Вариант № 2887296

1. B 1 № 77334. В обменном пункте 1 гривна стоит 3 рубля 70 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на гривны и купили 3 кг помидоров по цене 4 гривны за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

Решение.

За 3 кг помидоров отдыхающие заплатили $4 \cdot 3 = 12$ гривен. Значит, в рублях они заплатили: $12 \cdot 3{,}7 = 44{,}4$ рубля. Округляем до целого числа, получаем 44.

Ответ: 44.

2. B 2 № 26630. Футболка стоила 800 рублей. После снижения цены она стала стоить 680 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

Решение.

Цена на футболку была снижена на $800 - 680 = 120$ рублей. Разделим 120 на 800:

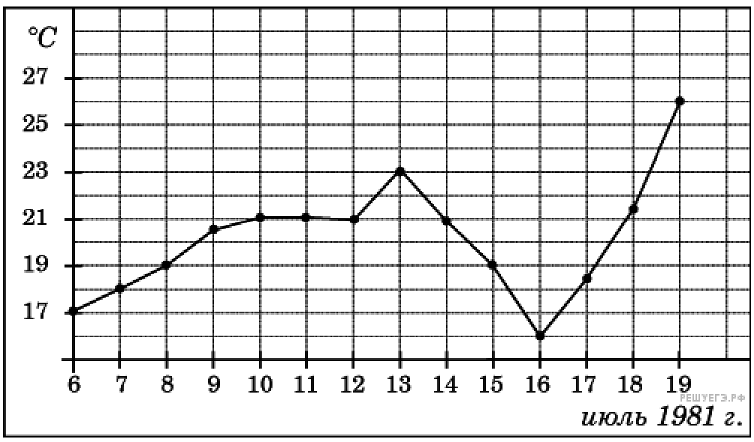
$$\frac{120}{800} = \frac{3}{20} = 0{,}15.$$

Значит, цена на футболку была снижена на 15%.

Ответ: 15.

3. B 3 № 263597.

На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какая была температура 15 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение.

Из графика видно, что 15 июля в Бресте было 19 градусов тепла.

Ответ: 19.

4. B 4 № 26679. Строительной фирме нужно приобрести 40 кубометров строительного бруса у одного из трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	**Цена бруса (руб. за 1 м^3)**	**Стоимость доставки**	**Дополнительные условия**
А	4200	10200	
Б	4800	8200	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	4300	8200	При заказе на сумму больше 200 000 руб. доставка бесплатно

Решение.

Рассмотрим все варианты.

При покупке у поставщика *A* стоимость заказа складывается из стоимости бруса 4200 · 40 = 168 000 руб. и стоимости доставки: 168 000 + 10 200 = 178 200 руб.

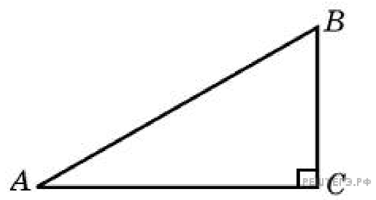
При покупке у поставщика *Б* стоимость бруса составляет 4800 · 40 = 192 000 руб., что превышает 150 000 руб., поэтому доставка бесплатна. Таким образом, стоимость заказа 192 000 руб.

При покупке у поставщика *В* стоимость заказа складывается из стоимости бруса 4300 · 40 = 172 000 руб. и стоимости доставки: 172 000 + 8200 = 180 200 руб.

Стоимость самого дешевого варианта составляет 178 200 рублей.

Ответ: 178 200.

5. B 5 № 27588. Площадь прямоугольного треугольника равна 16. Один из его катетов равен 4. Найдите другой катет.



Решение.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. Пусть неизвестный катет равен a. Тогда

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4 = 16 \text{ см}^2,$$

откуда a = 8 см.

Ответ: 8.

6. B 6 № 320171. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: 0,2 + 0,15 = 0,35.

Ответ: 0,35.

7. B 7 № 26652. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \frac{1}{9}$.

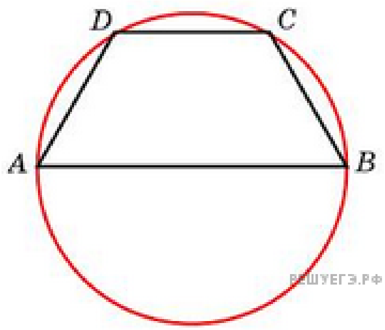
Решение.

