Вариант № 2887308

1. B 1 № 26626. Шоколадка стоит 35 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 200 рублей в воскресенье?

Решение.

Разделим 200 на 35:

$$\frac{200}{35} = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}.$$

Значит, можно будет купить 5 шоколадок. Еще 2 будут даны в подарок. Всего можно будет получить 7 шоколадок.

Ответ: 7.

2. B 2 № 77346. Мобильный телефон стоил 3500 рублей. Через некоторое время цену на эту модель снизили до 2800 рублей. На сколько процентов была снижена цена?

Решение.

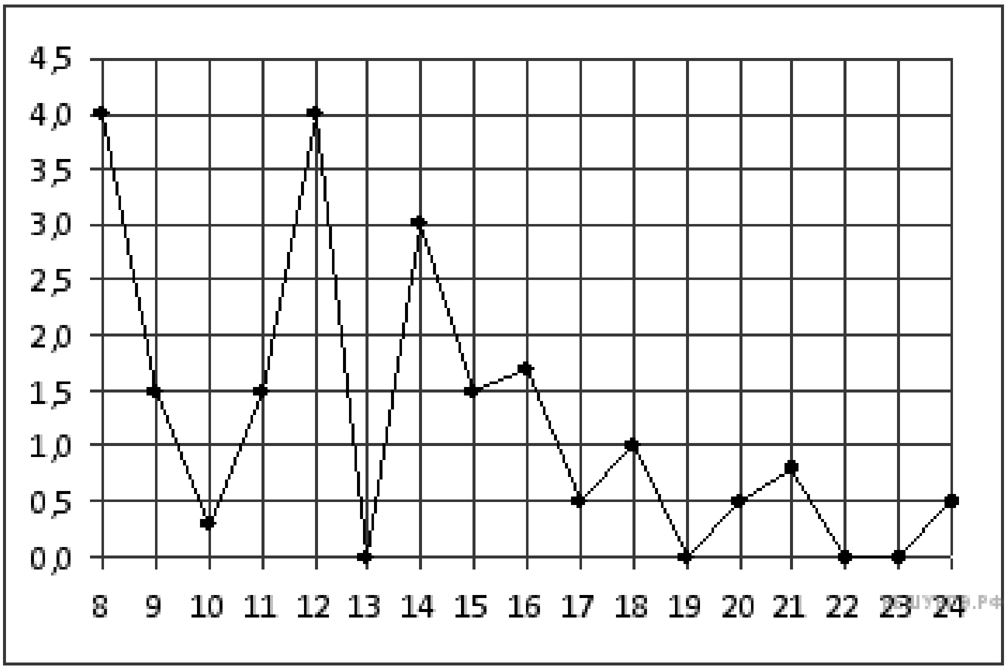
Цену на телефон снизили на 3500 − 2800 = 700 рублей. Разделим 700 на 3500:

$$\frac{700}{3500} = \frac{7}{35} = 0,2.$$

Значит, цену снизили на 20%.

Ответ: 20.

3. B 3 № 27528. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней выпадало более 2 миллиметров осадков.



Решение.

Видно, что более 2 миллиметров осадков выпадало три дня: 8, 12 и 14 января (см. рис.).

Ответ: 3.

4. B 4 № 316049. Независимое агентство каждый месяц определяет рейтинги R новостных сайтов на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель оценивается целыми числами от -2 до 2. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 25 \cdot \left(\frac{2In + Op + 3Tr}{6} + 2\right).$$

В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких новостных сайтов. Определите наивысший рейтинг новостных сайтов, представленных в таблице. Запишите его в ответ, округлив до целого числа.

Сайт	Информативность	Оперативность	Объективность
VoKak.ru	2	−1	0
NashiNovosti.com	−2	1	−1
Bezvrak.ru	2	2	0
Zhizni.net	−1	−1	−2

Решение.

Рассмотрим все варианты.

