Вариант № 2887353

1. B 1 № 77338. В общежитии института в каждой комнате можно поселить четырех человек. Какое наименьшее количество комнат необходимо для поселения 83 иногородних студентов?

Решение.

Разделим 83 на 4:

$$\frac{83}{4} = 20\frac{3}{4}.$$

Значит, для поселения 83 иногородних студентов необходима 21 комната.

Ответ: 21.

2. B 2 № 26627. Оптовая цена учебника 170 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 7000 рублей?

Решение.

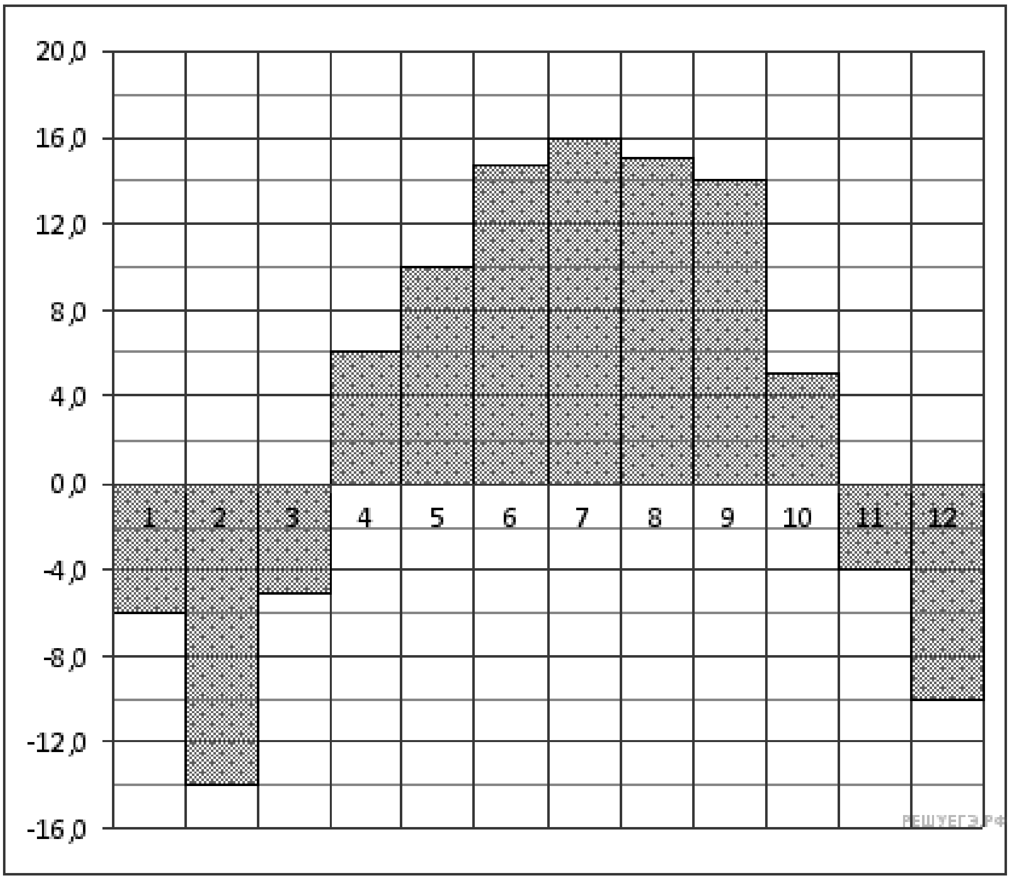
С учетом наценки учебник будет стоить 170 + 0,2 · 170 = 204 рубля. Разделим 7000 на 204:

$$\frac{7000}{204} = \frac{1750}{51} = \frac{1734+16}{51} = \frac{1734}{51} + \frac{16}{51} = 34\frac{16}{51}.$$

Значит, можно будет купить 34 учебника.

Ответ: 34.

3. B 3 № 27519. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с положительной среднемесячной температурой.



Решение.

Из диаграммы видно, что было 7 месяцев с температурой выше нуля (см. рисунок).

Ответ: 7.