Перейдем к одному основанию степени:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\Leftrightarrow x-8=2\Leftrightarrow x=10.$$

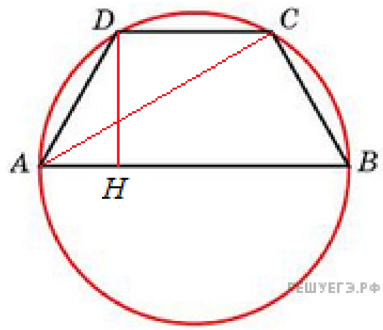
Ответ: 10.

8. B 8 № 27925. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.



Решение.

Окружность, описанная вокруг трапеции, описана и вокруг треугольника ADC. Это треугольник равнобедренный, угол при вершине равен 120°, углы при основании равны 30°. Найдем его боковую сторону:



$AD=AB-2AH=AB-2AD\cos 60^\circ=12-AD,$
откуда $AD=6$. Тогда по теореме синусов:

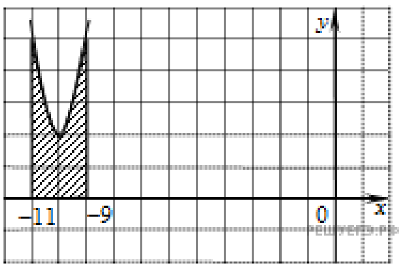
$$R=\frac{AD}{2\sin\angle DCA}=\frac{6}{2\sin 30^\circ}=6.$$

Ответ: 6.

Приведем другое решение (Р. А., СПб.).

Хорды AD, DC и CB равны, поэтому равны и стягиваемые ими дуги. Вписанный угол A равен 60°, он опирается на две из этих дуг и равен половине их суммы. Поэтому каждая из дуг равна 60°, их сумма равна 180°, а хорда AB является диаметром. Отсюда получаем, что искомый радиус равен 6.

9. B 9 № 323079. На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Функция $F(x)=x^3+30x^2+302x-\frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение.

Площадь выделенной фигуры равна разности значений первообразных, вычисленных в точках -9 и -11.
Имеем:

$$F(-9)=(-9)^3+30\cdot(-9)^2+302\cdot(-9)-\frac{15}{8}=-729+2430-2718-\frac{15}{8}=-1018\frac{7}{8}.$$
$$F(-11)=(-11)^3+30\cdot(-11)^2+302\cdot(-11)-\frac{15}{8}=-1331+3630-3322-\frac{15}{8}=-1024\frac{7}{8}.$$
$$F(-9)-F(-11)=-1018\frac{7}{8}+1024\frac{7}{8}=6.$$

Приведем другое решение.

Получим явное выражение для $f(x)$. Поскольку

$$f(x)=F'(x)=3x^2+60x+302=3(x^2+20x+100)+2=3(x+10)^2+2,$$

имеем:

$$\int\limits_{-11}^{-9}(3(x+10)^2+2)dx=((x+10)^3+2x)\Bigg|_{-11}^{-9}=1-(-1)+2(-9-(-11))=2+4=6.$$

Примечание.

Внимательный читатель отметит, что второй подход эквивалентен выделению полного куба:

$$F(x)=x^3+30x^2+302x-\frac{15}{8}=(x+10)^3+2x-\frac{15}{8},$$

что позволяет сразу же найти $F(-9)-F(-11)$.

Еще один способ рассуждений покажем на примере следующей задачи.

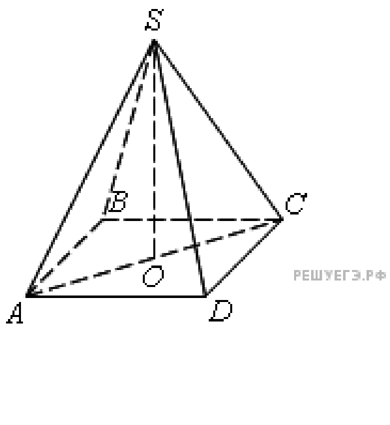
Ответ: 6.

10. B 10 № 284348. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SO=4$, $AC=6$. Найдите боковое ребро SC.

Решение.

Рассмотрим треугольник SOC. Он прямоугольный, т. к. SO — высота, она перпендикулярна основанию $ABCD$, а значит, и прямой AC. Тогда по теореме Пифагора

$$SC=\sqrt{SO^2+\frac{AC^2}{4}}=\sqrt{16+9}=5.$$



Ответ: 5.

