стоимости его резки и шлифовки $13 \cdot 20 = 260$ руб. Всего 1860 руб.

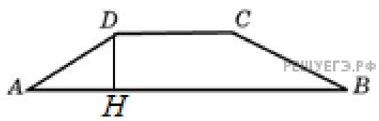
Стоимость заказа в фирме *В* складывается из стоимости стекла $340 \cdot 5 = 1700$ руб. и стоимости его резки и шлифовки $8 \cdot 20 = 160$ руб. Всего 1860 руб.

Стоимость самого дешевого заказа составляет 1840 рублей.

Ответ: 1840.

5. B 5 № 27637. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол 150°. Найдите площадь трапеции.

Решение.



$$S_{ABCD} = \frac{(AB+CD)\cdot DH}{2} = \frac{(AB+CD)AD\sin A}{2} =$$

$$= \frac{(AB+CD)\cdot AD\sin\angle ADC}{2} = \frac{24\cdot 7\cdot \frac{1}{2}}{2} = 42.$$

Ответ: 42.

6. B 6 № 285928. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая.

Решение.

Вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая, равна

$$\frac{9}{25} = 0,36.$$

Ответ: 0,36.

7. B 7 № 315119. Найдите корень уравнения $\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11}$.

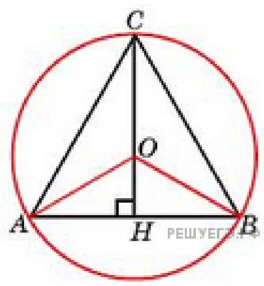
Решение.

Если две дроби с равным числителем равны, то равны их знаменатели. Имеем

$$\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 = 4x-11, \\ 4x-11 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ x \neq \frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Ответ:7.

8. B 8 № 27895. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 3. Найдите высоту этого треугольника.



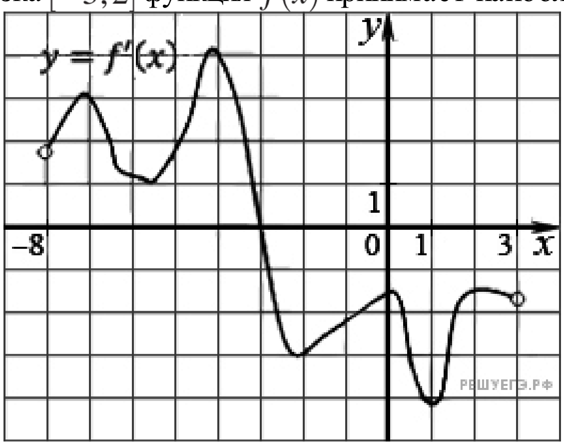
Решение.

треугольник ABC правильный, значит, все углы равны по $60°$.

$$CH = AC\sin A = 2R\sin B\sin A = 2\cdot 3\sin^2 60° = 6\cdot\frac{3}{4} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

9. B 9 № 27491. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. В какой точке отрезка $[-3;2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

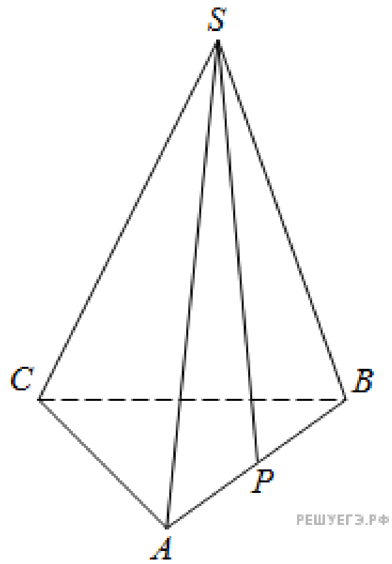


Решение.

На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке −3.

Ответ: −3.

10. B 10 № 923. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ P – середина ребра AB, S – вершина. Известно, что BC=5, а SP=6. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Решение.

Отрезок SP является медианой равнобедренного треугольника SAB, а значит, и его высотой. Тогда

$$S_{\text{бок}} = 3S_{SAB} = \frac{3}{2}AB \cdot SP = \frac{3}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 45.$$

Ответ: 45.

