# Вариант № 2887332

**1. B 1 № 24655.** В университетскую библиотеку привезли новые учебники по геометрии для 2—3 курсов, по 280 штук для каждого курса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 7 полок, на каждой полке помещается 30 учебников. Сколько шкафов можно полностью заполнить новыми учебниками?

**Решение.**

Всего привезли $280 \cdot 2 = 560$ учебников по геометрии. В книжном шкафу помещается $30 \cdot 7 = 210$ учебников. Разделим 560 на 210:

$$\frac{560}{210} = \frac{56}{21} = 2\frac{2}{3}.$$

Значит, полностью можно будет заполнить 2 шкафа.

Ответ: 2.

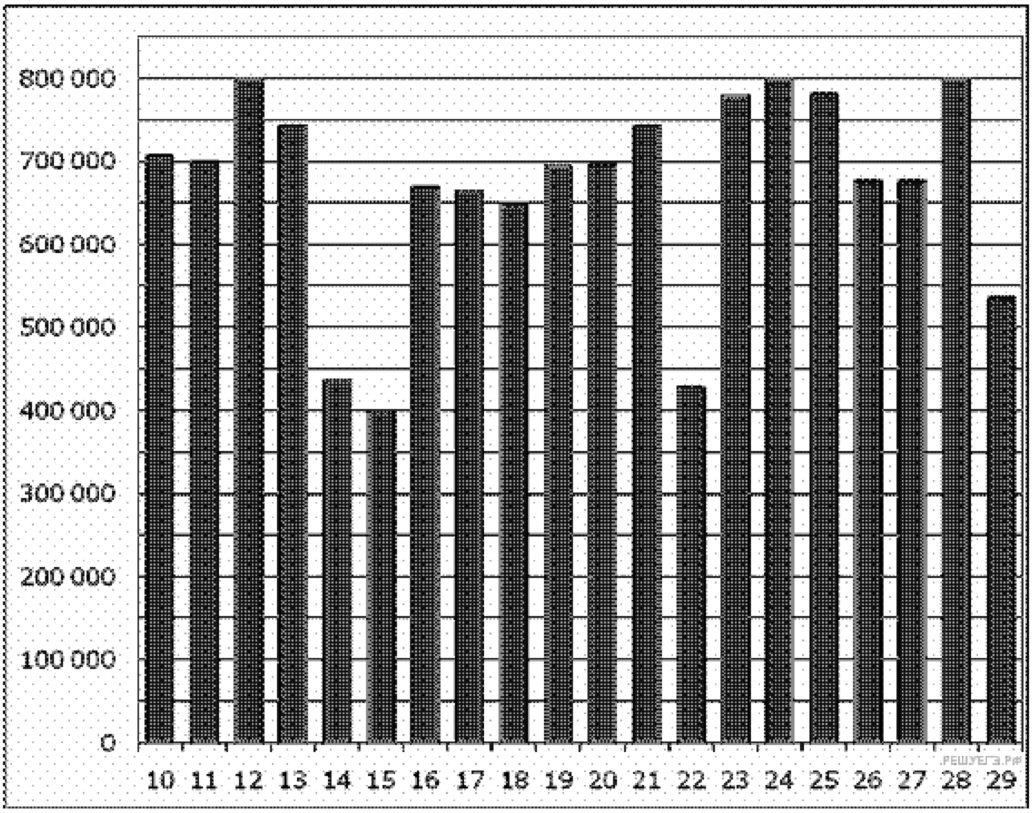
**2. B 2 № 77347.** В школе 800 учеников, из них 30% — ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 20% изучают немецкий язык. Сколько учеников в школе изучают немецкий язык, если в начальной школе немецкий язык не изучается?

**Решение.**

Учеников начальной школы $800 \cdot 0{,}3 = 240$, а учеников средней и старшей школы — $800 - 240 = 560$. Значит, немецкий язык в школе изучают $560 \cdot 0{,}2 = 112$ учеников.

Ответ: 112.

**3. B 3 № 28762.** На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, какого числа количество посетителей сайта РИА Новости было наименьшим за указанный период.



**Решение.**

Из диаграммы видно, что наименьшим количество посетителей было 15 ноября (см. рисунок).

Ответ: 15.

