ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НГУ

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ КУРСЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
В СУНЦ НГУ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 8 КЛАССОВ

Учебное пособие

Издание второе, исправленное

Новосибирск
2010

УДК 330.1
ББК 65.012

П 44

Подготовительные курсы по математике в СУНЦ НГУ для учащихся 8-х классов. Учеб. пособие / Сост.: А. М. Быковских, Г. Я. Куклина. 2-е изд., испр. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. 78 с.

Пособие предназначено для учащихся 8-х классов общеобразовательных школ, желающих расширить и углубить свои знания и умения в математике с целью продолжения обучения в старших классах на уровне выше среднего, будь то самостоятельная работа, учеба в профильных классах и школах, или индивидуальные занятия с опытным преподавателем.

Под редакцией А. А. Никитина, А. С. Марковичева

Рецензент
к.ф.-м.н., доцент М. Г. Пащенко

© Новосибирский государственный Университет, 2010
© СУНЦ НГУ, 2010
© Быковских А. М., Куклина Г. Я., 2010

Предисловие

В Новосибирском государственном университете и Специализированном учебно-научном центре НГУ накоплен значительный опыт довузовской работы со школьниками. В течение многих десятилетий преподаватели НГУ участвуют в проведении олимпиад разного уровня; успешно работают заочная школа и подготовительные курсы для будущих абитуриентов; ежегодно проводится Летняя физико-математическая школа, через которую осуществляется набор учащихся в СУНЦ НГУ; ведутся факультативные и кружковые занятия в ряде школ Новосибирска. Более десяти лет назад в ответ на запросы учащихся и родителей на подготовительных курсах НГУ приступили к занятиям по математике, физике и химии со школьниками девятых классов, желающими поступить в СУНЦ НГУ. Наряду с этим поступали предложения и просьбы по поводу возможности начала занятий с учащимися восьмых классов, поскольку не везде в школах есть условия для подготовки ребят к восприятию материала повышенного уровня по математике на следующих ступенях обучения.

Предлагаемое учебное пособие в определенной мере отражает опыт индивидуальных занятий по математике с учащимися восьмых классов, которые в дальнейшем продолжили свое обучение на подготовительных курсах СУНЦ НГУ.

Данное пособие включает в себя темы и задачи, которые могут быть условно разнесены на три раздела:

– углубление школьного курса;
– факультативный материал;
– олимпиадные задачи начального уровня.

Учебное пособие рассчитано на учащихся восьмых классов общеобразовательных школ, желающих расширить и углубить свои знания и умения по математике с целью продолжить свое обучение в старших классах на уровне выше среднего, будь то занятия на подготовительных курсах в СУНЦ НГУ, самостоятельная работа или учеба в профильных классах и школах.

Большая часть предлагаемых задач заимствована из приведенного в пособии списка литературы, часть используемых заданий взята из пособий Заочной физико-математической школы при СУНЦ НГУ прошлых лет, авторам и разработчикам которых мы выражаем искреннюю благодарность.

Пособие может быть интересным и полезным не только для тех, кто уже определился в своих увлечениях, ни и для тех, кто еще только собирается это сделать. Ученики, родители, учителя имеют возможность идти дальше по предлагаемым конспектам. Данный курс может быть использован для самостоятельных занятий или при работе в классе он может помочь подготовить мышление ребят к качественному восприятию того объема знаний и такого стиля преподавания, которые их ждут в случае обучения на подготовительных курсах СУНЦ НГУ.

Подбор задач осуществлен преподавателями Специализированного учебно-научного центра НГУ, желающими видеть своих вновь приходящих учеников знающими, умеющими и понимающими важные математические факты и понятия, готовыми слушать и слышать математические рассуждения.

Процесс усвоения новых математических идей или методов, как правило, требует времени для ознакомления, привыкания, осознания и включения этого нового в ежедневные действия и умственные усилия по решению задач. Благодаря определенной последовательности подобранных задач можно постепенно продвигаться по ступенькам некоторой воображаемой винтовой лесенки, знакомясь с новой идеей, затем, через некоторое время, узнавая ее в новой задаче и, наконец, применяя ее самому на одном из следующих этапов работы.

Наряду с текстами занятий и домашних заданий в данном пособии в виде «Приложения» предлагается подборка олимпиадных задач начального уровня для самостоятельной работы.

Тем учащимся, кто уже готов к самостоятельной работе, рекомендуется стараться решать все задачи самостоятельно и только потом сверять решение. Тем ученикам, кто еще не очень уверен в правильности своих математических рассуждений, рекомендуется самостоятельно разбираться в предлагаемых решениях с целью понять математические приемы и методы, ведущие к решению, и после этого пробовать решать аналогичные задания самостоятельно.

Хочется надеяться, что пособие поможет всем, кто к этому стремится, стать более уверенным в своих математических знаниях и умениях, более способным к решению необычных и нестандартных задач.

Задачи подбирались на свой «вкус», мы будем рады, если они вам тоже понравятся.

Желаем успехов!

Занятие 1.
Вводное

1. Разложите на множители выражение: $9(a^2+b^2-1)-$ $-42ab+40b^2-40$.

2. Свежие грибы содержат 90 % влаги, сушеные – 12 %. Сколько сушеных грибов получится из 10 кг свежих грибов?

3. Три мальчика – Игорь, Дима и Юра купили вместе один мяч. Каждый из них дал денег не больше половины той суммы, которую дали два других вместе. Мяч стоил 18 руб. Сколько денег заплатил Дима?

4. В некотором месяце три воскресенья пришлись на четные числа. Какой день недели был 20-го числа этого месяца?

5. Дан угол и точка M внутри него. Проведите прямую через эту точку так, чтобы ее отрезок между сторонами угла делился данной точкой пополам.

6. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 55^\circ$; $\angle B = 67^\circ$.

7. Докажите, что если в треугольнике ABC: $AB = 2AC$, то медиана, выходящая из вершины C, перпендикулярна биссектрисе угла A.

8. В равнобедренном треугольнике ABC: $AB = BC = 2008$, $\angle ABC = 36^\circ$. Биссектрисы AK и CM пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника AMO.

Домашнее задание 1

1. Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6 % примесей. Каков процент примесей в руде?

2. Отцу сейчас в три раза больше лет, чем сыну было 10 лет назад, а когда сыну будет столько лет, сколько отцу сейчас, то отцу будет в 2 раза больше лет, чем сыну через 9 лет после настоящего момента. Сколько лет сейчас отцу и сколько лет сыну?

3. Известно, что $a+b+c=7$, $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}=\dfrac{7}{10}$. Найдите значения выражения: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}$.

4. Две стороны четырехугольника равны 1 и 4. Одна из диагоналей равна 2 и делит четырехугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите периметр четырехугольника.

5. Подряд выписали все целые числа от 1 до 100. Сколько раз в этой записи встречаются цифры: а) 0; б) 1; в) 3?

6. Сколько имеется четырехзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них 97?

Занятие 2.
Уравнение и график прямой. Модуль. График модуля функции

Модуль числа a равен:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0; \\ -a, & \text{a} < 0. \end{cases}$$

1. Решите уравнения:

а) $|-x| = 9$;

б) $|1-x| = 2$.

2. Решите неравенства и изобразите решения на числовой оси:

а) $|x| > 4$;

б) $|x| < 1$;

в) $|x-1| < 3$.

График прямой линии вида $y = kx$ проходит через точку $O(0,0)$.

3. Напишите уравнения прямой $y = kx$, проходящей через данную точку: $A(1,2)$; $B(-2,-6)$.

4. Постройте графики функций:

а) $y = |-x|$,

б) $y = |2x|$,

в) $y = |-2x|$.

График прямой линии вида $y = kx + b$.

5. Построите графики функций, найдите координаты точек пересечения графиков с осями координат:

а) $y = x + 1$;

б) $y = -x + 1$;

в) $y = 2x - 1$.

6. Напишите уравнения прямых, проходящих через данные пары точек:

а) (0,1), (1,0);
б) (–2,1), (1,–4);
в) (5,5), (1,–3).

График функции $y = |kx + b|$.

7. Построите графики функций:

а) $y = |x + 1|$;

б) $y = |-x + 5|$;

в) $y = |-x - 3|$.

График функции $y = |kx| + b$.

8. Построите графики функций:

а) $y = |x| + 7$;

б) $y = |-x + 2| + 3$;

в) $y = |-x - 1| - 9$.

