Вариант № 2887346

1. B 1 № 25005.
Шоколадка стоит 40 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 320 рублей в воскресенье?

Решение.
На 320 рублей можно купить 8 шоколадок по 40 рублей. Еще 4 будут даны в подарок. Всего можно будет получить 12 шоколадок.

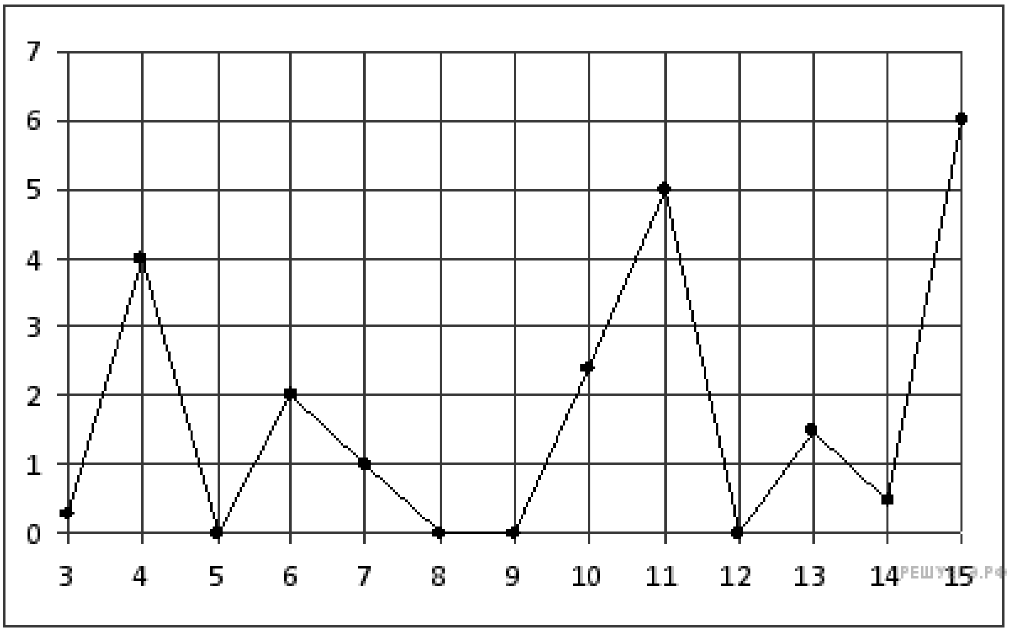
Ответ: 12.

2. B 2 № 26643. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 12 500 рублей. Сколько рублей он получит после вычета налога на доходы?

Решение.
Налог на зарплату Ивана Кузьмича составит $12\,500 \cdot 0{,}13 = 1625$ рублей. Значит, после вычета налога на доходы он получит: $12\,500 - 1625 = 10\,875$ рублей.

Ответ: 10 875.

3. B 3 № 27523. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода не выпадало осадков.



Решение.
Из графика видно, что 4 дня из данного периода (5, 8, 9, 12 февраля) не выпадало осадков (см. рисунок).

Ответ: 4.

4. B 4 № 26687. Для того, чтобы связать свитер, хозяйке нужно 400 граммов шерсти синего цвета. Можно купить синюю пряжу по цене 60 рублей за 50 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 50 рублей за 50 г и окрасить ее. Один пакетик краски стоит 10 рублей и рассчитан на окраску 200 г пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

Решение.

Один моток пряжи весит 50 г, поэтому на свитер нужно 400:50 = 8 мотков. Рассмотрим различные варианты.

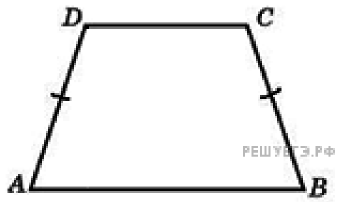
Если покупать готовую пряжу синего цвета, то стоимость свитера будет $60 \cdot 8 = 480$ руб.

На неокрашенную пряжу нужно потратить $50 \cdot 8 = 400$ руб. Но на окраску пряжи потребуется 2 пакетика по 10 руб., то есть еще 20 руб. Итого на свитер из самостоятельно окрашенной пряжи потратится 420 руб.