4. B 4 № 26685. В таблице даны тарифы на услуги трех фирм такси. Предполагается поездка длительностью 70 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	**Подача машины**	**Продолжительность и стоимость минимальной поездки ***	**Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки**
А	350	Нет	13
Б	Бесплатно	20 мин. — 300 руб.	19
В	180	10 мин — 150 руб.	15

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

Решение.

Рассмотрим различные варианты.

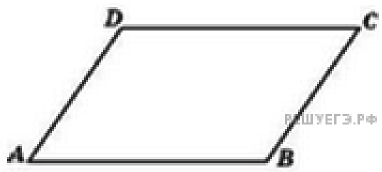
Стоимость поездки на такси фирмы *А* будет складываться из стоимости 70 минут поездки, то есть $70 \cdot 13 = 910$ руб., а также стоимости подачи такси и будет составлять $350 + 910 = 1\,260$ руб.

Стоимость поездки на такси фирмы *Б* будет складываться из стоимости минимальной поездки, а также стоимости 50 минут поездки сверх минимальной, то есть $300 + 50 \cdot 19 = 300 + 950 = 1\,250$ руб.

Стоимость поездки на такси фирмы *В* будет складываться из стоимости минимальной поездки, а также стоимости 60 минут поездки сверх минимальной и стоимости подачи машины, то есть $150 + 60 \cdot 15 + 180 = 330 + 900 = 1230$ руб.

Ответ: 1230.

5. B 5 № 27809. Периметр параллелограмма равен 46. Одна сторона параллелограмма на 3 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.



Решение.

противоположные стороны параллелограмма попарно равны, значит

$$P = 2(AD + AB) = 2(AD + AD + 3) = 4AD + 6.$$

Зная, что периметр параллелограмма равен 46, находим $AD = 10$.

Ответ: 10.

6. B 6 № 320174. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение.

Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$.

Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$.

Ответ: 0,9975.

Приведем другое решение.

Вероятность того, что исправен первый автомат (событие A) равна 0,95. Вероятность того, что исправен второй автомат (событие B) равна 0,95. Это совместные независимые события. Вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий, а вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения. Имеем:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}95 + 0{,}95 - 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9975.$$

7. B 7 № 27465. Найдите корень уравнения $\sqrt{3x - 8} = 5$.

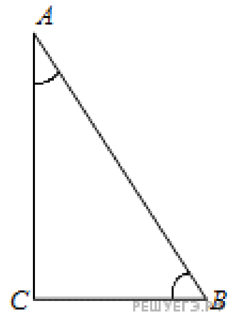
Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{3x - 8} = 5 \Leftrightarrow 3x - 8 = 25 \Leftrightarrow 3x = 33 \Leftrightarrow x = 11.$$

Ответ: 11.

8. B 8 № 27229. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg} A = \dfrac{24}{7}$. Найдите $\sin B$.

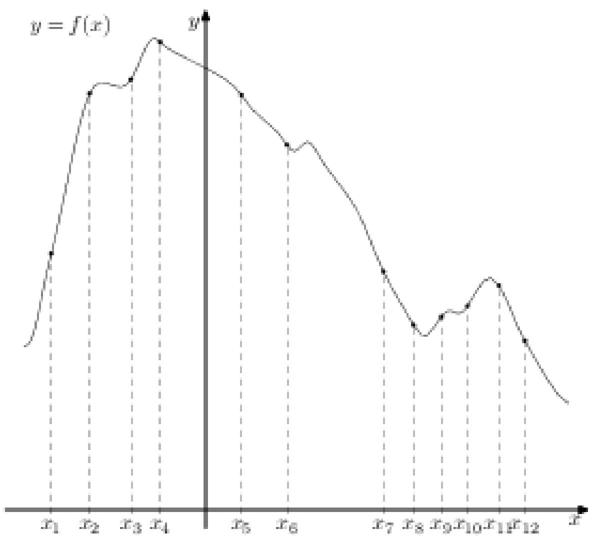


Решение.

$$\sin B = \cos A = \sqrt{\frac{1}{1+\text{tg}^2 A}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{576}{49}}} = \sqrt{\frac{49}{625}} = \frac{7}{25} = 0,28.$$

Ответ: 0,28.