**4. B 4 № 316048.** Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг $R$ бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены $P$, показателей функциональности $F$, качества $Q$ и дизайна $D$. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

| **Модель мясорубки** | **Средняя цена** | **Функциональность** | **Качество** | **Дизайн** |
|---|---|---|---|---|
| А | 4600 | 2 | 0 | 2 |
| Б | 5500 | 4 | 3 | 1 |
| В | 4800 | 4 | 4 | 4 |
| Г | 4700 | 2 | 1 | 4 |

**Решение.**

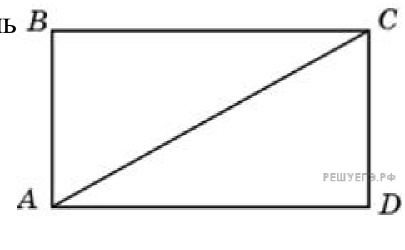
Рассмотрим все варианты.

Модель А: $R = 4(4+0+2) - 46 = -22.$
Модель Б: $R = 4(8+6+1) - 55 = 5.$
Модель В: $R = 4(8+8+4) - 48 = 32.$
Модель Г: $R = 4(4+2+4) - 47 = -7.$

Тем самым, наивысший рейтинг имеет модель В, он равен 32.

Ответ: 32.

**5. B 5 № 27605.** Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 10. Найдите площадь этого прямоугольника.



**Решение.**

Периметр прямоугольника равен сумме длин его сторон. Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину. Пусть одна из сторон прямоугольника равна $a$, вторая равна $b$. Периметр прямоугольника будет соответственно равен $P = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 28$. Диагональ образует в прямоугольнике два прямоугольных треугольника. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = 100$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} a+b=14, \\ a^2+b^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ (a+b)^2-(a^2+b^2)=196-100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ 2ab=96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=14, \\ ab=48. \end{cases}$$

Тем самым, $S = a \cdot b = 48$.

Ответ: 48.

**6. B 6 № 320169.** Вася, Петя, Коля и Лёша бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

**Решение.**

Жребий начать игру может выпасть каждому из четырех мальчиков. Вероятность того, что это будет именно Петя, равна одной четвертой.

Ответ: 0,25.

**7. B 7 № 26649.** Найдите корень уравнения $\log_2(15+x) = \log_2 3$.

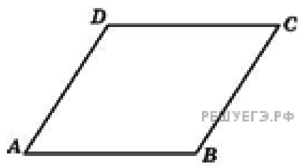
**Решение.**

Последовательно получаем:

$$\log_2(15+x) = \log_2 3 \Leftrightarrow 15+x=3 \Leftrightarrow x=-12.$$

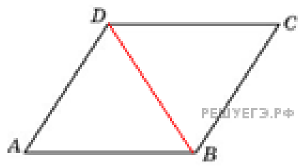
Ответ: −12.

**8. B 8 № 27816.** Найдите меньшую диагональ ромба, стороны которого равны 2, а острый угол равен $60^\circ$.

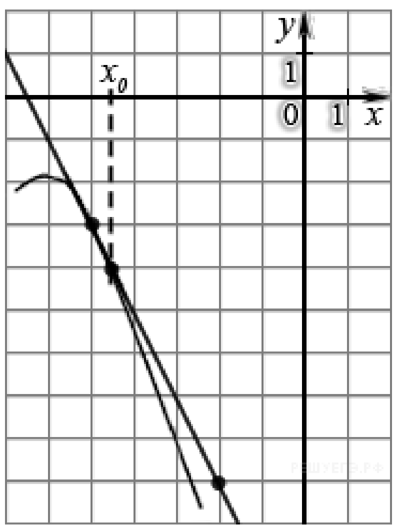



**Решение.**

меньшая диагональ ромба лежит против острого угла. Треугольник $ADB$ – равнобедренный. Угол при вершине $A$ равен $60^\circ$, значит, треугольник $ADB$ – равносторонний. Диагональ равна 2.