Второй вариант дешевле, чем первый.

Ответ: 420.

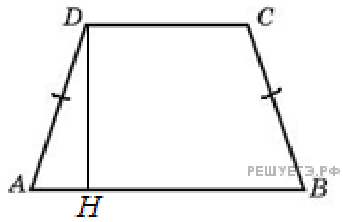
5. B 5 № 27631. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.



Решение.

трапеция равнобедренная, значит

$$AH = \frac{AB - DC}{2} = 6 \text{ и } AD = \frac{P_{ABCD} - (AB + DC)}{2} = 10,$$



тогда,

$$S = \frac{(AB + CD) \cdot DH}{2} = \frac{(AB + CD) \cdot \sqrt{AD^2 - AH^2}}{2} = \frac{40 \cdot 8}{2} = 160.$$

Ответ: 160.

6. B 6 № 320205. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.

Решение.

Требуется найти вероятность произведения трех событий: «Статор» начинает первую игру, не начинает вторую игру, начинает третью игру. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Вероятность каждого из них равна 0,5, откуда находим: 0,5·0,5·0,5 = 0,125.

Ответ: 0,125.

7. B 7 № 315120. Найдите корень уравнения $\log_8 2^{8x-4} = 4$.

Решение.

Используем формулу $\log_{a^m} a^n = \dfrac{n}{m}$:

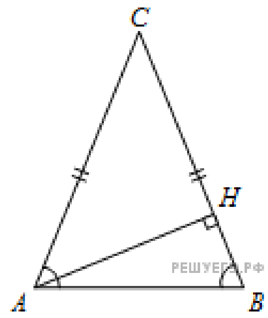
$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \log_{2^3} 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \frac{8x-4}{3} = 4 \Leftrightarrow 8x - 4 = 12 \Leftrightarrow x = 2.$$

Приведем другое решение:

$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 8^4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 2^{12} \Leftrightarrow 8x - 4 = 12 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ:2.

8. B 8 № 27354. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна 7, $BH = 24$. Найдите $\sin BAC$.



Решение.
Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании.

$$\sin\angle BAC = \sin\angle ABH = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{\sqrt{AH^2+BH^2}} = \frac{7}{\sqrt{625}} = 0,28.$$

Ответ: 0,28.

9. В 9 № 119978. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 13t + 23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

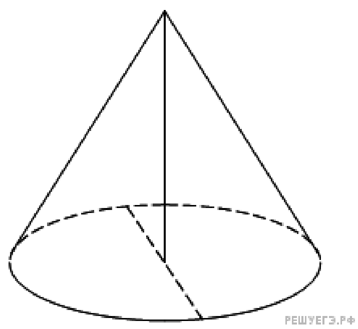
Решение.

Найдем закон изменения скорости: $v(t) = x'(t) = 2t - 13$ м/с. Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 3 м/с, решим уравнение:

$$2t - 13 = 3 \Leftrightarrow 2t = 16 \Leftrightarrow t = 8 \text{ с}.$$

Ответ: 8.

10. В 10 № 907. Высота конуса равна 5, а диаметр основания – 24. Найдите образующую конуса.



Решение.
образующая конуса по теореме Пифагора равна

$$l = \sqrt{h^2 + R^2_{\text{осн}}} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{D_{\text{осн}}}{2}\right)^2} = \sqrt{25+144} = 13.$$

Ответ: 13.

11. В 11 № 77407. Найдите значение выражения $2^{3\sqrt{7}-1} \cdot 8^{1-\sqrt{7}}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$2^{3\sqrt{7}-1} \cdot 8^{1-\sqrt{7}} = 2^{3\sqrt{7}-1} \cdot 2^{3(1-\sqrt{7})} = 2^{3\sqrt{7}-1+3-3\sqrt{7}} = 2^2 = 4.$$

Ответ: 4.

12. B 12 № 27956. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия – монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 100 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Решение.