9. B 9 № 317540. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Решение.

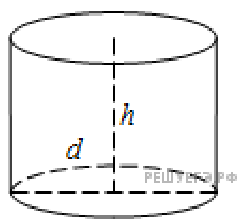
Отрицательным значениям производной соответствуют интервалы, на которых функция $f(x)$ убывает. В этих интервалах лежат точки $x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{11}, x_{12}$. Таких точек 7.

Ответ:7.

10. B 10 № 284362. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π, а высота — 1. Найдите диаметр основания.

Решение.

Площадь боковой поверхности цилиндра находится по формуле: $S_{\text{бок}} = 2\pi rh$, значит, $d = 2r = 2\dfrac{S_{\text{бок}}}{2\pi h} = \dfrac{2\pi}{\pi h} = 2.$



11. B 11 № 68141.

Найдите $\dfrac{g(3-x)}{g(3+x)}$, если $g(x) = \sqrt[11]{x(6-x)}$, при $|x| \neq 3$.

Решение.

Покажем, что числитель дроби равен знаменателю:

$$g(3-x) = \sqrt[11]{(3-x)(6-(3-x))} = \sqrt[11]{(3-x)(3+x)},$$
$$g(3+x) = \sqrt[11]{(3+x)(6-(3+x))} = \sqrt[11]{(3+x)(3-x)}.$$

Таким образом,

$$\frac{g(3-x)}{g(3+x)} = 1.$$

Ответ: 1.

12. B 12 № 27954. Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700000$ руб. месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p-v) - f$. Определите наименьший месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 300000 руб.

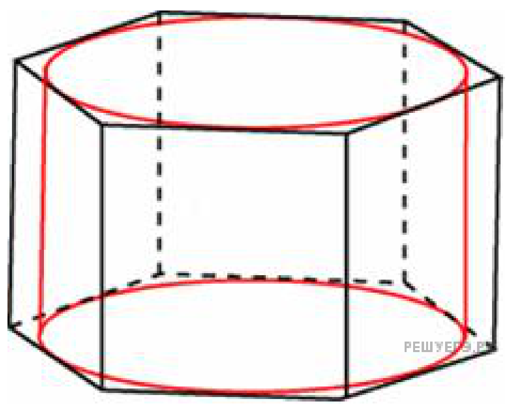
Решение.

Задача сводится к нахождению наименьшего решения неравенства $\pi(q) \geq 300000$ руб. при заданных значениях цены за единицу $p = 500$ руб., переменных затрат на производство одной единицы продукции $v = 300$ руб. и постоянных расходов предприятия $f = 700000$ руб. в месяц:

$$\pi(q) \geq 300000 \Leftrightarrow q(p-v) - f_0 \geq 300000 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow q(500-300) - 700000 \geq 300000 \Leftrightarrow q \geq 5000.$$

Ответ: 5000.

13. B 13 № 27066. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.



Решение.

Сторона правильного шестиугольника a выражается через радиус r вписанной в него окружности как $a = \frac{2}{\sqrt{3}}r$. Тогда площадь боковой поверхности призмы выражается формулой

$$S = 6Ha = \frac{12}{\sqrt{3}}Hr = 12 \cdot 2 = 24.$$

Ответ: 24.

14. B 14 № 26582. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 98 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 7 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть v км/ч – скорость велосипедиста на пути из A в B, тогда скорость велосипедиста на пути из B в A – $v+7$ км/ч. Сделав на обратном пути остановку на 7 часов, велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B, отсюда имеем:

$$\frac{98}{v}=\frac{98}{v+7}+7 \Leftrightarrow \frac{98}{v}=\frac{98+7v+49}{v+7} \underset{v>0}{\Leftrightarrow} 98v+7\cdot 98=98v+7v^2+49v \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow v^2+7v-98=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=7; \\ v=-14 \end{array}\right. \underset{v>0}{\Leftrightarrow} v=7.$$

Таким образом, скорость велосипедиста была равно 7 км/ч.

Ответ: 7.