11. B 11 № 77394. Найдите значение выражения $(5^{12})^3:5^{37}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$(5^{12})^3 : 5^{37} = 5^{12\cdot 3-37} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

12. B 12 № 42999. Емкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 4\cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 8\cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 14$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,3$ — постоянная. Определите (в киловольтах), наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 83,2 с?

Решение.

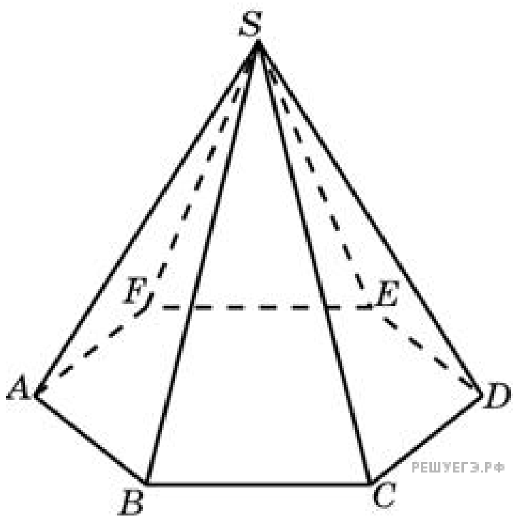
Задача сводится к решению неравенства $t \geq 83,2$ при заданных значениях начального напряжения на конденсаторе $U_0 = 14$ кВ, сопротивления резистора $R = 8\cdot 10^6$ Ом и емкости конденсатора $C = 4\cdot 10^{-6}$ Ф:

$$t \geq 83,2 \Leftrightarrow 1,3\cdot 4\cdot 10^{-6}\cdot 8\cdot 10^{6}\cdot \log_2\frac{14}{U} \geq 83,2 \Leftrightarrow \log_2\frac{14}{U} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{14}{U} \geq 4 \Leftrightarrow U \leq 3,5 \text{ кВ}.$$

Таким образом, наибольшее возможное напряжение на конденсаторе равно 3,5 кВ.

Ответ: 3,5.

13. B 13 № 27180. Объем правильной шестиугольной пирамиды 6. Сторона основания равна 1. Найдите боковое ребро.



Решение.

Площадь основания равна

$$S = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Из формулы для объема пирамиды найдем высоту:

$$V = \frac{1}{3}Sh \Rightarrow h = \frac{3V}{S} = \frac{3\cdot 6}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

В правильном шестиугольнике сторона равна радиусу описанной окружности, поэтому найдем боковое ребро пирамиды по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{48+1} = 7.$$

Ответ: 7.

14. B 14 № 99620. В помощь садовому насосу, перекачивающему 5 литров воды за 2 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 3 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 25 литров воды?

Решение.

Скорость совместной работы насосов

$$(\frac{5}{2} + \frac{5}{3})\text{л/мин} = \frac{25}{6}\text{л/мин}.$$

Для того, чтобы перекачать 25 литров воды, понадобится

$$\frac{25}{{}^{25}\!/_{6}}\text{ мин} = 6\text{ мин}.$$

Ответ: 6.

15. B 15 № 286803. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 22x + 122}$.

Решение.

Выделим полный квадрат:

$$y = \sqrt{x^2 + 22x + 122} = \sqrt{(x+11)^2 + 1}.$$

Отсюда имеем:

$$y = \sqrt{(x+11)^2 + 1} \geq \sqrt{1} = 1.$$

Поэтому наименьшее значние функции достигается в точке -11, и оно равно 1.

Ответ: 1.

16. C 1 № 502074. а) Решите уравнение $4^{x-\frac{1}{2}} - 5\cdot 2^{x-1} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{5}{3}\right)$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $2\cdot 4^{x-1}-5\cdot 2^{x-1}+3=0.$

Пусть $t=2^{x-1}$, тогда уравнение запишется в виде $2t^2-5t+3=0$, откуда $t=1$ или $t=\frac{3}{2}$.

При $t=1$ получим: $2^{x-1}=1$, откуда $x=1$.

При $t=\frac{3}{2}$ получим: $2^{x-1}=\frac{3}{2}$, откуда $x=\log_2 3$.