Сайт VoKak.ru: $R = 25 \cdot \left(\frac{4-1+0}{6} + 2\right) = \frac{125}{2} = 62,5.$

Сайт NashiNovosti.com: $R = 25 \cdot \left(\frac{-4+1-3}{6} + 2\right) = 25.$

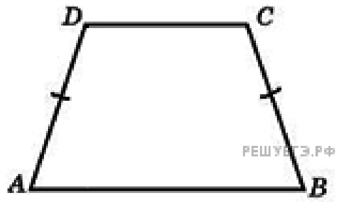
Сайт Bezvrak.ru: $R = 25 \cdot \left(\frac{4+2+0}{6} + 2\right) = 75.$

Сайт Zhizni.net: $R = 25 \cdot \left(\frac{-2-1-6}{6} + 2\right) = \frac{25}{2} = 12,5.$

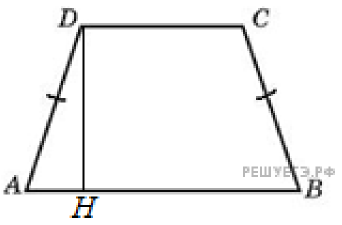
Таким образом, наивысший рейтинг имеет сайт Bezvrak.ru, он равен 75.

Ответ: 75.

5. B 5 № 27635. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее боковые стороны равны 10. Найдите площадь трапеции.



Решение.



$$AH = \frac{AB - CD}{2} = \frac{26 - 14}{2} = 6,$$

$$S = \frac{(AB+CD)\cdot DH}{2} = \frac{(AB+CD)\cdot\sqrt{AD^2 - AH^2}}{2} = \frac{40\cdot 8}{2} = 160.$$

Ответ: 160.

6. B 6 № 320210. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Решение.

Вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94. Вероятность произведения независимых событий (обе батарейки окажутся исправными) равна произведению вероятностей этих событий: 0,94·0,94 = 0,8836.

Ответ: 0,8836.

7. B 7 № 11649. Найдите корень уравнения: $\sqrt{59 - x} = 8.$

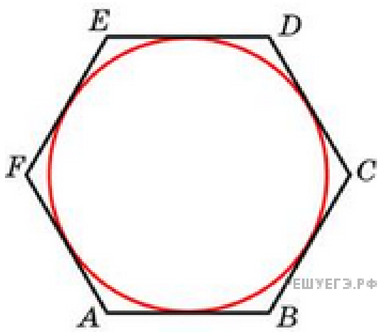
Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{59 - x} = 8 \Leftrightarrow 59 - x = 64 \Leftrightarrow x = -5.$$

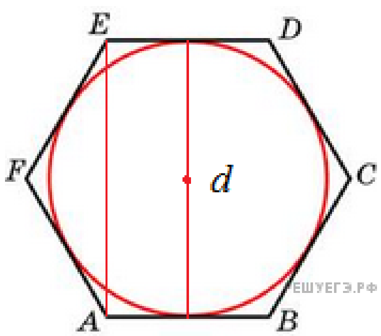
Ответ: −5.

8. B 8 № 27917. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}$.



Решение.

правильного шестиугольника равен 120°. Рассмотрим треугольник FEA и применим теорему косинусов:

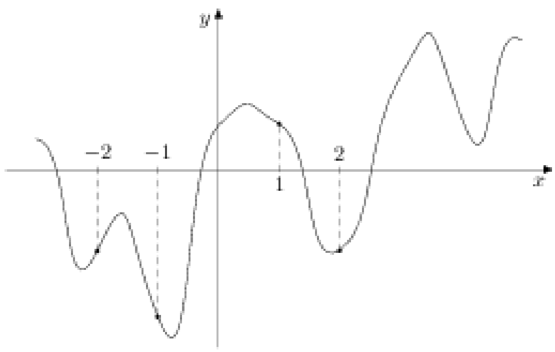


$$r = \frac{d}{2} = \frac{AE}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{AF^2 + EF^2 - 2AF\cdot EF\cos\angle AFE} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 3(1 - \cos 120^\circ)} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

9. B 9 № 317543. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки −2, −1, 1, 2. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