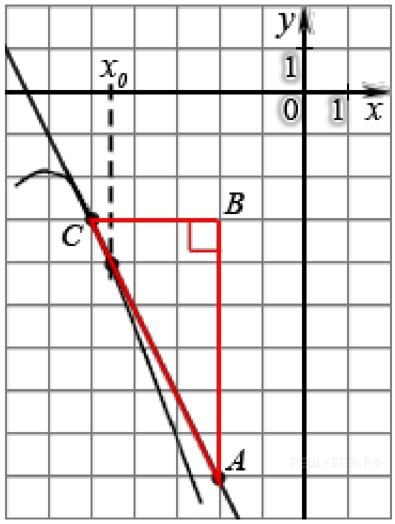



**9. B 9 № 27505.** На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке $x_0$.



**Решение.**

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A$ (−2; −9), $B$ (−2; −3), $C$ (−5; −3). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом $ACB$. Поэтому



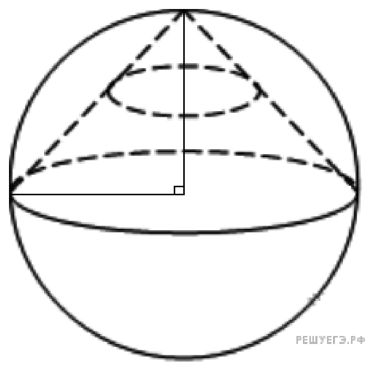

$$y'(x_0) = \mathrm{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\mathrm{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{6}{3} = -2.$$

Ответ: -2.

**10. B 10 № 316556.** Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

**Решение.**

Высота конуса перпендикулярна основанию и равна радиусу сферы. Тогда по теореме Пифагора получаем:



$$l^2 = r^2 + r^2 \Leftrightarrow l = r\sqrt{2}.$$

Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$, поэтому образующая равна $28\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 56.$

Ответ:56.

**11. B 11 № 26896.** Найдите значение выражения $\dfrac{\log_6\sqrt{13}}{\log_6 13}$.

**Решение.**

Выполним преобразования:

$$\frac{\log_6\sqrt{13}}{\log_6 13} = \frac{\frac{1}{2}\log_6 13}{\log_6 13} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

**12. B 12 № 27988.** Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление $P$ (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P = \dfrac{4mg}{\pi D^2}$, где $m = 1200$ кг – общая масса навеса и колонны, $D$ – диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$, а $\pi = 3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 400 000 Па. Ответ выразите в метрах.

**Решение.**

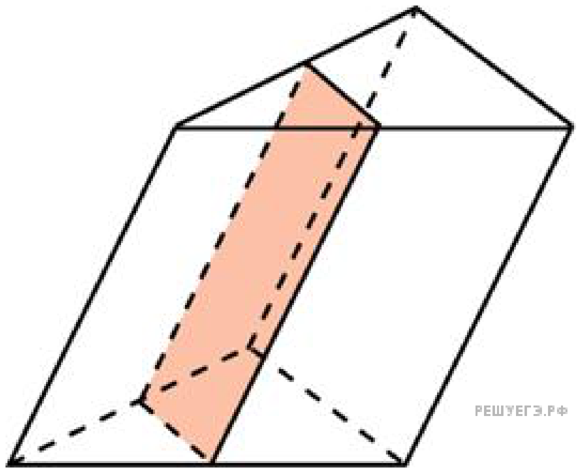
Найдем, при котором диаметре колонны давление, оказываемое на опору, станет равным 400 000 Па. Задача сводится к решению уравнения $\frac{4mg}{\pi D^2} = 400000$ при заданном значении массы навеса и колонны $m = 1200$ кг:

$$\frac{4 \cdot 1200 \cdot 10}{3 \cdot D^2} = 400000 \Leftrightarrow \frac{1}{D^2} = 25 \Leftrightarrow D^2 = \frac{1}{25} \underset{D>0}{\Leftrightarrow} D = \frac{1}{5} \Leftrightarrow D = 0,2.$$

Если диаметр колонны будет меньше найденного, то давление, оказываемое на опору, будет больше 400 000 Па, поэтому наименьший возможный диаметр колонны равен 0,2 м.

Ответ: 0,2.

**13. B 13 № 27106.** Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.




**Решение.**

Площадь основания отсеченной части меньше площади основания всей призмы в 4 раза (так как и высота и основание треугольника уменьшились в 2 раза). Высота осталась прежней, следовательно, объем уменьшился в 4 раза.

Ответ: 8.

**14. B 14 № 26593.** Заказ на 156 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий, если известно, что он за час делает на 1 деталь больше?