15. B 15 № 245184. Найдите наибольшее значение функции $y=3^{-7-6x-x^2}$.

Решение.

Поскольку функция $y=3^x$ возрастающая, заданная функция достигает наибольшего значения в той же точке, в которой достигает наибольшего значения выражение $-7-6x-x^2$. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает наибольшего значения в точке $x=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке -3. Значение функции в этой точке равно $y=3^{-7-6(-3)-(-3)^2}$.

Ответ: 9.

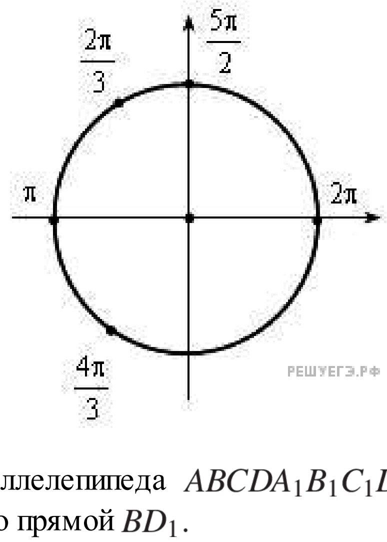
16. C 1 № 485991. а) Решите уравнение $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение, получаем $\cos x=\cos 2x$. Значит, $x=2x+2\pi k$ или $x=-2x+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. В первом случае $x=2\pi k$, во втором случае $x=\frac{2\pi k}{3}$, где $k\in\mathbb{Z}$. Первая серия решений входит во вторую.

б) Отметим решения на тригонометрической окружности. Отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{4\pi}{3}$ и 2π.



Ответ: а) $x=\frac{2\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z}$.

б) $\frac{4\pi}{3}, 2\pi$.

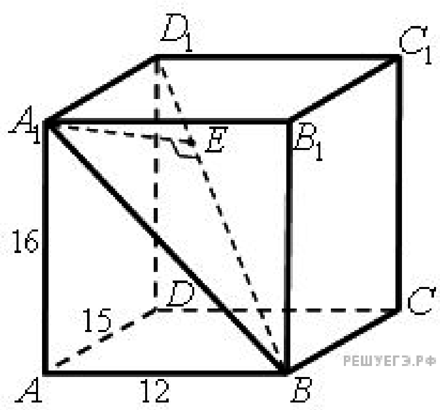
17. C 2 № 501396. Длины ребер AB, AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15. Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1.

Решение.

Опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1E на прямую BD_1. Так как $A_1D_1 \perp (A_1AB)$, то $A_1D_1 \perp A_1B$, а, значит, отрезок A_1E — высота прямоугольного треугольника A_1BD_1, откуда $A_1E = \frac{A_1B \cdot AD_1}{BD_1}$. Далее находим:

$A_1B = \sqrt{A_1A^2 + AB^2} = 20$, $BD_1 = \sqrt{A_1A^2 + AB^2 + A_1D_1^2} = 25$,

$A_1E = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12.$



Ответ: 12.

18. C 3 № 500475. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{9^x + 11 \cdot 3^x - 93}{3^x - 82} \le 1, \\ \log_2 0,5x \ge \log_{16x} 2 \cdot \log_4 16x^4. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 3^x$.

$$\frac{y^2 + 11y - 93}{y - 82} \le 1 \Leftrightarrow \frac{y^2 + 10y - 11}{y - 82} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)(y+11)}{y - 82} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \le -11, \\ 1 \le y < 82. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $3^x > 0$, получаем: $1 \le 3^x < 82$, откуда находим решение первого неравенства системы $0 \le x < \log_3 82$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\log_2 0,5x \ge \frac{\log_4 16x^4}{\log_2 16x} \Leftrightarrow \log_2 x - 1 \ge \frac{2\log_2 x + 2}{\log_2 x + 4}.$$

Сделаем замену $z = \log_2 x$.

$$z - 1 \ge \frac{2z + 2}{z + 4} \Leftrightarrow \frac{z^2 + z - 6}{z + 4} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < z \le -3, \\ z \ge 2. \end{array}\right.$$

Тогда $-4 < \log_2 x \le -3$ или $\log_2 x \ge 2$, откуда находим решение второго неравенства системы: $\frac{1}{16} < x \le \frac{1}{8}$ или $x \ge 4$.