9. Найдите координаты точки пересечения графиков функций: $y = -2x + 7$ и $y = 4x$.

Домашнее задание 2

1. Велосипедист выехал из пункта *A*. Когда он был на расстоянии 200 м от *A*, за ним вдогонку отправился мотоциклист. Скорость мотоциклиста в 2 раза больше скорости велосипедиста. На каком расстоянии от пункта *A* мотоциклист догонит велосипедиста?

2. Один из углов треугольника в 2 раза больше второго, а третий угол больше первого на 30°. Каковы углы треугольника?

3. Постройте график функции $y = |x| + 4$.

4. Постройте график функции $y = |-x - 4|$.

5. Решите неравенство: $|x + 3| < 5 - x$.

6. Среди 17 монет одна фальшивая. Найдите фальшивую монету тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь, если известно, что она легче.

Занятие 3.
Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора

Прямоугольным называется треугольник, у которого есть прямой угол.

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* даны катеты *a* и *b*. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.

2. В треугольнике *ABC* проведена высота *AD*. Докажите, что $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

3. В равностороннем треугольнике определите сторону по данной высоте *h*.

4. Докажите, что в прямоугольной трапеции разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований.

5. Докажите, что для любой внутренней точки равностороннего треугольника сумма расстояний до всех сторон постоянна.

6. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $\sqrt{17}$, а произведение катетов равно 4. Найдите катеты этого треугольника.

7. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла является одновременно и биссектрисой угла между медианой и высотой, выходящими из этой вершины.

8. Докажите, что в прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности можно вычислить по формуле $r = (a + b - c)/2$, где a, b, c – длины двух катетов и гипотенузы соответственно.

9. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб, сторона которого равно 25, а одна из диагоналей равна 14.

10. Основания трапеции равны 10 и 20, боковые стороны 6 и 8. Найдите угол, под которым пересекаются при продолжении боковые стороны трапеции.

11. Покажите, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Домашнее задание 3

1. Биссектриса прямого угла делит гипотенузу прямоугольного треугольника на части, равные $\frac{15}{7}$ и $\frac{20}{7}$. Определите катеты.

2. В остроугольном треугольнике ABC точка H – точка пересечения высот треугольника (ортоцентр), $AB = CH$. Найдите $\angle C$.

3. Разрежьте данный треугольник на три части, из которых можно было бы составить прямоугольник.

4. Покажите, что число $7^{100} - 2^{100}$ делится на 45.

5. Найдите двузначное число, если известно, что сумма кубов его цифр равна 243, а произведения суммы его цифр на произведение цифр этого числа равно 162.

6. Упростите выражение: $\sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}$.

Занятие 4.
Логические задачи

1. Несколько команд разыграли первенство по волейболу, сыграв каждая с каждой по одному разу. Докажите, что если какие-нибудь две команды одержали одинаковое число побед, то найдутся такие три команды A, B и C, что A выиграла у B, B у C и C у A (заметим, что при игре в волейбол нет ничьих).

2. Имеются 4 пакета и весы с двумя чашками без гирь. С помощью 5 взвешиваний расположить пакеты по весу.

3. Восстановите математическую запись примера, в котором разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы – одинаковые цифры:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{ОДИН}\\ \text{ОДИН}\end{array} \\ \hline \text{МНОГО}\end{array}.$$

4. Сто монет разложены в 10 стопок, по 10 монет в каждой. В одной из стопок все монеты фальшивые. Масса каждой нормальной монеты 5 г, а фальшивой – на 0,5 г меньше. Как при помощи одного взвешивания на весах с разновесами определить, в какой стопке находятся фальшивые монеты?

5. Четверо ребят соревновались в беге. После соревнований каждого из них спросили, какое место он занял. Слава ответил: «Я не был ни первым, ни последним». Миша сказал: «Я был первым». Дима: « Я не был первым». Паша: «Я был последним». Три из этих ответов правильные, а один неверный. Кто сказал неправду? Кто был первым?

6. В классе 30 человек, часть из которых увлекается спортом, часть – танцами, часть – пением и еще часть – не увлекается ничем. Известно, что в классе спортсменов – 14, танцоров – 16, певцов – 16. Кроме того, только танцами увлекаются – 4, только спортом – 4, только пением – 5, увлекаются и спортом и танцами 6 человек, из них один увлекается и пением. Сколько человек в классе не увлекаются ни одним из указанных видов деятельности? Сколько человек увлекается и танцами и пением одновременно?

Домашнее задание 4

1. Найдите все такие двузначные числа A, для каждого из которых два из следующих четырех утверждений верны, а два – неверны:
   а) A делиться на 5;
   б) А делится на 23;
   в) $A+7$ есть точный квадрат;
   г) $A-10$ есть точный квадрат.

2. В классе случилось происшествие. Учитель решил установить, как все было. Он пригласил мальчиков – Гену, Алика и Славу – и попросил каждого рассказать, как все было. Каждый рассказал свою версию. Затем учитель спросил, кто рассказал верно. Гена сказал, что Алик рассказал неверно. Алик сказал, что Слава рассказал неверно. Слава сказал, что Алик и Гена рассказали неверно. После этого учитель сразу назвал мальчика, рассказ которого был верным. Кто из трех мальчиков верно рассказал о происшествии?

3. Три ученика одной школы – Коля, Дима и Наташа участвовали в районной математической олимпиаде и получили одну первую, одну вторую и одну третью премии. Но им не сообщили, кто какую премию получил. Позже Таня сказала, что Дима получил не первую, Коля – не вторую, Наташа получила вторую премию. Потом оказалось, что из этих трех высказываний верным было только одно, а два ложны. Какую премию получил каждый ученик?

4. Аня младше Вани. Когда Ване было столько лет, сколько Ане сейчас, их матери было на 3 года меньше, чем Ане с Ваней вместе

теперь. Сколько лет было Ване, когда матери было столько лет, сколько Ване теперь?

5. Как отмерить 20 мин для варки каши, имея песочные часы на 9 и 7 мин?

6. Три человека, работая вместе, посадили 100 деревьев за 5 часов. Первый за 1 час посадил столько же, сколько второй и третий вместе за 1 час, второй за 5 час посадил столько же, сколько первый и третий вместе за 1 час. За сколько часов второй, работая один, посадил бы 100 деревьев?

Занятие 5.
Начальные построения с помощью циркуля и линейки

Задачи

1. Опустите перпендикуляр к отрезку из заданной точки на плоскости.
2. Постройте угол равный данному.
3. Постройте треугольник по трем сторонам.
4. Постройте в треугольнике биссектрису, медиану и высоту.
5. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две заданные точки.
6. Разделите данный отрезок на 4 равные части.
7. Постройте треугольник по стороне, углу при этой стороне и высоте к ней.
8. Дан угол и точка M внутри него. Проведите прямую через эту точку так, чтобы ее отрезок между сторонами угла делился данной точкой в отношении 1 : 2.
9. Постройте параллелограмм, у которого середины трех сторон лежат в заданных точках.
10. Дан треугольник ABC с прямым углом A. На стороне AB постройте точку M, находящуюся на расстоянии AM от прямой BC.

Домашнее задание 5

1. Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла.
2. Постройте треугольник по стороне, высоте и медиане, проведенным к этой стороне.

3. При каких натуральных значениях n значение данного выражение является целым числом:
$\left(3/n! \;+\; 5/(n+1)!\right)/\left(7/n! \;-\; 6n/(n+1)!\right)$?
4. Найдите все такие целые числа x и y, для которых выполняется условие $x^2 - y^2 = 4$.
5. Разложите на множители выражение $(n+1)^4 + 4$.
6. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля в 5 и 40 %. Сколько надо взять каждого сорта стали, чтобы получить 140 т стали с содержанием никеля 30 %?

Занятие 6.
Рациональные дроби

Действия с дробями:

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c};\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc};\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

1. Сократите дроби:

а) $\dfrac{c^4-3c^2+2}{c^5+1}$; б) $\dfrac{64x^3-27y^6}{9y^4-16x^2}$.

2. Упростите выражение и найдите его числовое значение:

$\dfrac{9a^2-24ab+16b^2-25}{3a-4b-5}$, при $a=\dfrac{1}{9}$; $b=2\dfrac{1}{3}$.

3. Преобразуйте в дробь выражение:

$\dfrac{m^2-mn}{m^2n+n^3}-\dfrac{2m^2}{n^3-mn^2+m^2n-m^3}$.