**Решение.**

Обозначим $n$ – число деталей, которые изготавливает за час первый рабочий, тогда второй рабочий за час изготавливает $n - 1$ деталь, $n > 1$. На изготовление 156 деталей первый рабочий тратит на 1 час меньше, чем второй рабочий, отсюда имеем:

$$\frac{156}{n-1} - \frac{156}{n} = 1 \Leftrightarrow \frac{156}{n^2 - n} = 1 \underset{n>1}{\Leftrightarrow} 156 = n^2 - n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 156 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 13; \\ n = -12 \end{array}\right. \underset{n>1}{\Leftrightarrow} n = 13.$$

Ответ: 13.

**15. B 15 № 77423.** Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

**Решение.**

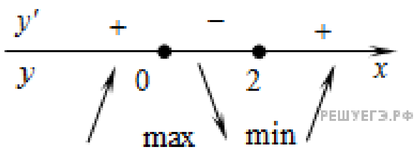
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

Найдем нули производной:

$$3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:




Искомая точка максимума $x = 0$.

Ответ: 0.

**16. С 1 № 501483.** а) Решите уравнение: $36^{\sin 2x} = 6^{2\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

**Решение.**

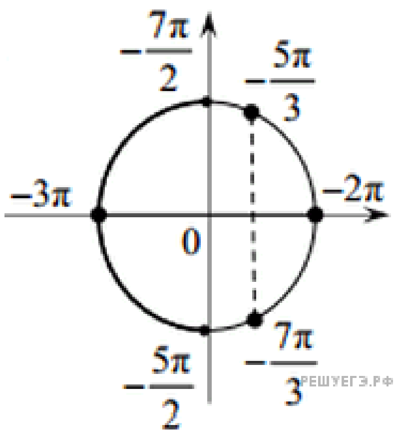
а) Запишем уравнение в виде:

$$36^{\sin 2x} = 6^{2\sin x};\ 2\sin x \cos x = \sin x;\ \sin x \cdot (2\cos x - 1) = 0.$$

Значит, или $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим число $-3\pi$.




*Замечание.* Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

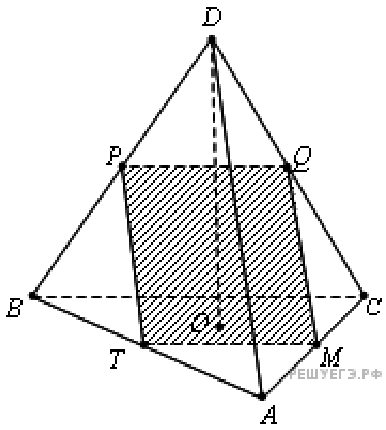
Ответ: а)$\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

б) $-3\pi$.

**17. С 2 № 484574.** Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной $D$. Сторона основания пирамиды равна $\sqrt{6}$, высота равна $\sqrt{30}$. Найдите расстояние от середины бокового ребра $BD$ до прямой $MT$, где точки $M$ и $T$ — середины ребер $AC$ и $AB$ соответственно.

**Решение.**

Пусть $Q$ — середина ребра $CD$, $P$ — середина ребра $BD$. По теореме о средней линии треугольника $TP||AD||MQ$; следовательно, точки $M$, $T$, $P$, $Q$ лежат в одной плоскости.




$TP = \frac{1}{2}AD = MQ$, следовательно, точки $M$, $T$, $P$, $Q$ являются вершинами параллелограмма. Кроме того, $PQ||BC$, а по теореме о трёх перпендикулярах (так как $AO \perp BC$), поэтому этот параллелограмм — прямоугольник. Значит, искомое расстояние есть длина отрезка $PT$. Отрезок $AO$ равен $AB/\sqrt{3} = \sqrt{2}$.

По теореме Пифагора

$$AD = \sqrt{AO^2 + DO^2} = 4\sqrt{2}; \text{ а } PT = \frac{1}{2}AD = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $2\sqrt{2}$.

**18. C 3 № 500194.** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{9^x - 3^x - 90}{3^x - 82} \leq 1, \\ \log_2 16x \geq \log_{0,5x} 2 \cdot \log_4 16x^4. \end{cases}$$

**Решение.**

1. Решим первое неравенство системы.