11. B 11 № 26803. Найдите $\frac{p(b)}{p(\frac{1}{b})}$, если $p\left(b\right) = \left(b + \frac{3}{b}\right)\left(3b + \frac{1}{b}\right)$ при $b \neq 0$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$p\left(\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{b} + 3b\right)\left(\frac{3}{b} + b\right) = p\left(b\right),$$

поэтому

$$\frac{p\left(b\right)}{p\left(\frac{1}{b}\right)} = 1.$$

Ответ: 1.

12. B 12 № 28004. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 20$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20 м?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $L \geq 20$ на интервале $(0°;\ \ 90°)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0 = 20$ м/с и ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2:

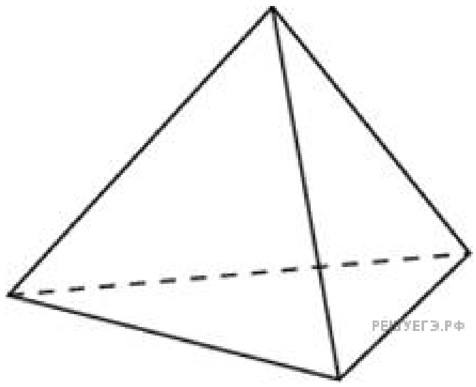
$$\frac{20^2}{10}\sin 2\alpha \geq 20 \Leftrightarrow \sin 2\alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30° + 360°n \leq 2\alpha \leq 150° + 360°n \underset{0°<2\alpha<180°}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{0°<2\alpha<180°}{\Leftrightarrow} 30° \leq 2\alpha \leq 150° \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 15° \leq \alpha \leq 75°.$$

Ответ: 15.

13. B 13 № 27085. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?



Решение.

Объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому если все ребра увеличить в 2 раза, объём увеличится в 8 раз.

Это же следует из формулы для объёма правильного тетраэдра $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, где a — длина его ребра.

Ответ: 8.

14. B 14 № 99601. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

Решение.

Пусть весь путь теплохода равен $2S$ км. Время в пути составляет 30 часов, из которых 5 часов – стоянка:

$$\frac{S}{25-3} + \frac{S}{25+3} = 30 - 5 \Leftrightarrow \frac{50S}{22 \cdot 28} = 25 \Leftrightarrow S = 308 \Leftrightarrow 2S = 616.$$

Ответ: 616.

15. B 15 № 77484. Найдите наименьшее значение функции $y = (x+3)^2 e^{-3-x}$ на отрезке $[-5; -1]$.

Решение.

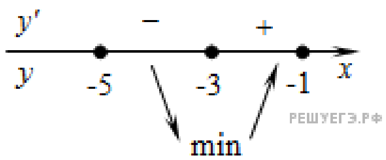
Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x+3)^2)'e^{-3-x} + ((x+3)^2)(e^{-3-x})' = (2(x+3))e^{-3-x} - ((x+3)^2)e^{-3-x} =$$
$$= (x+3)(2-x-3)e{-}3-x = -(x+1)(x+3)e^{-3-x}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} -(x+1)(x+3)e^{-3-x} = 0, \\ -5 \le x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -3 \end{array}\right. \\ -5 \le x \le -1. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -3$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(-3) = 0$.

Ответ: 0.

16. C 1 № 484542. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + \cos x = 0, \\ (5\sqrt{\cos x} - 1)(4y+5) = 0. \end{cases}$

Решение.

Из второго уравнения получаем:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{5}{4}, \\ \cos x \ge 0 \end{cases} \text{или} \cos x = \frac{1}{25}.$$

Если $y = -\frac{5}{4}$, то из первого уравнения $\cos x = \frac{5}{4}$. Уравнение не имеет решений. Если $\cos x = \frac{1}{25}$, то $x = \pm\arccos\frac{1}{25} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем: $y = -\frac{1}{25}$.

Ответ: $\left\{ \left(\arccos\frac{1}{25} + 2\pi n, -\frac{1}{25}\right), \left(-\arccos\frac{1}{25} + 2\pi n, -\frac{1}{25}\right) :\ n \in \mathbb{Z} \right\}$.

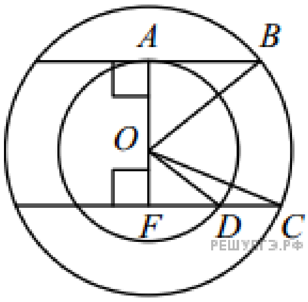
17. C 2 № 502115. Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 8. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

Решение.