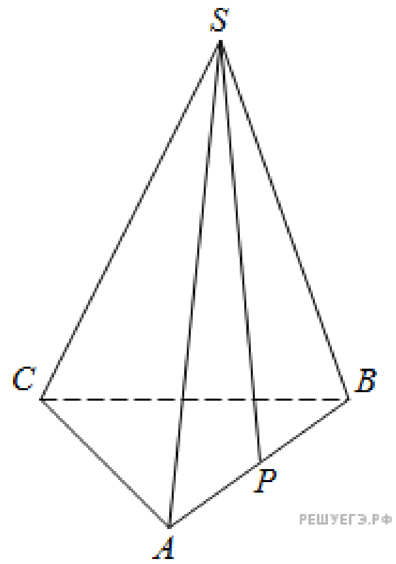


Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная положительна в точках −2 и 2. Угол наклона (и его тангенс) явно больше в точке −2.

Ответ: −2.

10. B 10 № 923. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ P – середина ребра AB, S – вершина. Известно, что BC=5, а SP=6. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Решение.

Отрезок SP является медианой равнобедренного треугольника SAB, а значит, и его высотой. Тогда

$$S_{\text{бок}} = 3S_{SAB} = \frac{3}{2}AB \cdot SP = \frac{3}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 45.$$

Ответ: 45.

11. B 11 № 67669.

Найдите значение выражения $\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-4)^2}$ при $2 \le a \le 4$.

Решение.

Воспользуемся тождеством $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$ и раскроем модули на отрезке [2; 4]:

$$\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-4)^2} = |a-2| + |a-4| = a-2+4-a = 2.$$

Ответ: 2.

12. B 12 № 27983. При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 5$ м – длина покоящейся ракеты, $c = 3\cdot 10^5$ км/с – скорость света, а v – скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 4 м? Ответ выразите в км/с.

Решение.

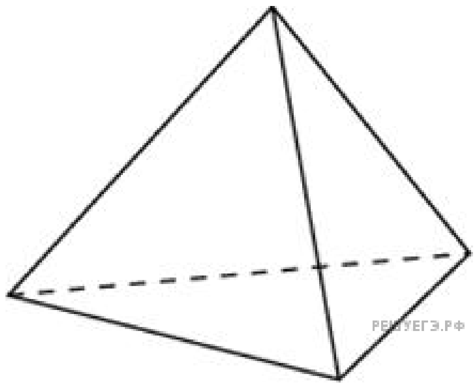
Найдем, при какой скорости длина ракеты станет равна 4 м. Задача сводится к решению уравнения $l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 4$ при заданном значении длины покоящейся ракеты $l_0 = 5$ м и известной величине скорости света $c = 3\cdot 10^5$ км/с:

$$5\sqrt{1-\frac{v^2}{9\cdot 10^{10}}} = 4 \Leftrightarrow 1-\frac{v^2}{9\cdot 10^{10}} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \frac{v^2}{9\cdot 10^{10}} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow v^2 = \frac{81}{25}\cdot 10^{10} \Leftrightarrow v = 180000 \text{ км/с.}$$

Если скорость будет превосходить найденную, то длина ракеты будет менее 4 метров, поэтому минимальная необходимая скорость равна 180000 км/с.

Ответ: 180 000.

13. B 13 № 27131. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?



Решение.

Площадь поверхности тетраэдра равна сумме площадей его граней, которые равны $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Поэтому при увеличении ребер вдвое, площадь поверхности увеличится в 4 раза.

Ответ: 4.

14. B 14 № 99570. Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200 000 рублей. Митя внес 14% уставного капитала, Антон – 42 000 рублей, Гоша – 12% уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1 000 000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях.

Решение.

Антон внес $\frac{42000}{200000}\cdot 100$ уставного капитала. Тогда Борис внес $100-12-14-21 = 53\%$ уставного капитала. Таким образом, от прибыли 1000000 рублей Борису причитается $0,53\cdot 1000000 = 530000$ рублей.

Ответ: 530000.

15. B 15 № 132727. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2+196}$.

Решение.