4. Докажите, что если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, то

а) $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{c}{c+d}$; б) $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$.

5. Постройте графики функций:

а) $y=\dfrac{2}{x}$; в) $y=\dfrac{2}{x}+1$;

б) $y=\dfrac{2}{x+1}$; г) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$;

д) $y = \dfrac{2}{|x|}$; е) $y = \dfrac{2}{x^2}$.

6. Найдите a и b из тождеств:

а) $\dfrac{1}{(x-6)(x+1)} = \dfrac{a}{x-6} + \dfrac{b}{x+1}$;

б) $\dfrac{2}{x^2+x-6} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+3}$.

7. Найдите, при каких значениях x выполняется равенство:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x+1)^2}{(x^2-1)(x-2)}.$$

8. Выполните действия:

а) $\dfrac{3}{2y-6} - \dfrac{y}{y^2-9} + \dfrac{5}{y+3}$; б) $\left(\dfrac{x^2-9}{-6}\right) \div \left(\dfrac{x-3}{18}\right)$.

9. (Старинная задача). Пифагор на вопрос о числе учеников в его школе ответил, по преданию, так: «Половина учеников изучает математику, четверть музыку, седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть еще и три женщины». Сколько было учеников у Пифагора?

Домашнее задание 6

1. Преобразуйте в дробь выражение:

$$\frac{a+2b}{3a-3b} + \frac{3c-a}{2c-2a} - \frac{a^2-bc}{ab+ac-bc-a^2}.$$

2. Постройте графики функций:

а) $y = \dfrac{x+3}{2-x}$;

б) $y = \dfrac{x^2+4x+3}{9-x^2}$;

в) $y = \dfrac{x-5}{x-5}$.

3. При каких натуральных значениях n значения данных выражений являются целыми числами:

а) $\dfrac{2n-3}{n+1}$; б) $\dfrac{3n^2-26n+35}{4n-28}$?

4. Определите, сколькими нулями оканчивается число 49!

5. Длины сторон a, b, c треугольника удовлетворяют равенству $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{c}{a+b}$. Найдите углы треугольника, если один из них равен $100°$.

6. Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Двигаясь без остановок с постоянной скоростью, они встретились через 30 час после выхода. Сколько времени затратил на прохождение пути AB каждый поезд, если известно, что первый прибыл в B на 25 час позже, чем второй прибыл в A?

Занятие 7.
График квадратичной функции

Функция вида: $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – числа, причем $a \neq 0$, называется квадратичной.

1. Выделяя полный квадрат, найдите координаты вершин парабол:

а) $y = x^2 - 8x + 14$;

б) $y = x^2 - 2x - 8$;

в) $y = x^2 + 10x + 10$.

2. По данным корням и коэффициенту a квадратных уравнений восстановите сами уравнения:

$a = 1$, $x_1 = -3$, $x_2 = 4$;

$a = -1$, $x_1 = 5$, $x_2 = 1$;

$a = -2$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 0$.

Построение графиков квадратичных функций

График функции $y = ax^2$, $a \neq 0$, проходит через точку $O(0,0)$; при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз.

Преобразования графиков функций

График параболы вида $y = ax^2 + b$ строится переносом графика параболы $y = ax^2$ вдоль оси OY на b единиц вверх или вниз в зависимости от знака b.

График параболы вида $y = a(x - x_0)^2$ строится переносом графика параболы $y = ax^2$ вдоль оси OX на x_0 единиц вправо или влево в зависимости от знака x_0.

График параболы вида $y = a(x - x_0)^2 + b$ строится последовательными сдвигами графика параболы $y = ax^2$ вдоль осей OY и OX.

При построении графика квадратичной функции вида $y = ax^2 + bx + c$ вначале выделяем полный квадрат, преобразовываем вид функции и затем строим график движениями графика функции $y = ax^2$ вдоль осей.

3. В уравнении параболы найдите коэффициенты a, b, c, если известно, что ее график проходит через точки:

а) (0,0), (2,1), (–2,1);

б) (1,1), (2, –1), (0,–1);

в) (0,2), (3,2), (2,1).

4. Постройте графики функций:

а) $y = x^2 - 2x - 2$;

б) $y = -x^2 + 2x - 2$;

в) $y = \left|x^2 - 5x + 6\right|$;

г) $y = \dfrac{|x-2|}{2-x}\left(x^2 - 2x\right)$.

5. Решите графически уравнения:

а) $x^2 - x - 2 = 0$;

б) $2x^2 - 3x - 4 = 0$.

6. Решите графически системы уравнений:

а) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 5x - y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

7. Найдите наибольшее значение выражения:

$f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

8 Найдите наименьшее значение выражения:

$f(x) = x^2 + 2x - 3$.

9. Высота прямоугольника составляет 75 % его основания. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 48.

Домашнее задание 7

1. Найдите p и g, если точка $A(1;–2)$ является вершиной параболы $y = x^2 + px + g$.

2. Постройте графики функций:

а) $y = (x-1)^2(x-2) - (x-2)^2(x-1)$;

б) $y = x|x| - 1$;

в) $y = \left|x^2 - 3x + 2\right|$.

3. Решите графически систему:

$\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y + x = 1. \end{cases}$

4. Двое рабочих вместе сделали за четыре дня две трети всей работы. За сколько дней каждый рабочий сделает один всю работу, если известно, что первому рабочему потребуется для этого на пять дней меньше, чем второму.

5. Пусть $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 10$. Докажите, что $x - 2y \le 200$.

6. Можно ли на клетчатой бумаге нарисовать равносторонний треугольник с вершинами в узлах?

Занятие 8.
Площади многоугольников

Задачи

1. Сторона ромба равна a, а отношение длин его диагоналей равно 3 : 4. Найдите площадь ромба.

2. Покажите, как произвольный четырехугольник можно превратить в равновеликий ему треугольник.

3. Постройте параллелограмм, равновеликий по площади заданному треугольнику.

4. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точка M – середина CD, точка N – середина DE. Отрезки AM и BN пересекаются в точке L. Докажите, что площадь четырехугольника $LNDM$ равна площади треугольника ABL.

5. Определите площадь треугольника ABC, если известно что $AB = 29$, $BC = 25$, и $AC = 6$.

6. Найдите площадь треугольника AB, если $AB = 3$, $BC = 7$, длина медианы $BM = 4$.

7. Дан выпуклый четырехугольник. Середины его сторон последовательно соединены отрезками. Выразите площадь полученного четырехугольника через площадь данного.

8. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению его наибольшей и наименьшей диагоналей. (Правильным называется выпуклый многоугольник, у которого все углы при вершинах равны и все стороны равны.)

9. В треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найдите углы треугольника.

10. Периметр правильного шестиугольника равен P. Вычислите его площадь.

11. В трапеции $ABCD$: AD и BC – основания, AC и BD – диагонали, пересекающиеся в точке O. Докажите, что $S_{AOB} = S_{COB}$.

12. На сторонах прямоугольника $ABCD$ со сторонами a и b во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABM, BNC, CDK, ADL. Найдите площадь четырехугольника $MNKL$.

Домашнее задание 8

1. Докажите, что площадь квадрата, построенного на катете равнобедренного прямоугольного треугольника вдвое больше площади квадрата, построенного на высоте, проведенной к гипотенузе.

2. Разделите трапецию одной прямой на две фигуры равной площади.

3. Решите уравнение:
$$1-(2-(3-(\dots(1998-(1999-(2000-x)))\dots)))=1000.$$

4. Известно, что 9 кг ирисок стоят дешевле 10 руб., а 10 кг тех же ирисок – дороже 11 руб. Сколько стоит 1 кг этих ирисок?

5. Бумажный прямоугольник $ABCD$ сложили так, чтобы вершины A и C совместились, и получился пятиугольник. Докажите, что площадь пятиугольника меньше $3/4$ площади прямоугольника.

6. В квадрат со стороной a вписан другой квадрат, вершины которого делят стороны данного в отношении 3 : 4. Найдите сторону вписанного квадрата.

Занятие 9.
Квадратные уравнения

1. Выделяя полный квадрат трехчлена, решите уравнения:

а) $x^2 - 8x - 65 = 0$;

б) $x^2 + 12x = 35$.

2. Решите квадратные уравнения:

а) $x^2 + 8x - 33 = 0$; б) $x^2 - 4|x| = 45$.