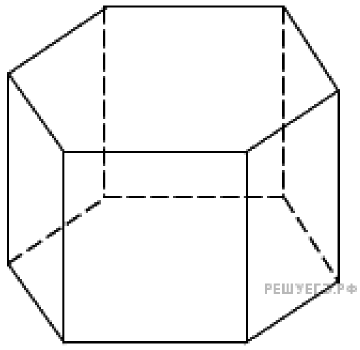
Задача сводится к решению неравенства $r(p) \geq 240$:

$$r(p) = q \cdot p = (100 - 10p)p = 100p - 10p^2,$$
$$r(p) \geq 240 \Leftrightarrow 10p^2 - 100p + 240 \leq 0 \Leftrightarrow p^2 - 10p + 24 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \leq p \leq 6.$$

Ответ: 6.

13. B 13 № 245357.

Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны $\sqrt{3}$.



Решение.

Объем призмы равен произведению площади основания на высоту. Высотой правильной призмы является ее боковое ребро. Основание призмы — правильный шестиугольник. Площадь правильного шестиугольника со стороной a вычисляется по формуле $S = 1,5\sqrt{3}a^2$. Следовательно,

$$V = S_{\text{осн}}H = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{2}a^2 = \frac{27}{2} = 13,5.$$

Ответ: 13,5.

14. B 14 № 26597. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба?

Решение.

Обозначим x — количество литров воды, пропускаемой первой трубой в минуту, тогда вторая труба пропускает $x + 1$ литров воды в минуту. Резервуар объемом 110 литров первая труба заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба, отсюда имеем:

$$\frac{110}{x} - \frac{110}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{110}{x^2 + x} = 1 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} 110 = x^2 + x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x - 110 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10; \\ x = -11 \end{array}\right. \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 10.$$

Таким образом, первая труба пропускает 10 литров воды в минуту.

Ответ: 10.

15. B 15 № 77442. Найдите наибольшее значение функции $y = 9x^2 - x^3$ на отрезке $[2; 10]$.

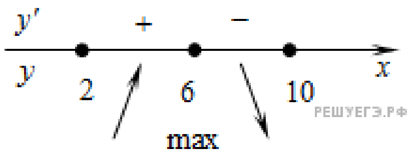
Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 18x - 3x^2 = 3x(6 - x).$$

Найдем нули производной: $x = 0$ и $x = 6$, на заданном отрезке лежит только число 6.

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 6$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение: $y(6) = 9 \cdot 36 - 6 \cdot 36 = 324 - 216 = 108$.

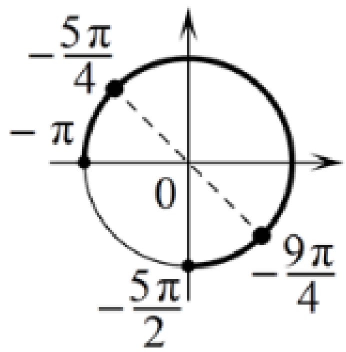
Ответ: 108.

16. C 1 № 501944. а) Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{-5\pi}{2}, -\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:



$$2^{\sin x} \cdot 5^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x} \Leftrightarrow 5^{\sin x} = 5^{-\cos x} \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} = -1,$$

откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

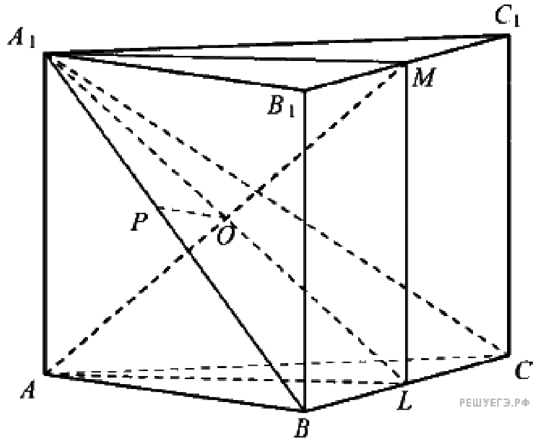
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{-5\pi}{2}, -\pi\right]$. Получим числа: $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, б) $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}$.