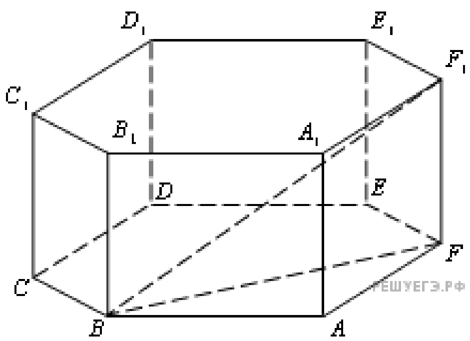
б) Корень $x=1$ не принадлежит промежутку $\left(1;\ \frac{5}{3}\right)$. Поскольку $1<\log_2 3$ и $3\log_2 3=\log_2 27<\log_2 32=5$, корень $x=\log_2 3$ принадлежит промежутку $\left(1;\ \frac{5}{3}\right)$.

Ответ: а) 1; $\log_2 3$; б) $\log_2 3$.

17. С 2 № 484566. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 найдите расстояние от точки B до прямой E_1F_1.

Решение.

Проведем отрезки BF и BF_1, $BF\perp BC$, поскольку $\angle CBA=120°$, а $\angle ABF=30°$. BF — проекция BF_1 на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $BF_1\perp E_1F_1$. Таким образом искмое расстояние — длина отрезка BF_1.



Рассмотрим треугольник BFF_1. Он прямоугольный, $BF=\sqrt{3}$, $FF_1=1$.

По теореме Пифагора находим: $BF_1=\sqrt{3+1}=2$.

Ответ: 2.

18. С 3 № 500429. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{8^x-5\cdot 2^x}{2^x-2^{4-x}}\geq 0, \\ \log_{x^2}\left(-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)\leq 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 2^x$, $y > 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{y^3-5y}{y-\frac{16}{y}} \geq 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^4-5y^2}{y^2-16} \geq 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(y-\sqrt{5})(y+\sqrt{5})}{(y-4)(y+4)} \geq 0, \\ y > 0 \end{cases}$$

откуда находим: $y \in (0, \sqrt{5}] \cup (4, +\infty)$. Тогда $x \in (-\infty, \log_4 5] \cup (2, +\infty)$.

2. Решим второе неравенство системы: $\log_{x^2} \dfrac{2-x}{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \log_{x^2}(2-x) \leq 1$.

Рассмотрим два случая.

а) Первый случай: $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2}(2-x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 2-x \leq x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 \geq 0, \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1) \geq 0, \\ x < 2, \end{cases}$$

откуда, учитывая условие $x^2 > 1$, находим: $x \in (-\infty, -2] \cup (1, 2)$.

б) Второй случай: $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2}(2-x) \leq 1 \Leftrightarrow 2-x \geq x^2 \Leftrightarrow x^2+x-2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 1].$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем: $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Решение второго неравенства исходной системы: $x \in (-\infty, -2] \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$.

3. Поскольку $1 < \log_4 5 < 2$, получаем решение исходной системы неравенств.

Ответ: $x \in (\infty, -2] \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \log_4 5]$.

19. C 4 № 500818. На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и D и касающейся прямой BC.

Решение.

Центр O искомой окружности принадлежит серединному перпендикуляру отрезка AD. Обозначим P середину отрезка AD, Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BC, E — точку пересечения серединного перпендикуляра с прямой BC (см. рис. а). Из условия касания окружности и прямой BC следует, что отрезки OA, OD и OQ равны радиусу R окружности.

Заметим, что точка O не может лежать по ту же чторону от прямой AB, что и точка E, так как в этом случае расстояние от точки O до прямой BC меньше, чем расстояние от нее до точки A.

Из прямоугольного треугольника BPE с катетом $BP = 2$ и $\angle B = 30^\circ$ находим, что $PE = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Так как $OA = R$ и $AP = 1$, получаем: $OP = \sqrt{R^2 - 1}$, следовательно, $OE = \sqrt{R^2-1} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