3. Решите уравнения:

а) $6x + \dfrac{(3+5x)^2}{2} = \dfrac{8-2x}{5} - \dfrac{(x+3)(x+7)}{2}$;

б) $\dfrac{5x-1}{9} + \dfrac{3x-1}{5} = \dfrac{2}{x} + x - 1$.

4. Докажите, что если x_1 и x_2 – действительные корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

5. Используя задачу 4, сократите дроби

а) $\dfrac{a^2 + 6a - 91}{a^2 + 8a - 105}$; б) $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2}$.

6. Постройте графики функций:

а) $y = x^2 - 2$;

б) $y = (x-2)^2$;

в) $y = x^2 - 2x - 4$.

7. Решите графически квадратное уравнение $x^2 + x - 2 = 0$.

8. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 5x - y = 6. \end{cases}$

9. Из пункта A отправился по течению плот. Через 5 ч 20 мин вслед за ним отправилась моторная лодка, скорость которой на 12 км/ч больше скорости плота. Лодка догнала плот, проплыв 20 мин. Найдите скорость плота.

10. При каких значениях параметра a, уравнение $x^2 + 2x + a = 0$ не имеет действительных корней?

11. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равны: $x_1 = 1$ и $x_2 = c/a$.

Домашнее задание 9

1. Выделяя полный квадрат, решите уравнения:

а) $x^2+2x-48=0$; б) $x^2-x-20=0$.

2. Сократите дробь: $\dfrac{2x^2+8x-90}{3x^2-36x+105}$.

3. Решите уравнения:

а) $(x-4)(4x-3)+3=0$; б) $\dfrac{7}{x+1}+\dfrac{x+4}{2x-2}=\dfrac{3x^2-38}{x^2-1}$.

4. В треугольнике ABC: $AB=AC$, точка D лежит на BC, а точка E лежит на AC, причем $AE=AD$ и $\angle BAD=40°$. Найдите угол CDE.

5. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, ее заключающих, и больше разности этой полусуммы и половины стороны, к которой проведена медиана.

6. Катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы на 10 и больше другого катета на 10. Найдите гипотенузу этого треугольника.

Занятие 10.
Четность

Типичные ситуации: чередование, разбиение на пары, четность

Если в сумме или разности нескольких целых чисел нечетных слагаемых четное/нечетное число, то и вся сумма или разность – четная/нечетная.

Задачи

1. Можно ли так разменять 25 руб., имея рублевые, трехрублевые и пятирублевые купюры, чтобы получилось 10 купюр?
2. На плоскости расположено 9 шестеренок, соединенных в кольцо. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно?
3. Существует ли замкнутая ломаная (без самопересечений), пересекающая окружность ровно 2009 раз?
4. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на 90° каждые 15 мин. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов.
5. Можно ли доску 5 х 5 заполнить доминошками 2 х 1?

6. Вдоль забора растут 8 кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1, может ли на всех кустах вместе быть 225 ягод?
7. В квадрате 5 х 5 стоят числа 1 и –1. Вычислили все произведения этих чисел по строкам и по столбцам. Докажите, что сумма этих десяти чисел не равна нулю.
8. Петя купил общую тетрадь из 96 листов и пронумеровал страницы числами от 1 до 192 по порядку. Хулиган Вася вырвал 25 листов и сложил 50 написанных на них чисел. Мог ли он в сумме получить число 2000?
9. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 2009?
10. Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса, оппозиция закричала «Это обман!». Почему?
11. Произведение 10 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.
12. Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой 11-звенной ломаной, пересекать все ее звенья?

Домашнее задание 10

1. Секретный объект представляет собой 100-угольник, образованный сторонами коридоров. Коридор может быть освещен или затемнен. В каждой вершине расположен выключатель, который меняет освещенности двух прилежащих коридоров на противоположные. Вначале весь объект затемнен. Сторож находится в одной из вершин, и хочет, переключая свет и двигаясь только по освещенным коридорам, перейти в 50 по счету вершину и снова затемнить объект. Может ли он это сделать?
2. В ряд выписаны числа от 1 до 10, можно ли между ними расставить знаки «+» и «–» так, чтобы значение полученного выражения было 0?
3. Можно ли покрыть шахматную доску доминошками 1 х 2 так, чтобы пустыми остались клетки A1 и H8?
4. Докажите, что если $a+b+c=0$ ($a\neq 0$), то $ab+bc+ac<0$.

5. По дороге идут два туриста. Один из них делает шаги на 10 % короче, но на 10 % чаще, чем другой. Кто из туристов идет быстрее и почему?

6. Докажите, что если диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

Занятие 11.
Текстовые задачи. Задачи на движение и работу. Задачи на проценты

1. Мотоциклист остановился для заправки горючим на 12 мин. После этого, увеличив скорость на 15 км/ч, он наверстал потерянное время, проехав в целом расстояние в 60 км. С какой скоростью он двигался после остановки?

2. За время просушки влажность зерна снизилась с 23 до 12 %. На сколько уменьшилась его масса?

3. Один рабочий может выполнить работу за 4 ч, а другой – за 6 ч. Сколько должен работать третий рабочий, чтобы сделать эту работу, если его производительность равна средней производительности первых двух?

4. Три пирожка стоят столько же, сколько 2 бублика и 2 конфеты вместе, а 4 конфеты стоят столько же, сколько 5 бубликов. Сколько пирожков стоит столько же, сколько стоят 3 бублика?

5. Антикварный магазин, купив два предмета на сумму 360 руб., продал их, получив 25 % прибыли. За сколько рублей был продан каждый предмет, если на первый была наценка 50 %, а на второй – 12,5 %?

6. Велосипедист проезжает 5 км при попутном ветре за 20 мин, а при встречном (той же силы) – за 1 ч. За сколько времени он проедет 5 км в безветренную погоду?

Домашнее задание 11

1. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали велосипедист и автомобиль. Их встреча произошла через 45 мин, а в пункт B велосипедист прибыл на 2 ч позже, чем автомобиль в пункт A. Сколько времени понадобилось велосипедисту на всю дорогу от A до B?

2. У владельца садового участка было 2 доски, причем первая была на 2 м длиннее второй. После того как он отпилил от каждой доски по куску длиной 3 м, первая доска стала в 2 раза длиннее второй. Найдите первоначальную длину каждой доски.

3. Из полученной партии яблок в магазине в первый день распродали 30 % от партии, а во второй – 40 % остатка. После этого еще 210 кг яблок остались нераспроданными. Сколько яблок было в самом начале?

4. Поезд, двигаясь с постоянной скоростью, проехал мимо дежурной по переезду за 45 с. Автомобиль, который ехал с постоянной скоростью 90 км/ч навстречу поезду по шоссе, параллельному железной дороге, миновал поезд за 20 с. Определите скорость движения поезда.

5. В детском саду на праздник собрались купить конфет одного сорта на сумму 540 руб. Однако таких конфет не было, поэтому купили на 2 кг больше конфет другого сорта, килограмм которых на 4 руб. дешевле. При этом потратили на 20 руб. меньше, чем планировали. Сколько конфет закупили на праздник?

6. Число $20a03b$, где a и b – цифры, делится на 36. Найдите все такие числа.

Занятие 12.
Теорема Фалеса. Подобие треугольников

1. Разделите данный отрезок на 5 равных частей.

2. Внутри угла ABC задана точка M. .Проведите через точку M прямую таким образом, чтобы ее отрезок, отсекаемый сторонами угла, делился точкой M в отношении 1 : 5.

3. Докажите, что середины сторон выпуклого четырехугольника служат вершинами параллелограмма, стороны которого параллельны диагоналям четырехугольника и равны половинам этих диагоналей.

4. Докажите, что если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, перпендикулярны, то его диагонали равны.

5. Периметр треугольника равен P. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

6. Докажите, что отношение любых сходственных линейных элементов двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

7. Докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

8. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 (A_1; C_1 – основания высот). Докажите, что треугольник A_1BC_1 подобен треугольнику ABC.

9. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M так, что $\angle ABM = \angle ACB$. Известно также, что $AM = 1$; $MC = 3$. Найдите длину стороны AB.

10. Диагональ трапеции делит ее на два подобных между собой треугольника. Отношение боковых сторон трапеции равно 2. Найдите отношение оснований трапеции.