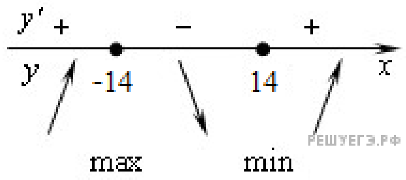
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x}{x^2+196}\right)' = -\frac{1\cdot\left(x^2+196\right)-x\cdot(2x)}{\left(x^2+196\right)^2} = \frac{x^2-196}{\left(x^2+196\right)^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2-196=0 \Leftrightarrow x^2=196 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=14, \\ x=-14. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:

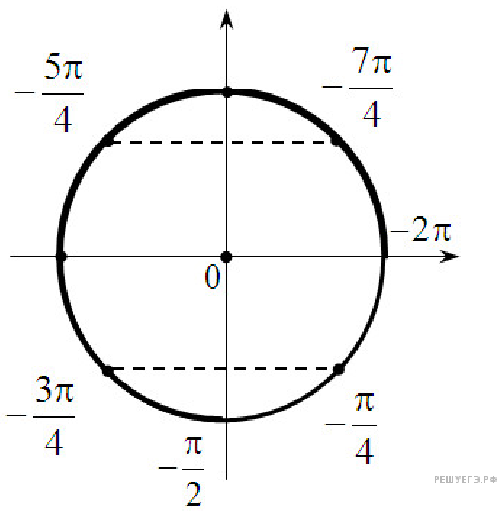


Искомая точка минимума $x=14$.
Ответ: 14.

16. C 1 № 500131. а) Решите уравнение $\cos 2x+0,5=\cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Запишем уравнение в виде



$$\cos^2 x-\sin^2 x+0,5=\cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1}{2}.$$

Значит, $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ или $x=\frac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; б) $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$.

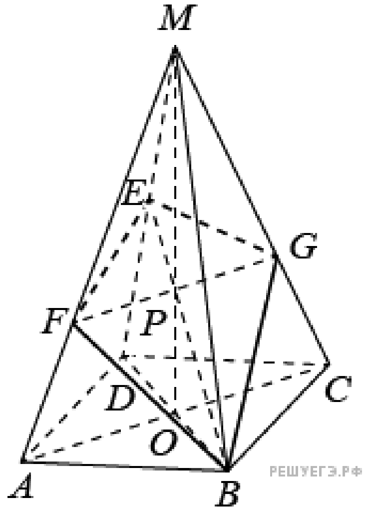
17. C 2 № 501945. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2 : 1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF : FA = MG : GC = MP : PO = 2 : 1,$$

$$FG = \frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$



Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MB^2}}{2} = 5.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{BFEG} = \frac{BE \cdot FG}{2} = 5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

18. C 3 № 484605. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5x} x^2 + \log_{x^2} 5x \le 2, \\ \log^4_{x-3}(x^2 - 17) + \log^2_{x^2-17}(x-3) - \log_{5x} 25 > 79. \end{cases}$$

Решение.

Заметим, что по смыслу задачи $x > 1$, а значит, оба слагаемых в левой части первого неравенства положительны. Поскольку слагаемые взаимно обратные, их сумма не меньше двух. Тогда неравенство выполнено в том и только в том случае, когда оба слагаемых равны 1.

Имеем:

$$\log_{5x} x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 5x \underset{x>1}{\Leftrightarrow} x = 5.$$

Осталось проверить, является ли найденное решение первого неравенства решением второго неравенства. Выполним проверку:

$$\log^4_2 8 + \log^2_8 2 - \log_{25} 25 = 81 + \frac{1}{9} - 1 = 80\frac{1}{9} > 79.$$

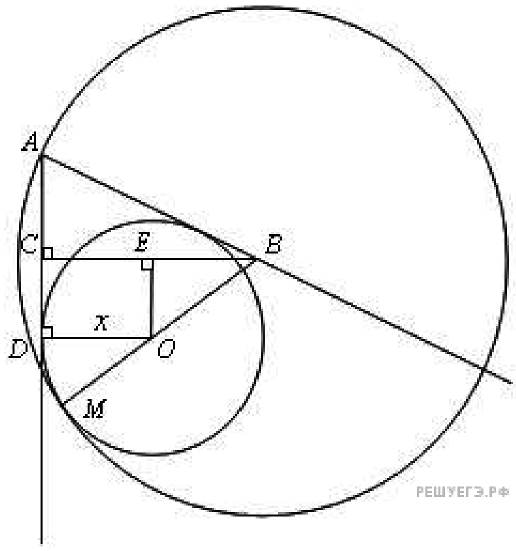
Следовательно, число 5 является решением системы неравенств.