Сделаем замену $y = 3^x$.

$$\frac{y^2-y-90}{y-82} \le 1 \Leftrightarrow \frac{y^2-2y-8}{y-82} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(y-4)(y+2)}{y-82} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \le -2, \\ 4 \le y < 82. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $3^x > 0$, получаем: $4 \le 3^x < 82$, откуда находим решение первого неравенства системы $\log_3 4 \le x < \log_3 82$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\log_2 16x \ge \frac{\log_4 16x^4}{\log_2 0,5x} \Leftrightarrow \log_2 x + 4 \ge \frac{2\log_2 x + 2}{\log_2 x - 1}.$$

Сделаем замену $z = \log_2 x$.

$$z+4 \ge \frac{2z+2}{z-1} \Leftrightarrow \frac{z^2+z-6}{z-1} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le z < 1, \\ z \ge 2. \end{array}\right.$$

Тогда $-3 \le \log_2 x < 1$ или $\log_2 x \ge 2$, откуда находим решение второго неравенства системы: $x \in \left[\frac{1}{8}, 2\right) \cup [4, +\infty)$.

3. Поскольку $1 < \log_3 4 < 2$ и $\log_3 82 > 4$, получаем решение исходной системы неравенств.

Ответ: $x \in [\log_3 4, 2) \cup [4, \log_3 82)$.

**19. C 4 № 501712.** Окружности радиусов 11 и 21 с центрами $O_1$ и $O_2$ соответственно касаются внешним образом в точке $C$, $AO_1$ и $BO_2$ — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$. Найдите $AB$.

**Решение.**

Точки $O_2$, $O_2$ и $A$ лежат на одной прямой. Поскольку треугольники $KO_1L$ и $KO_1L$ равнобедренные,

$$KL2$$

откуда
$AB = 2O_1A \cdot \cos 15^o = 6 \cdot \cos 15^o$, $AC = 2O_2 \cdot \cos 15^o = 10 \cdot \cos 15^o$.

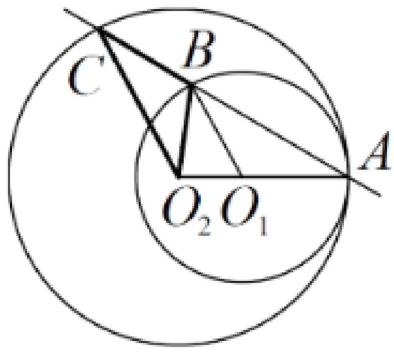


Рис. 1

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка $B$ лежит между точками $A$ и $C$, откуда $BC = AC - AB = 4 \cdot \cos 15^o$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = 10 \cdot \cos 15^o \cdot \sin 15^o = 2,5.$$

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка $A$ лежит между точками $B$ и $C$, откуда $BC = AC + AB = 16 \cdot \cos 15^o$.

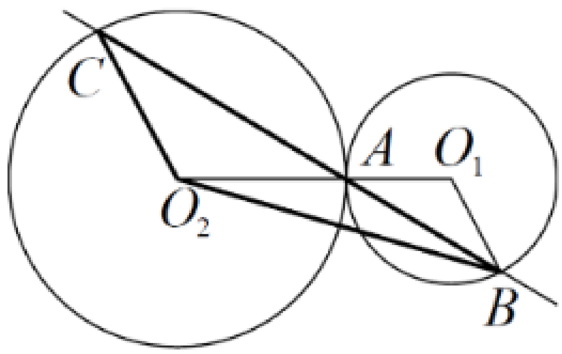


Рис. 2

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = 40 \cdot \cos 15^o \cdot \sin 15^o = 10.$$

Ответ: 2,5 или 10.

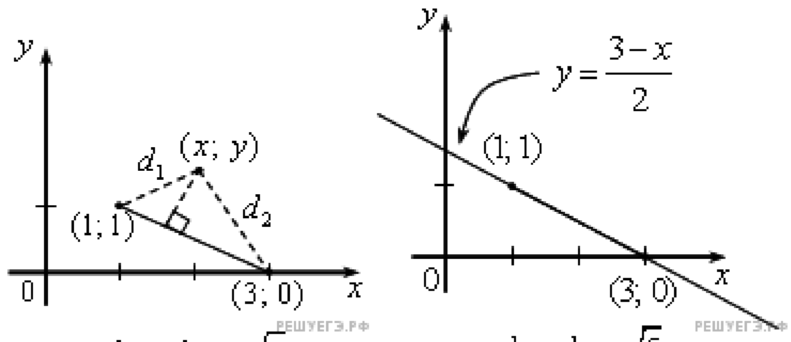
**20. C 5 № 484640.** При каждом $a$ решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32a\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+a^2+2-2x-2a} + \sqrt{x^2+a^2-6x+9} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