Сечение шара плоскостью — круг. Рассмотрим сечение, проходящее через общий центр шаров и центры кругов. Обозначение центра, точки касания и точек пересечения поверхностей шаров с плоскостями α и β дано на рисунке.

FD — радиус круга, полученного в сечении меньшего шара плоскостью α, тогда $S_\alpha = \pi \cdot FD^2 = 8$ — площадь сечения меньшего шара плоскостью α.

AB — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью β, тогда $S_\beta = \pi \cdot AB^2 = 5$ — площадь сечения большего шара плоскостью β.



CF — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью α.

Параллельные прямые AB и CF перпендикулярны прямой AF. Из прямоугольных треугольников получаем:

$$OF^2 = OC^2 - CF^2 = OD^2 - FD^2,$$

откуда $CF^2 = OC^2 - OD^2 + FD^2 = OB^2 - OA^2 + FD^2 = AB^2 + FD^2$.

Площадь сечения большего шара плоскостью α:

$$S = \pi \cdot CF^2 = \pi \cdot AB^2 + \pi \cdot FD^2 = 13.$$

Ответ: 13.

18. C 3 № 500348. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 5^{x+2} + 2 \cdot 5^{-x} \leq 51, \\ \log_{2x} 0,25 \geq \log_2 32x - 1. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 5^x$.

$$25y + \frac{2}{y} \le 51 \Leftrightarrow \frac{25y^2 - 51y + 2}{y} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(y-2)(25y-1)}{y} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < 0, \\ \frac{1}{25} \le y \le 2. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $5^x > 0$, получаем: $\frac{1}{25} \le 5^x \le 2$, откуда находим решение первого неравенства системы: $x \in [-2, \log_5 2]$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{1}{\log_{0,25} 2x} \ge \log_2 32x - 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{\log_2 x + 1} \ge \log_2 x + 4.$$

Сделаем замену $z = \log_2 x$.

$$-\frac{2}{z+1} \ge z + 4 \Leftrightarrow \frac{z^2 + 5z + 6}{z+1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(z+2)(z+3)}{z+1} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z \le -3 \\ -2 \le z < -1. \end{array}\right.$$

Тогда $\log_2 x \le -3$ или $-2 \le \log_2 x < -1$, откуда находим решение второго неравенства системы: $x \in \left(0, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

3. Поскольку $\frac{1}{4} < \log_5 2 < \frac{1}{2}$, получаем решение исходной системы неравенств.

Ответ: $\left(0, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \log_5 2\right]$.

19. C 4 № 500590. В треугольник ABC известны стороны: $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 9$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Решение.

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 1).

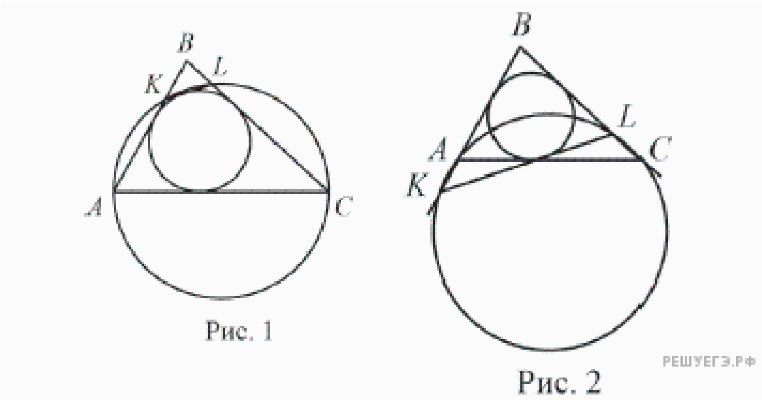
Четырёхугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно, $\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK$.

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k, тогда $BL = kAB$, $BK = kAB$, $KL = kAC$.

Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника $AKLC$ равны:

$AK + LC = KL + AC$; $AB(1-k) + BC(1-k) = AC(1+k)$; $k = \dfrac{AB+BC-AC}{AC+AB+BC}$.

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \dfrac{6+8-9}{6+8+9} = \dfrac{5}{23}$. Следовательно, $KL = \dfrac{5}{23}$, $AC = \dfrac{45}{23}$



Ответ: $\dfrac{45}{23}$, 9.