Ответ: $\{5\}$.

19. C 4 № 485999. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 5$ и $BC = 12$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 13. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

Решение.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$.



Пусть x — радиус искомой окружности, O — ее центр, D — точка касания с лучом AC, M — точка касания с окружностью S, E — проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$\operatorname{ctg}\angle OAD = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{3}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AD = OD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}x.$$

Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: одна из них касается окружности S внутренним образом, а вторая — внешним.

В первом случае

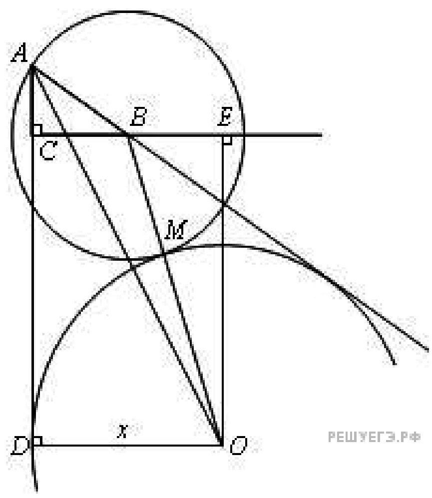
$$BO = BM - OM = 13 - x, OE = CD = |AD - AC| = |\frac{3}{2}x - 5|,$$
$$BE = |BC - CE| = |BC - OD| = |12 - x|.$$

По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$, или

$$(13-x)^2 = \left(\frac{3}{2}x - 5\right)^2 + (12-x)^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 - 13x = 0,$$

откуда находим, что $x = \frac{52}{9}$.

Во втором случае



$$BO = BM + MO = 13 + x, OE = CD = |AD - AC| = |\frac{3}{2}x - 5|,$$
$$BE = |CE - BC| = |OD - BC| = |12 - x|.$$

Тогда

$$(13+x)^2 = \left(\frac{3}{2}x - 5\right)^2 + (12-x)^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 - 65x = 0,$$

откуда находим, что $x = \frac{260}{9}$.

Ответ: $\frac{52}{9}$ или $\frac{260}{9}$.

20. C 5 № 485953. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции
$f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