3. Поскольку $4 < \log_3 82 < 5$, получаем решение исходной системы неравенств.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right] \cup [4, \log_3 82)$.

19. C 4 № 500015. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BMC.

Решение.

В любой трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований трапеции, а средняя линия — полусумме оснований трапеции. В нашем случае полуразность оснований равна 5, а полусумма оснований равна 25, поэтому основания трапеции равны 20 и 30.

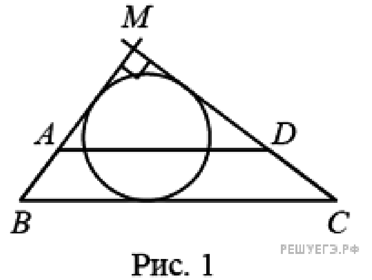


Рис. 1

Предположим что $BC = 30, AD = 20$ (рис. 1). Стороны BC и AD треугольников MBC и MAD параллельны, поэтому эти треугольники подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{3}$. Значит,

$$MB = \frac{AB}{1-k} = 18, MC = \frac{CD}{1-k} = 24.$$

Заметим, что $MB^2 + MC^2 = BC^2$, поэтому треугольник MBC — прямоугольный с гипотенузой BC. Радиус его вписанной окружности равен: $r = \frac{MB + MC - BC}{2} = 6.$

Пусть теперь $AD = 30$, $BC = 20$ (рис. 2). Аналогично предыдущему случаю можно показать, что радиус вписанной окружности треугольника MAD равен 6. Треугольник MAD и MBC подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{3}$. Значит, радиус вписанной окружности треугольника MBC равен $r = 6k = 4$.

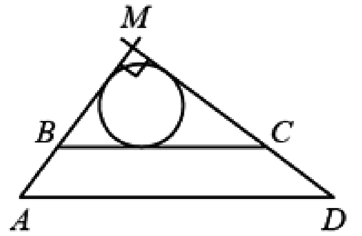


Рис. 2

Ответ: 4; 6.

20. C 5 № 502026. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2 - 7a + 7\sqrt{2x^2 + 49} = 3|x - 7a| - 6|x|$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

Рассмотрим две функции: $f(x) = a^2 - 7a + 7\sqrt{2x^2 + 49}$ и $g(x) = 3|x - 7a| - 6|x|$. Поскольку $x^2 \geq 0$, получаем: $f(x) \geq f(0) = a^2 - 7a + 49$.

Функция $g(x) = 3|x - 7a| - 6|x|$ является кусочно-линейной, причём при $x < 0$ угловой коэффициент равен либо 3, либо 9, а при $x > 0$ угловой коэффициент равен либо –3, либо –9. Значит, функция $g(x)$ возрастает при $x < 0$ и убывает при $x > 0$, поэтому $g(x) \leq g(0) = 21|a|$.

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда $f(0) \leq g(0)$:

$$a^2 - 7a + 49 \leq 21|a| \Leftrightarrow a^2 - 7a - 21|a| + 49 \leq 0.$$

Значит, либо $\begin{cases} a^2 - 28a + 49 \leq 0, \\ a \geq 0, \end{cases}$ откуда $14 - 7\sqrt{3} \leq a \leq 14 + 7\sqrt{3}$, либо

$\begin{cases} a^2 + 14a + 49 \leq 0, \\ a < 0, \end{cases}$ откуда $a = -7$.

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень при $a = -7$ и при $14 - 7\sqrt{3} \leq a \leq 14 + 7\sqrt{3}$ и не имеет корней при других значениях a.

Ответ: $a \in \{-7\} \cup [14 - 7\sqrt{3},\ 14 + 7\sqrt{3}]$.

21. C 6 № 501694. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части —, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41 - 7 - 9 - 11 = 14$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 7 и 7 или 14. Для задуманных чисел 7, 7, 7, 9, 11 и 7, 9, 11, 14 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 7, 7, 7, 9, 11 или 7, 9, 11, 14.