11. В треугольнике ABC проведены медиана BD и биссектриса AE, которые пересекаются в точке K. Прямая, проходящая через вершину C и точку K, пересекает сторону AB в точке T. Найдите длины отрезков AT и TB, если известно, что длина стороны AB равна c, а длина стороны AC равна b.

Домашнее задание 12

1. Основания трапеции равны 4 и 3, а боковые стороны при продолжении пересекаются под прямым углом. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

2. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C взята точка D так, что $\angle BDA = \angle ABC$. Известно, что $AB = 3$; $DC = 8$. Найдите AC.

3. Треугольник и вписанный в него ромб имеют общий угол. Отношение сторон треугольника, образующих этот угол, равно k . Найдите отношение площадей треугольника и ромба.

4. В треугольнике ABC, длины сторон которого a, b и c, проведена параллельно AC прямая MN так, что $AM = BN$. Определите длину отрезка MN.

5. Из A в B вышел пешеход. Спустя какое-то время из A вслед пешеходу выехал велосипедист. Проехав 1 ч, он догнал пешехода, сразу повернул назад, приехал в A, сразу поехал в B и прибыл туда одновременно с пешеходом . Пешеход на путь от A до B потратил 6 ч. Во сколько раз скорость велосипедиста больше скорости пешехода?

6. Расставьте знаки модуля так, чтобы равенство $1-2-4-8-16=19$ стало верным.

Занятие13.
Теорема Виета

1. Докажите, что если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + g = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = g, \end{cases}$$

утверждение, обратное теореме Виета.

Если x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = g$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + g = 0$.

2. Решите устно уравнения:

а) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

б) $x^2 + 2x - 24 = 0$.

3.Найдите квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

а) $x_1 = -1$ и $x_2 = 2008$; б) $x_1 = -2$ и $x_2 = -9$.

4. Не решая уравнений, определите знаки их корней:

а) $x^2 - 4x + 1 = 0$; б) $x^2 - 3x = 2$.

5. Найдите сумму квадратов корней уравнений, не решая уравнений:

а) $x^2 + 7x - 11 = 0$; б) $x^2 + 5x - 6 = 0$.

6. Не вычисляя корней уравнений, найдите значения выражений $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ для уравнений:

а) $x^2 - 6x + 8 = 0$; б) $5x^2 - 4x - 12 = 0$.

7. Пусть x_1 и x_2 корни уравнения $2x^2 - 7x - 3 = 0$. Составьте квадратные уравнения, корнями которых являются числа:

а) $x_1 - 2$ и $x_2 - 2$; б) $x_1 + \frac{1}{x_2}$ и $x_2 + \frac{1}{x_1}$.

8. При каких значениях параметра k произведение корней квадратного уравнения $x^2 + 3x + \left(k^2 - 7k + 12\right) = 0$ равно нулю?

9. Найдите сумму квадратов всех корней уравнения $x^2 - 3|x| + 1 = 0$.

10. При каких значениях параметра $\boldsymbol{c}$ уравнение $5x^2 - 4x + c = 0$:

а) имеет различные действительные корни;
б) имеет один корень;
в) не имеет корней.

Домашнее задание 13

1.Составьте квадратное уравнение с заданными значениями его корней:

а) 8 и 3; б) $-\frac{8}{3}$ и $\frac{-8}{3}$.

2. Не вычисляя корней уравнений

а) $3x^2+8x-1=0$ найдите значение выражения $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$;

б) $2x^2-5x+1=0$ найдите значение выражения $x_1^2+x_2^2$.

3. В уравнении $x^2-4x+a=0$ сумма квадратов его корней равна 16. Найдите a.

4. Найдите двузначное число, зная, что число его единиц на 2 больше числа десятков, а произведение искомого числа на сумму его цифр равно 280.

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Пусть M – точка плоскости такая, что MB_1 пересекает сторону BC в точке K. Известно, что $BM=AB_1$ и $\angle MBB_1=\angle BB_1A$. Докажите, что $BK=KB_1$.

6. Найдите последнюю цифру числа 2007^{2008}.

Задание 14.
Числовые неравенства

Определение числового неравенства:
число a больше числа b или $a>b$, если $a-b>0$,
число a меньше числа b или $a<b$, если $a-b<0$.
Свойства числовых неравенств:
1) если $a>b$ и $b>c$ то $a>c$;
2) если $a>b$ и $c\in R$ то $a+c>b+c$;
3) если $a>b$ и $c>0$ то $ac>bc$;
4) если $a>b$ и $c<0$ то $ac<bc$;

5) если $a>b$ и $c>d$ то $a+c>b+d$;
6) если $a>b>0$ и $c>d>0$ то $ac>bd$;
7) если $a>b>0$ и $n\in N$ то $a^n>b^n$ (в случае нечетного n условие $b>0$ избыточно).

1. Докажите, что

а) $(a+1)(a+2)(a+3)(a+6)>96a^2$; б) $\left(a^2-b^2\right)^2\geq 4ab(a-b)^2$;

в) $a^2-ab+b^2\geq 0$.

2. Докажите, что если $a\geq b$, то

а) $a^3-b^3\geq a^2b-ab^2$; б) $a^5-b^5\geq a^4b-ab^4$.

3. Докажите, что если $a\geq 0,\ b\geq 0$, то $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b$.

4. Найдите наименьшее значение выражения $x+y$, если известно, что $xy=9$ и $x>0$.

5. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{x}{16+x^2}$, если $x>0$.

6. Докажите неравенство: $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$.

7. Решите неравенства:

а) $x-(5-2x)\geq 3$; б) $\frac{2x-1}{5}-\frac{3-x}{3}<2$;

в) $\frac{-4}{3x-7}>0$.

8. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству: $\frac{3x-2}{4}-\frac{5x-1}{3}>1$.

9. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases}2x-6>0,\\4x-20<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3(x-1)-2(2-3x)>5x-3,\\8x-3(2x+5)<2(x-7),\\3(x-1)-2(2-3x)>5x-3.\end{cases}$

10. Докажите, что при $a>b$ каждое из неравенств $(x-a)(x-b)<0$; $\frac{x-a}{x-b}<0$; $\frac{x-b}{x-a}<0$ равносильно двойному неравенству $a<x<b$.

11. Решите неравенства:

а) $(3-x)(2x-5)>0$; б) $\frac{x-5}{x-3}<0$;

в) $x^2-8x+7\ge 0$.

Домашнее задание 14

1. Докажите, что сумма двух взаимно обратных положительных чисел, не меньше, чем 2.

2. Докажите неравенства:

а) $a^3-b^3\ge 3ab(a-b)$, $a\ge b$; б) $9a^2-30|a|+25\ge 0$.

3. Решите неравенства:

а) $\frac{x-3}{2}>\frac{7(x-3)}{2}+5(6-2x)+14$;

б) $3+2x-x^2\le 0$;

в) $\frac{2x-3}{4\sqrt{6}-10}>5+2\sqrt{6}$.

4. Можно ли разбить все натуральные числа от 1 до 21 на несколько групп, в каждой из которых наибольшее число равно сумме всех остальных?

5. Докажите, что в прямоугольном треугольнике, один из углов которого равен $30°$, отрезок перпендикуляра, проведенного к середине гипотенузы до пересечения с катетом и лежащего внутри треугольника, в 3 раза меньше большего катета.

6. Вычислите сумму:

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\frac{1}{4*5}+\frac{1}{5*6}+\frac{1}{6*7}+\frac{1}{7*8}+\frac{1}{8*9}+\frac{1}{9*10}.$$

Занятие 15.
Математические игры

Типичные ситуации: четность, симметрия, делимость

Во всех играх предполагается, что играют двое, ходы делаются по очереди, игроки не могут пропустить ход.

Ответить надо всегда на один и тот же вопрос – кто побеждает: начинающий (первый) или его партнер (второй)? Вопрос может

быть сформулирован немного по-другому – кто из игроков владеет выигрышной стратегией? Необходимо описать ее и обосновать.

1. Четов пишет на доске одно целое число, *а* Нечетов – другое. Если их произведение четно, то победителем объявляется Четов, если – нечетно, то Нечетов. Может ли один из них играть так, чтобы непременно выиграть?

2. Двое по очереди ломают шоколадку 6×8 долек. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Имеется две кучки камней – по 11 в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

4. Двое по очереди кладут монеты на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из партнеров выигрывает при правильной игре?