**Решение.**

Запишем второе уравнение в виде

$$\sqrt{(x-1)^2+(a-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+a^2}=\sqrt{5}.$$

Геометрический смысл уравнения состоит в том, что сумма расстояний от точек $(x;\ a)$ до точек $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$ равно $\sqrt{5}$. Поскольку расстояние между точками $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$ тоже равно $\sqrt{5}$, это означает, что точка $(x;\ a)$ должна лежать на отрезке, соединяющем точки $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$. Другими словами, она удовлетворяет уравнению $a=\dfrac{3-x}{2}$ и условию $x\in[1;\ 3]$.




$d_1+d_2>\sqrt{5}$ $\qquad$ $d_1+d_2=\sqrt{5}$

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases}2^{1+x}=32a\sqrt{2},\\ 2a=3-x,\ x\in[1;\ 3].\end{cases}$$

Подставив $2a$ в первое уравнение, получаем

$$2^{1+x}=16(3-x)\sqrt{2}\Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}}=3-x\Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}}+x=3.$$

Поскольку функция $y=2^{x-\frac{7}{2}}+x$ возрастающая (как сумма двух возрастающих), каждое значение она принимает ровно один раз. Поэтому решение $x=\dfrac{5}{2}$ — единственное, ему соответствует $a=\dfrac{1}{4}$.

Ответ: если $a=\dfrac{1}{4}$, то $x=\dfrac{5}{2}$, при остальных $a$ нет решений.

**21. C 6 № 500217.** Число $S$ таково, что для любого представления $S$ в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 19.

а) Может ли число $S$ быть равным 38?
б) Может ли число $S$ быть больше $37{,}05$?
в) Найдите максимально возможное значение $S$.

**Решение.**

а) Рассмотрим разбиение числа 38 на 39 слагаемых, равных $\frac{38}{39}$. При разделении этих слагаемых на две группы в одной из них окажется не менее $20$ чисел, сумма которых равна $20\cdot\frac{38}{39}=\frac{760}{39}=19\frac{19}{39}>19$. Значит, $S$ не может быть равным 38.

б) Поскольку $S$ является суммой двух чисел, не больших 19, получаем $S\le 38$. Пусть $37{,}05<S\le 38$. Рассмотрим разбиение числа $S$ на 39 слагаемых, равных $\frac{S}{39}\le\frac{38}{39}<1$. При разделении этих слагаемых на две группы в одной из них окажется не менее $20$ чисел, сумма которых равна $20\cdot\frac{S}{39}>20\cdot\frac{37{,}05}{39}=19$. Значит, $S$ не может быть больше $37{,}05$.

в) Докажем, что число $37{,}05$ удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим произвольное представление $S=37{,}05$ в виде суммы положительных слагаемых, не превосходящих 1: $S=x_1+x_2+\ldots+x_n$. Можно считать, что слагаемые упорядочены по не возрастанию: $x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_{n-1}\ge x_n$. Первую группу составим из $k$ небольших слагаемых так, чтобы $S_1=x_1+x_2+\ldots+x_k\le 19<x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}$. Вторую группу составим из оставшихся слагаемых.

Пусть $S_1<18{,}05=37{,}05-19$. В этом случае $0{,}95<19-S_1<x_{k+1}\le x_k\le\ldots\le x_1$ и $0{,}95k<x_1+\ldots+x_k=S_1<18{,}05$. Поэтому $k<19$, $k>18$ и $S_1=x_1+x_2+\ldots+x_k\le 18$. Тогда $1\le 19-S_1<x_{k+1}\le 1$.

Полученное противоречие доказывает, что $S_1=18{,}05$. Поэтому сумма слагаемых во второй группе $S_2=x_{k-1}+x_{k+2}+\ldots+x_n=37{,}05-S_1\le 19$.

Таким образом, число $S=37{,}05$ удовлетворяет условию задачи. В предыдущем пункте было показано, что ни одно из чисел $S>37{,}05$ не удовлетворяет условию задачи, значит, максимально возможное значение $S$ — это $37{,}05$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) $37{,}05$.