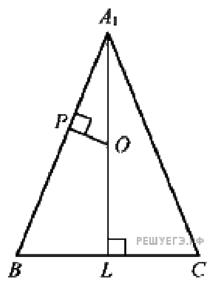
17. C 2 № 503000. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1, является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM.

Решение.

Пусть данное сечение призмы — квадрат AA_1ML. Тогда диагонали перпендикулярны: $AM \perp A_1L$, а по теореме о трёх перпендикулярах $AM \perp BC$. Следовательно, $AM \perp A_1BC$. Отсюда следует, что искомым расстоянием между прямыми A_1B и AM является длина перпендикуляра OP, опущенного из точки O пересечения диагоналей квадрата AA_1ML на прямую A_1B, так как $OP \perp A_1B$ и $OP \perp AM$.



Сторона квадрата AA_1ML равна высоте треугольника ABC, то есть $AL = \sqrt{21}$, а его диагональ $A_1L = \sqrt{42}$. В равнобедренном треугольнике A_1BC основание $BC = 2\sqrt{7}$, боковая сторона $A_1B = 7$. Отсюда, используя подобие треугольников A_1OP и A_1BL, найдём



$$OP = \frac{A_1O \cdot LB}{A_1B} = \frac{A_1L \cdot BC}{4A_1B} = \frac{\sqrt{42} \cdot 2\sqrt{7}}{4 \cdot 7} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

18. C 3 № 501217. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2 \cdot 25^x - 5^{x+1} + 2 \le 0, \\ \left(x^2+1\right)^{\lg\left(7x^2-3x+1\right)} + \left(7x^2-3x+1\right)^{\lg\left(x^2+1\right)} \le 2. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим первое неравенство системы.

Положим $t = 5^x$. Тогда неравенство принимает вид $2t^2 - 5t + 2 \le 0$, откуда $\frac{1}{2} \le t \le 2$. Таким образом, $2^{-1} \le 5^x \le 2 \Leftrightarrow -\log_5 2 \le x \le \log_5 2$.

Рассмотрим второе неравенство системы.

Так как $x^2+1>0$ и $7x^2-3x+1>0$ для любого $x \in \mathbb{R}$, воспользовавшись тождеством $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ и методом интервалов, получаем:

$$\left(x^2+1\right)^{\lg\left(7x^2-3x+1\right)} + \left(7x^2-3x+1\right)^{\lg\left(x^2+1\right)} \le 2 \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^{\lg\left(7x^2-3x+1\right)} \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg\left(\left(x^2+1\right)^{\lg\left(7x^2-3x+1\right)}\right) \le \lg 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg\left(7x^2-3x+1\right)\lg\left(x^2+1\right) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{3}{7}.$$

Сравним числа $a = \log_5 2$ и $b = \frac{3}{7}$. Имеем $7a = 7\log_5 2 = \log_5 2^7 = \log_5 128 > 3 = 7b$, а, значит, $a > b$, т. е., $\log_5 2 > \frac{3}{7}$, откуда и получаем решение данной системы $0 \le x \le \frac{3}{7}$.

Ответ: $\left[0; \frac{3}{7}\right]$.

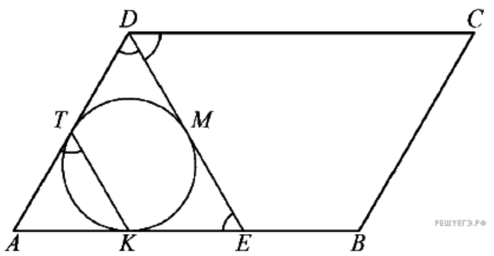
19. C 4 № 503130. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 8$ и $KT = 4$.

Решение.

а) Прямые AE и CD параллельны, а DE — биссектриса угла ADC, поэтому $\angle AED = \angle CDE = \angle ADE$. Значит, треугольник ADE равнобедренный, $AD = AE$. Отрезки AK и AT касательных, проведённых к окружности из точки A, равны, значит, треугольник ATK также равнобедренный, причём угол при вершине A у этих треугольников общий. Поэтому $\angle ATK = \angle ADE$. Следовательно, $KT \parallel DE$.