5. Числа от 1 до 20 выписаны в строчку. Игроки по очереди расставляют между ними плюсы и минусы. После того, как все места заполнены, подсчитывается результат. Если он четен, то выигрывает первый игрок, если нечетен, то второй. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

6. Имеется три кучки камней: в первой – 10, во второй – 15, в третьей – 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

7. Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга. Цвет слонов значения не имеет. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

8. Дана клетчатая доска 10×10. За ход разрешается покрыть любые две соседние клетки доминошкой (прямоугольником 1×2) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

Домашнее задание 15

1. Морская вода содержит 5 % соли (по весу). Сколько килограммов пресной воды надо добавить к 60 кг морской воды, чтобы содержание соли в полученной воде составило 4 %?
2. Определите, какие цифры соответствуют каждой из букв:
СУМКА + СУМКА = БАГАЖ.
3. Между пунктами A и B проложены 2 канала с параллельными берегами. Постройте через каналы мосты, чтобы дорога от A к B была кратчайшей.
4. Разложите на множители многочлен $x^3 - 7x + 6$.
5. Каждая сторона и каждая диагональ выпуклого шестиугольника окрашена в синий или красный цвет. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в вершинах этого шестиугольника, все стороны которого имеют один цвет.
6. В восьмом классе учатся сорок человек. Каждый из них изучает не менее одного из языков: английский, немецкий или французский. Из всего класса 34 человека изучают хотя бы один из двух языков: английский и немецкий; 25 человек – хотя бы один из языков: немецкий и французский; 6 человек изучают только немецкий. Сколько человек изучают каждый из языков?

Занятие 16.
Замечательные отрезки и точки в треугольнике

Биссектрисы, медианы, срединные перпендикуляры, высоты треугольника

Задачи

1. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанной окружности.
2. Докажите, что биссектриса угла в треугольнике делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим к данному углу сторонам.
3. Срединные перпендикуляры в треугольнике пересекаются в одной точке – центре описанной окружности. Докажите это.
4. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка называется ортоцентром треугольника.

5. Докажите, что треугольник, отсекаемый от заданного треугольника отрезком, соединяющим основания двух высот, подобен исходному треугольнику.
6. В параллелограмме проведены биссектрисы внутренних углов, пересекающихся в точках P, E, M и K соответственно. Докажите, что $PEMK$ – прямоугольник.
7. Медина, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найдите углы и стороны треугольника.
8. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.

Домашнее задание 16

1. В мешке лежит 101 конфета. Двое по очереди берут из мешка от одной до 10 конфет. Когда все конфеты разобраны, подсчитывают взятое количество конфет. Если эти числа взаимно просты – выигрывает первый игрок, в противном случае выигрывает второй. Кто побеждает в данной игре, первый игрок или второй?
2. Из чашки кофе в чашку с молоком перелили ложку кофе, затем такую же ложку смеси перелили обратно. Чего больше: молока в кофе или кофе в чашке с молоком?
3. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 17 имеет остаток 15, при делении на 18 имеет остаток 16, при делении на 19 имеет остаток 17.
4. Два человека пишут по очереди на доске натуральные числа, не превосходящие 7. Выигрывает тот, после хода которого сумма всех чисел, написанных на доске, делится на 87. Кто гарантированно может выиграть – начинающий, или его противник? Какой стратегии он должен придерживаться?
5. В треугольнике ABC прямая, проходящая через вершину A и делящая медиану в отношении 1 : 2, считая от вершины, пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC.
6. Постройте треугольник по заданным длинам двух его сторон и биссектрисе угла между ними.

Занятие 17.
Множество точек на координатной плоскости

Множества точек на координатной плоскости часто задают их характеристическими свойствами.

Задачи

1. Изобразите множество точек координатной плоскости, расстояние от которых до прямой l не превосходит d.

2. Изобразите множества точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $x^2+y^2=1$;

б) $x^2+y^2<1$;

в) $x^2+y^2>1$.

3. Опишите множества точек координатной плоскости (x,y), координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $y\ge 3x+2$;

б) $(x-4)^2+(y-1)^2\le 36$;

в) $y\le x^2-6x+1$;

г) $|y|>|x+1|$.

4. Чем отличаются друг от друга множества, задаваемые неравенствами: $y<x^2-6x+1$ и $y\le x^2-6x+1$?

5. Каким уравнением задается граница множества точек $M(x,y)$, для координат которых: $|y|<4x-2$?

6. Изобразите множество точек координатной плоскости, для координат которых:

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 9,\\ y\le -x.\end{cases}$$

7. Определите, какие множества точек определяются соотношениями:

$|x|=|y|$; $\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{y}{|y|}$; $|x|+x=|y|+y$.

8. Определите, какое множество точек на координатной плоскости задается уравнением $x^2+y^2=4x+4y$.

9. Покажите штриховкой множества точек координатной плоскости, задаваемых системами неравенств:

а) $\begin{cases} x+y\le 6,\\ 2x+2y\ge 7,\\ x\ge 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases} |x|\le 2,\\ |y|\le 3;\end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2\le 9,\\ x^2+y^2\ge 1{,}69.\end{cases}$

10. Определить, где на координатной плоскости расположены точки, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

а) $xy\ge 0$;

б) $(x-2)(y-3)\ge 0$;

в) $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)>0$.

Домашние задание 17

1. Во сколько раз увеличится двузначное число, если справа к нему приписать такое же двузначное число?

2. Ученик купил портфель, авторучку и книгу. Если бы портфель стоил в пять раз дешевле, авторучка в два раза дешевле, а книга в два с половиной раза дешевле, то вся покупка стоила бы 200 руб. Если бы портфель стоил в два раза дешевле, авторучка в четыре раза дешевле, а книга в три раза дешевле, то вся покупка стоила бы 300 руб. Сколько стоила покупка на самом деле?

3. Точку внутри квадрата соединили с вершинами – получилось четыре треугольника, один из которых равнобедренный с углами при основании (стороне квадрата) 15°. Докажите, что противоположный ему треугольник правильный.

4. Изобразите множества точек координатной плоскости, для координат которых:

а) $(x-2)^2+(y-2)^2\le 4$;

б) $y<|x-5|$.

5. Изобразите множества точек координатной плоскости, для координат которых верно:

а) $\begin{cases} y-x<2, \\ y+x>4, \\ x-4<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2\le 100, \\ |x|<8. \end{cases}$

6. Найдите границу множества, заданного неравенством $y\ge x^2-2x+4$.

Занятие 18.
Степень с целым показателем

Формулы сокращенного умножения:

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$;

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$;

$a^{2n-1}+1=(a+1)(a^{2n-2}-a^{2n-3}+\ldots-a+1)$;

$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)$.

Свойства степеней:

1) $a^na^m=a^{n+m}$;

2) $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$;

3) $(ab)^n=a^nb^n$;

4) $(a^n)^m=a^{nm}=(a^m)^n$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$;

6) $0^n=0$; $1^n=1\ \ \forall n\in N$;

7) $|a^n|=|a|^n$;

8) $a^0=1$, если $a\ne 0$.

Задачи

1. Вычислите:

а) $3^{-6}\cdot 3^8\cdot 2^2$; в) $(0,2)^5\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^4$;

б) $2^8\cdot 8^{-3}\cdot 4^2\cdot 2^{-5}$; г) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1}+3^{-1}+3^2$.

2. Представьте в виде степени числа a выражения:

а) a^6a^3a; б) $(a^{-1}a^{-2})^{-3}$; в) $\dfrac{a^2a^{-2}}{a^{10}}$.

3. Возведите в квадрат трехчлены:

а) $\left(2a^2-\dfrac{1}{2}a+1\right)^2$; б) $\left(\dfrac{1}{2}x^2-4x-3\right)^2$.

4. Выполните действия:

$$\frac{2a^2-5ab+2b^2}{9a^2-4b^2}\cdot\left(\frac{3a^2+ab-2b^2}{a^2-4b^2}\right)\cdot\left(\frac{3a+2b}{2a-2b}\right).$$

5. Выполните действия:

а) $\left(\dfrac{2a^{n+1}}{b^{n-2}}\right)\left(0,25a^{3-2n}b^{2n+1}\right)^3$; б) $\left(\dfrac{a^{2n-1}}{c^{3-n}}\right)^4\left(\dfrac{a^{1-n}}{c^{3n+1}}\right)^4\left(\dfrac{c^{n+3}}{a^{n-1}}\right)^5$.