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рис. 2). Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK. так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1. то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 9$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB.

Если точка L лежит на продолжении стороны BC, то $BL > BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

20. C 5 № 484641. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 4|y-3| = 12 - 3|x|, \\ y^2 - a^2 = 3(2y-3) - x^2 \end{cases}$ имеет ровно четыре решения.

Решение.

Преобразуем данную систему:

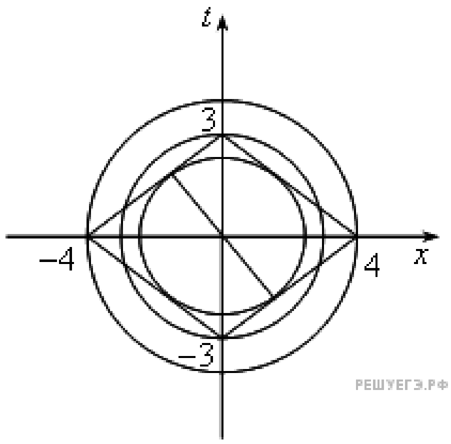
$$\begin{cases} 3|x|+4|y-3|=12, \\ x^2+y^2-6y+9=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|x|+4|y-3|=12, \\ x^2+(y-3)^2=a^2. \end{cases}$$

Сделав замену переменной $t=y-3$, получаем систему

$$\begin{cases} 3|x|+4|t|=12, & (1) \\ x^2+t^2=a^2. & (2) \end{cases}$$

Заметим, что количество решений полученной системы совпадает с количеством решений исходной системы. Построим графики уравнений (1) и (2) в системе координат Oxt.

График первого уравнения — ромб, диагонали которого, равные 8 и 6, лежат соответственно на осях Ox и Ot, а графиком второго уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом $r=\ |a|$ (см. рисунок).



Графики уравнений системы имеют ровно четыре общих точки, и, следовательно, система имеет ровно четыре решения, тогда и только тогда, когда окружность либо вписана в ромб, либо ее радиус удовлетворяет условию

$$3<r<4.$$

В первом случае радиус окружности является высотой прямоугольного треугольника с катетами, равными 3 и 4, откуда

$$r=|a|=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}, a=\pm\frac{12}{5}.$$

Во втором случае получаем $3<|a|<4$, откуда

$$-4<a<-3 \text{ или } 3<a<4.$$

Ответ: $a\in\left\{\pm\frac{12}{5}\right\}\cup(-4,-3)\cup(3,4)$.

21. C 6 № 484659. Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены возрастающей последовательности натуральных чисел a_n. В результате получилось рациональное число, которое выражается несократимой дробью, знаменатель которой меньше 100. Найдите наименьшее возможное значение a_3.

Решение.

Наименьшее возможное значение третьего члена возрастающей последовательности натуральных чисел $a_3 = 3$, причем только если $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. То есть если десятичная дробь начинается так:

$$0,123\ldots \text{ (четвертая цифра не 0).}$$

Заметим, что таким образом начинается, например, число

$$m = 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3} + \ldots + n\cdot 10^{-n} + \ldots$$

Найдем число m и проверим, удовлетворяет ли оно условиям задачи. Для этого запишем сумму подробнее.

$$\begin{aligned} m = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \ldots + 10^{-n} + \ldots \\ \ldots + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \ldots + 10^{-n} + \ldots \\ \ldots + 10^{-3} + 10^{-4} + \ldots + 10^{-n} + \ldots \\ \ldots + 10^{-4} + \ldots + 10^{-n} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots + 10^{-n} + \ldots \end{aligned}$$

В каждой строчке — сумма геометрической прогрессии со знаменателем 10^{-1}.

По формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем:

$$\begin{aligned} m = 10^{-1}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + 10^{-2}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + \ldots + 10^{-n}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + \ldots = \\ = \frac{10}{9}\left(10^{-1} + 10^{-2} + \ldots + 10^{-n} + \ldots\right) = \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{10}{81}. \end{aligned}$$

Получается, что m — рациональное число, и оно представляется дробью со знаменателем 81, что меньше ста. Число m удовлетворяет условию задачи и для этого числа $a_3 = 3$.

Ответ: 3.