б) Пусть окружность касается основания DE равнобедренного треугольника ADE в точке M. Тогда M — середина DE. Обозначим $DM = x$. Тогда $DT = DM = x$, $AT = AD - DT = 8 - x$. Треугольник ATK подобен треугольнику ADE, поэтому $\frac{AT}{AD} = \frac{TK}{DE}$, или $\frac{8-x}{8} = \frac{4}{2x}$. Отсюда находим, что $x = 4$. Тогда $DE = 2x = 8$, значит, треугольник ADE равносторонний. Следовательно, $\angle BAD = \angle EAD = 60°$.

Ответ: 60°.

20. C 5 № 502078. Найдите все значения a, при которых уравнение $|\cos^2 x + 2 - 2a| = \cos^2 x + +2a$ имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ единственный корень.

Решение.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $\cos^2 x+2\sin x-2a\geq 0$. Исходное уравнение примет вид

$$\cos^2 x+2\sin x-2a=\cos^2 x+\sin 2x+2a\Leftrightarrow \sin x=4a.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ единственный корень при $-1\leq 4a<0$, откуда $-\frac{1}{4}\leq a<0$. Подставив $\sin x=4a$ в неравенство $\cos^2 x+2\sin x-2a\geq 0$, получим: $1-16a^2+8a-2a\geq 0$, откуда $-\frac{1}{8}\leq a\leq\frac{1}{2}$.

В этом случае уравнение $\sin x=4a$ при условии $\cos^2 x+2\sin x-2a\geq 0$ имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ единственный корень $x=\arcsin(4a)$ при $-\frac{1}{8}\leq a<0$. и не имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ корней при $a<-\frac{1}{8}$ и при $a\geq 0$.

Второй случай: $\cos^2 x+2\sin x-2a<0$. Исходное уравнение примет вид

$$\cos^2 x+2\sin x-2a=-\cos^2 x-\sin x-2a\Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\sin x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2\sin x+1)(\sin x-2)=0\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ единственный корень $x=-\frac{\pi}{6}$. Подставив $x=-\frac{\pi}{6}$ в неравенство $\cos^2 x+2\sin x-2a<0$, получим: $\frac{3}{4}-2\cdot\frac{1}{2}-2a<0$, откуда $a>-\frac{1}{8}$.

В этом случае уравнение $2\cos^2 x+3\sin x=0$ при условии $\cos^2 x+2\sin x-2a<0$ имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ единственный корень $x=-\frac{\pi}{6}$ при $a>-\frac{1}{8}$ и не имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ корней при $a\leq-\frac{1}{8}$.

Уравнение $|\cos^2 x+2-2a|=\cos^2 x++2a$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$:

- при $a<-\frac{1}{8}$ не имеет корней;
- при $a=-\frac{1}{8}$ имеет единственный корень $x=-\frac{\pi}{6}$;
- при $-\frac{1}{8}<a<0$ имеет два различных корня $x=-\frac{\pi}{6}$ и $x=\arcsin(4a)$;
- при $a\geq 0$ имеет единственный корень $x=-\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $a=-\frac{1}{8}$; [0; +∞)

21. C 6 № 501889. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k-8l+0\cdot m=-3(k+l+m)$.

Вопрос а) Заметим, что в лувой части приведенного выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k+l+m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40<k+l+m<48$, поэтому $k+l+m=44$. Таким образом, написано 44 числа.

Вопрос б) Приведем равенство $4k-8l=-3(k+l+m)$ к виду $5l=7k+3m$. Так как $m\geq 0$, получаем, что $5l\geq 7k$, откуда $l>k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

Вопрос в) Подставим $k+l+m=44$ в правую часть равенства $4k-8l=-3(k+l+m)$: $4k-8l=-132$, откуда $k=2l-33$. Так как $k+l\leq 44$, получаем: $3l-33\leq 44$, $3l\leq 77$, $l\leq 25$, $k=2l-33\leq 17$; то есть положительных чисел не более 17.

Приведем пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число −8 и два раза написан 0. Тогда $\dfrac{4\cdot 17-8\cdot 25}{44}=\dfrac{68-200}{44}=-3$, указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.