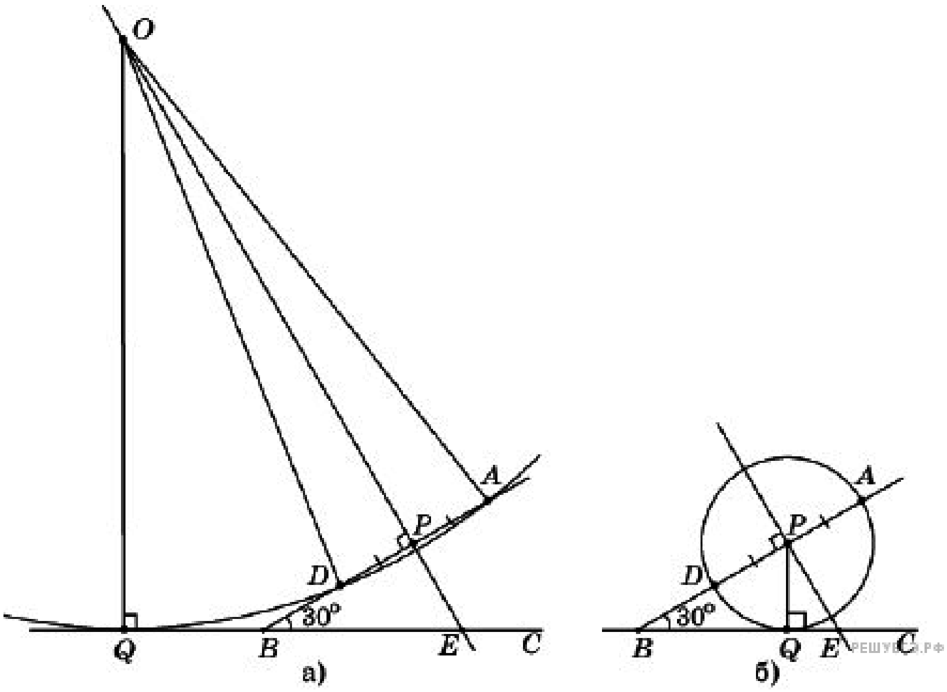
Из прямоугольного треугольника OQE, в котором $\angle E = 60^\circ$, находим:

$$R = OQ = \frac{\sqrt{3}}{2}OE = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2-1} + 1.$$

В результате получаем уравнение:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2-1} = R - 1.$$

Возведем в квадрат обе части этого уравнения и приведем подобные члены. Получим уравнение $R_1 = 1, R_2 = 7$. Если радиус равен 1, то центром окружности является точка P (см. рис.).



О т в е т : 1 или 7.

20. C 5 № 500196. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $|x^2 - 4x + a| \leq 10$ выполняется для всех $x \in [a, a+5]$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 4x + a = (x—2)^2 + a - 4$. Эта функция возрастает на промежутке $[2, +\infty)$ и убывает па промежутке $(-\infty, 2]$.

Исходное неравенство имеет вид $|f(x)| \le 10$, значит, график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, a+5]$ должен находиться в пределах горизонтальной полосы: $-10 \le f(x) \le 10$.

Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, a+5]$ достигается либо при $x = a$, либо при $x = a+5$.

Наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, a+5]$ достигается при $x = 2$. Получаем систему:

$$\begin{cases} -3 < a < 2, \\ f(a) \le 10, \\ f(a+5) \le 10, \\ f(2) \ge -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 2, \\ (a-2)^2 + a - 4 \le 10, \\ (a+3)^2 + a - 4 \le 10, \\ a - 4 \ge -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 2, \\ a^2 - 3a - 10 \le 10, \\ a^2 + 7a - 5 \le 10, \\ a \ge -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 2, \\ -2 \le a \le 5, \\ \frac{-7-\sqrt{69}}{2} \le a \le \frac{-7+\sqrt{69}}{2}, \\ a \ge -6, \end{cases}$$

откуда $-2 \le a \le \dfrac{-7+\sqrt{69}}{2}$.

Ответ: $-2 \le a \le \dfrac{-7+\sqrt{69}}{2}$.

21. C 6 № 484670. Найдите все простые числа b, для каждого из которых существует такое целое число a, что дробь $\dfrac{a^4 + 18a^2 + 9}{a^3 + 17a}$ сократима на b.

Решение.

Если целые числа $a^4 + 18a^2 + 9$ и $a^3 + 17a$ делятся на b, то целое число

$$(a^4 + 18a^2 + 9) - a(a^3 + 17a) = a^2 + 9$$

также делится на b.

Тогда число

$$(a^3 + 17a) - a(a^2 + 9) = 8a$$

тоже делится на b.

Тогда число

$$8(a^2 + 9) - a(8a) = 72$$

также делится на b. Таким образом, искомое b — простой делитель числа 72, то есть 2 или 3.

Осталось проверить для каких из найденных чисел можно подобрать a.

Если a нечётное, то числитель и знаменатель данной дроби четны, поэтому дробь можно сократить на 2.

Если a кратно 3, то числитель и знаменатель данной дроби также кратны 3, поэтому дробь можно сократить на 3.

Ответ: 2, 3.