6. Сократите дроби:

а) $\dfrac{c^4-3c^2+2}{c^5+1}$; б) $\dfrac{64x^3-27y^6}{9y^4-16x^2}$.

7. Запишите числовые выражения в виде a^n, где $n\in Z$, $a\in R$:

а) $2:(2^4:2^3)$; б) $(3^{-2})^{-2}3^{-5}27$; в) $\left(\left(\dfrac{1}{9}:\dfrac{8}{27}\right):\dfrac{16}{48}\right):\dfrac{81}{128}$.

8. Найдите все целые числа n, удовлетворяющие равенству: $3^{-2}\cdot 3^4\cdot 3^n=3^7$.

Домашнее задание 18

1. Вычислите:

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}-\left(-\dfrac{6}{7}\right)^0+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2:2$;

$2^1\cdot 2^{-2}\cdot 2^3\cdot 2^{-4}\cdot 2^5\cdot\ldots\cdot 2^{49}\cdot 2^{-50}$.

2. Запишите числовое выражение в виде a^n , где $a \in R,\ \ n \in N$:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 2^{-2}8}{\left(-2^3\right)^2 16^{-1}}\left(2^2\right)^3.$$

3. Упростите следующее выражение:

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}.$$

4. Сколькими способами число 1979 можно представить в виде разности двух квадратов натуральных чисел?

5. Покажите, что любой прямоугольник можно разрезать на несколько частей, из которых можно сложить квадрат.

6. Цены снижены на 20 %. На сколько процентов больше товаров можно купить на ту же зарплату?

Занятие 19.
Признаки делимости. Остатки от деления

Натуральное число p – простое , если оно не делится ни на что, кроме себя и 1.

Основная теорема арифметики:

1. *Любое натуральное число n, не равное* 1*, раскладывается в произведение простых сомножителей, причем единственным образом.*

2. *Два числа взаимно просты, если они не имеют общих делителей кроме единицы.*

3. *Если некоторое число делится на два взаимно простых числа n и m, то оно делится и на их произведение mn.*

Задачи

1. Разложите на простые множители числа: 8, 12, 45, 21, 31, 110, 432, 365, 444.

2. Среди следующих чисел найдите пары взаимно простых: 2, 4, 62, 143, 23, 7, 3, 65, 25.

3. Делится ли $2^9 \cdot 3$ на 6; $3^2 \cdot 3$ на 6; $5^4 \cdot 2$ на 10; $2^2 \cdot 5^1 \cdot 3^0 \cdot 11$ на 66?

Признаки делимости:

✓ число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3;

✓ число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра четна;

✓ число делится на 4 тогда и только тогда, когда двузначное число, образованное двумя последними цифрами этого числа, делится на 4;

✓ число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5;

✓ число делится на 8 тогда и только тогда, когда трехзначное число, образованное тремя последними цифрами этого числа, делится на 8;

✓ число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Если число ($p * a$) делится на q, где p и q взаимно просты, то a делится на q.

По определению делимости имеем общую формулу для чисел, делящихся на 3 – это числа вида $3n$. Если из чисел, кратных трем, вычесть по 1, то получим числа вида $3n-1$ – это числа, которые при делении на 3 дают остаток 2, то есть те же числа можно задать формулой $3m+2$.

4. Напишите формулу для чисел, дающих при делении на 4 остатки: 0; 1; 2.

5. Числа 100 и 90 разделили на одно и то же число. В первом случае получили в остатке 4 , во втором – 18. На какое число делили?

6. Известно, что произведение двух взаимно простых чисел равно 864. Найдите эти числа.

7. Найдите остатки от деления 5 на 2; от деления 31 на 3; от деления 43 на 7; от деления 65 на 5; от деления 76 на 13.

8. В числе 5*726 замените звездочку такой цифрой, чтобы получившееся число делилось на 3.

9. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

10. К числу 10 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 72.

Остаток при делении числа M на N.

✓ *Сумма двух натуральных чисел и сумма их остатков при делении на q имеют одинаковые остатки при делении на q.*

✓ *Произведение двух натуральных чисел и произведение остатков при делении этих чисел на q имеют одинаковые остатки при делении на q.*

Домашнее задание 19

1. Петя заменил в примере на умножение одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные – разными и получил *АБ * ВГ = =ДДЕЕ*. Докажите, что он ошибся.
2. Число 82** делится на 90. Найдите делимое.
3. К числу 13 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 36.
4. Верно ли, что если записать в обратном порядке цифры любого целого числа, то разность исходного и нового чисел будет делиться на 9?
5. Докажите, что если $3a+4b+5c$ делится на 11 при некоторых целых a, b и c, то и $9a+b+4c$ делится на 11 (при тех же значениях a, b, c).
6. Найдите значения букв: ПОДАЙ – ВОДЫ = ПАША.

Занятие 20.
Метрические соотношения между элементами прямоугольного треугольника

1. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два треугольника, подобных между собой и исходному треугольнику.
2. Докажите, что высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, есть среднее пропорциональное между отрезками гипотенузы, на которые она этой высотой разделена.
3. Докажите, что катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.
4. Докажите, что в прямоугольном треугольнике $a\cdot b=c\cdot h$, где a, b – катеты, а c, h – гипотенуза и высота, опущенная на нее из вершины прямого угла соответственно.
5. Докажите, что отношение квадратов катетов равно отношению их проекций на гипотенузу.

6. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3 : 4, а гипотенуза равна 50. Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится высотой, проведенной из вершины прямого угла.
7. Найдите основание равнобедренного треугольника, если высота, проведенная к основанию, равна 5, а высота, проведенная к боковой стороне, равна 6.
8. Высота прямоугольного треугольника делит его на два треугольника. Радиусы окружностей, вписанных в эти два треугольника, равны 1 и 2. Найдите радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.

Домашнее задание 20

1. В треугольнике со сторонами 6, 7 и 9 проведена высота к большей стороне. Найдите высоту и отрезки, на которые сторона делится этой высотой.
2. Катеты относятся, как 3 : 2, а высота делит гипотенузу на отрезки, из которых один на 2 больше другого. Определите гипотенузу.
3. Найдите катеты прямоугольного треугольника, в котором один из острых углов равен 15°, а гипотенуза равна 1.
4. В прямоугольном треугольнике *ABC*, больший катет которого имеет длину 5, из вершины прямого угла *C* опущена высота *CD*. В треугольник *CBD* вписана окружность, радиус которой равен 1. Найдите длину высоты и гипотенузу.
5. У числа 2008 вычли сумму цифр. У полученного числа опять вычли сумму цифр. И так продолжалось до тех пор, пока не получилось однозначное число. Что это за число?
6. Два автомобиля ездят по кольцевой трассе. Если они едут в одну сторону, то встречаются через каждые 60 мин, если в разные стороны, то через каждые 12 мин. За какое время каждый автомобиль проходит трассу?

Занятие 21.
Степень с рациональным показателем

С помощью следующих правил можно выполнять тождественные преобразования буквенных выражений, содержащих квадратные корни.

Если $a\ge 0$; $b\ge 0$, то $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

Если $a \ge 0$; $b > 0$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Если $a \ge 0$, то $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Знаем, что $\forall a$: $\sqrt{a^2} = |a|$, где символ $\forall$ означает «для любого».

Задачи

1. Докажите, что:

а) $\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)=1$;

б) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$;

в) $\sqrt{3}+\sqrt{27}=\sqrt{48}$.

2. Упростите выражения:

а) $\sqrt[4]{9}$; б) $\sqrt[6]{9a^4b^8}$; в) $\sqrt[9]{8x^6}$.

3. Вычислите:

$(-6)\cdot\sqrt{\dfrac{2a-2b}{x^2}} : \dfrac{4}{5}\cdot\sqrt{\dfrac{a-b}{2bx^2}}$.

4. Докажите, что если $a \in N$, то $\sqrt{a}$ либо натуральное число, либо иррациональное.

5. Упростите выражения:

а) $\sqrt{y^2-10y+25}+\sqrt{y^2-14y+49}$, при $y \ge 7$;

б) $\sqrt{(a+1)^2-4a}$;

в) $\sqrt{10a+23+\sqrt{a^4+4a^2+4}}$.

6. Упростите выражение, представив подкоренное выражение в виде полного квадрата:

$\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$.

7. Вычислите значения выражений:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

8. Сравните числа:

а) $\sqrt{19}$ и $\sqrt{7}+\sqrt{3}$;

б) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ и $\dfrac{2}{1-\sqrt{2}}$.