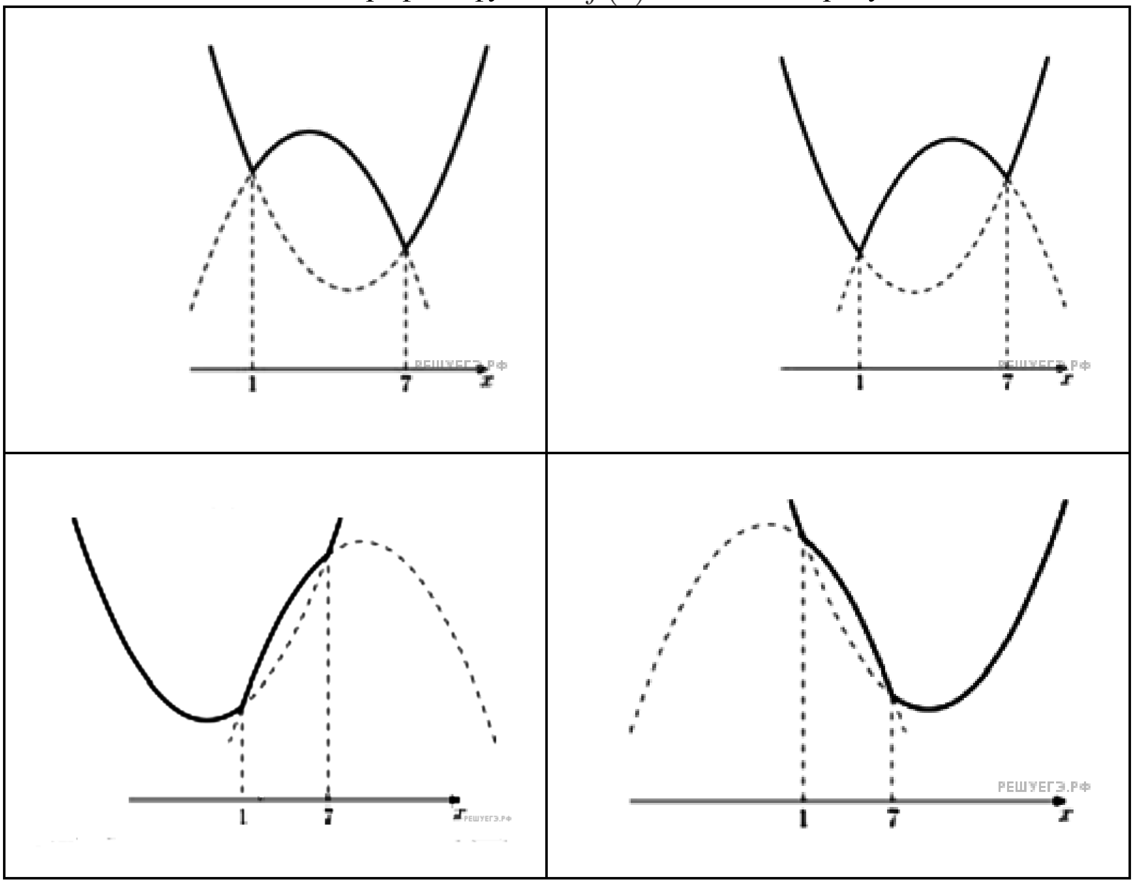
Решение.

1. Функция имеет вид:

а) при $x^2 - 8x + 7 \geq 0$: $f(x) = x^2 + 2(a-4)x + 7$, а ее график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = 4 - a$;.

б) при $x^2 - 8x + 7 < 0$: $f(x) = -x^2 + 2(a+4)x - 7$, а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз и осью симметрии $x = -4 - a$; .

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:



2. Наименьшее значение функции $f(x)$ может приниматься только в точках
$x = 1$ или $x = 7$, а если $4 - a \notin [1;7]$ — то в точке $x = 4 - a$.

3. Наименьшее значение функции $f(x)$ больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1) > 1, \\ f(7) > 1, \\ f(4-a) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a > 1, \\ 14a > 1, \\ 2a(4-a) + |a^2 - 9| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \dfrac{1}{2}, \\ a > \dfrac{1}{14}, \\ 2a^2 - 8a + 1 - |a^2 - 9| < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 3, \\ a^2 - 8a + 10 < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2} < a < 3, \\ 3a^2 - 8a - 8 < 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 3, \\ 4 - \sqrt{6} < a < 4 + \sqrt{6}; \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2} < a < 3, \\ \dfrac{4 - \sqrt{40}}{3} < a < \dfrac{4 + \sqrt{40}}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 \leq a < 4 + \sqrt{6}; \\ \dfrac{1}{2} < a < 3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6};$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2}\,;4+\sqrt{6}\,\right)$

21. C 6 № 484654. Перед каждым из чисел 14, 15, . . ., 20 и 4, 5, . . ., 8 прозвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа первого набора взяты с плюсами, а второго — с минусами, то сумма максимальна и равна

$$5(14+\ldots+20)-7(-4-\ldots-8)=5\left(\frac{14+20}{2}\cdot 7\right)+7\left(\frac{4+8}{2}\cdot 5\right)=35\cdot 23=805.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней — нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при изменении знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из полученны сумм будет не четной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$5(-14-15+16-17+18-19+20)-7(-4+5+6-7-8)=-5\cdot 11+7\cdot 8=-55+56=1.$$

Ответ: 1 и 805.