9. Выполните действия:

а) $\dfrac{a-b}{a-\sqrt{2a}}\cdot\dfrac{a-2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\left(\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2}+\sqrt{a}}\right)$;

б) $\dfrac{x^2+x\sqrt{2}}{x^2+2}\cdot\left(\dfrac{x}{x-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)$.

10. Докажите «формулы сложного радикала»:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Домашнее задание 21

1. Вычислите, выделяя полный квадрат в подкоренном выражении:

а) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$; б) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$.

2. Выполните действия:

$$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{\sqrt{2}}+1\right)\cdot\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{\sqrt{2}}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{x^4+2x^2+4}.$$

3. Вычислите значение выражения:

$$A=3\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5}+\frac{5}{\sqrt{10}-2}-\frac{7}{\sqrt{10}}\right).$$

4. На окружности поставлены две точки, в которых записаны две единицы. Далее 2008 раз выполняется следующее действие: посредине между уже имеющимися точками вставляются новые точки, в которых записываются суммы соседних чисел. Найдите сумму всех записанных чисел.

5. Хотят поскорее поджарить три ломтика булки. На сковороде умещаются лишь два ломтика, причем на поджаривание одной стороны ломтика затрачивается одна минута. За какое наименьшее время можно поджарить с обеих сторон три ломтика?

6. В квадрате $ABCD$ точка M является серединой стороны BC, точка O – точка пересечения отрезков DM и AC. Найдите угол MOC.

Занятие 22.
Системы счисления

Возьмем произвольное натуральное число, например 4784. Его можно представить таким образом $4\cdot10^3+7\cdot10^2+8\cdot10+4$. Другими словами, число разбивается на разряды. Первый из них, считая справа, – разряд единиц, число 10 является единицей второго разряда – разряда десятков, число 100 – единицей третьего разряда, сотен, и так далее. Количество единиц каждого разряда обозначается одной из цифр: 0, 1, 2, 3, …, 9. Каждый разряд имеет свое определенное место (позицию) в записи числа, поэтому одна и та же цифра имеет различные значения в зависимости от занимаемой ею позиции. В нашем примере последняя четверка означает 4 единицы, а первая – 4 тысячи. Такая система счисления называется позиционной. Поскольку любое натуральное число n представимо в виде $n=a_k\cdot10^k+a_{k-1}\cdot10^{k-1}+...+a_1\cdot10^1+a_0$, где $a_0,a_1,...,a_k$ могут быть равны 0, 1, …, 9 и $a_k\neq0$, то десятичная запись этого числа имеет вид: $n=\overline{a_ka_{k-1}...a_1a_0}$. Особую роль здесь играет число 10, основание десятичной системы.

Иногда записывают $n=\left(\overline{a_k...a_0}\right)_{10}$, когда нужно указать основание системы счисления, ведь основанием позиционной системы счисления может быть любое число $q>1$. Цифрами q-ичной системы счисления будут $0,1,...,q-1$. Чтобы записать произвольное число n в q-ичной системе счисления, его представляют в виде $n=b_mq^m+b_{m-1}q^{m-1}+...+b_1q+b_0,\quad b_0,...,b_m\in\{0,1,...,q-1\},\quad b_m\neq0$. Отсюда получаем искомую запись числа: $n=\left(\overline{b_m...b_0}\right)_q$. Запишем, например, число 132 в троичной, пятеричной, семеричной и двенадцатеричной системах счисления:

$$132=1\cdot3^4+1\cdot3^3+2\cdot3^2+2\cdot3+0=(11220)_3$$

$$132=1\cdot5^3+0\cdot5^2+1\cdot5+2=(1012)_5$$

$$132=2\cdot7^2+4\cdot7+6=(246)_7$$

$$132=11\cdot12+0=\left(\overline{11}0\right)_{12}.$$

Задача 1. Как перевести число из десятичной системы счисления в q-ичной?

Если разделим число n на q, то в частном получим $b_mq^{m-1}+...+b_1$, а в остатке – b_0. Разделив найденное частное вновь на q, получим остаток b_1 и так далее. Последовательность остатков, выстроенная справа налево, и даст q-ичной запись числа.

$$4784=1\cdot8^4+1\cdot8^3+2\cdot8^2+6\cdot8+0=(11260)_8.$$

Задача 2. Научимся складывать и умножать числа, записанные в произвольной системе счисления.

Это делается так же, как и в десятичной системе, «столбиком». Однако нужно помнить, что перенос в следующий разряд происходит тогда, когда результат превышает основание данной системы счисления или равен ему. Для успешного выполнения этих операций надо знать таблицы умножения и сложения для чисел, меньших основания системы счисления.

Задача 3. Составьте таблицы сложения и умножения для двоичной, троичной, четверичной и пятеричной систем счисления.

Задача 4. Вычислите 1100_2+1101_2; $201_3\cdot102_3$.

Задача 5. Выясните, в какой системе счисления будут справедливы равенства

а) $3\cdot4=10$; б) $100=24+32$.

Задача 6. Запишите в десятичной системе счисления заданные числа:

а) 10101_2;
б) 10101_3; г) 126_7;
в) 211_4; д) 158_{11}.

Задача 7. Запишите число 100_{10} в двоичной, троичной, четверичной, пятеричной, шестеричной, семеричной, восьмеричной и девятеричной системах счисления.

Задача 8. Запишите в указанной системе счисления заданные числа:

а) $1587=x_2$;
б) $178=x_3$; г) $354_6=x_2$;
в) $594=x_6$; д) $12021001012_3=x_{10}$.

Задача 9. Проверьте, верные ли таблицы сложения и умножения приведены ниже.

Таблицы сложения и умножения приведены для троичной системы счисления.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

*	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Задача 10. Составьте таблицы сложения и умножения для систем счисления:

а) четверичной;

б) пятеричной;

в) двоичной.

Домашнее задание 22

1. Определите, какие цифры соответствуют каждой из букв: Дурак + Удар = Драка.
2. В какой системе счисления справедливо равенство $4\times 13=100$?
3. Вычислите и напишите ответ в десятичной системе счисления:
а) $1100_2 + 1101_2$; б) $201_3 * 102_3$.
4. Запишите в указанной системе счисления: $2234210_5 = x_3$.
5. Найдите основания систем счисления:
а) $43_x = 27$; б) $53_x * 16_x = 880_x$.
6. Пусть S – сумма цифр четырехзначного натурального числа n, T – сумма всех чисел, получаемых отбрасыванием у числа n одной, двух и трех цифр – справа. Докажите, что $n=S+9T$.

Занятие 23.
Делимости. Задания на остатки и на целочисленные значения

Задачи на «зацикливание остатков»

1. Найдите последнюю цифру числа 2^{50}.
2. Найдите последнюю цифру числа 4^{50}.
3. Найдите последнюю цифру числа 3^{33}.
4. На какую цифру оканчиваются числа: а) 2^{100}; б) $33^{77}+77^{33}$?

5. Найдите 2 последние цифры числа 2^{2000}.
6. Докажите, что разность $9^{1972}-7^{1972}$ делится на 10.
7. Докажите, что $7^{100}-2^{100}$ делится на 45; $3^{105}+4^{105}$ делится на 7; $132^{50}-105^{50}$ делится на 9.
8. Найдите последние цифры следующих чисел: 6^{1971}; 9^{1971}; 3^{1971}; 2^{1971}.

Докажите, что:

1. Для любого натурального числа n выражение $n(n+1)(n+2)$ делится на 6.
2. Для любого натурального числа a выражение a^3-a делится на 6.
3. Для натуральных чисел a и b выражение a^2-b^2 делится на 3, где a и b не делятся на 3.
4. Если известно, что $a=5k+1$, $b=5n+2$, то докажите, что a^4-b^4 делится на 5.
5. Докажите, что выражение $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$ при делении на 3 дает остаток 2.
6. Докажите, что выражение n^3+3n^2-n-3 делится на 48 при любом нечетном n.

Задания на целочисленные значения

1. Определите, при каких натуральных n число $(3n+4)/5$ – целое?
2. Значение $(a+1)$ делится на 3. Докажите, что выражение $(4+7a)$ делится на 3.
3. Докажите, что выражение $\left(m/3+m^2/2+m^3/6\right)$ является целым числом при любом целом значении m.

Домашнее задание 23

1. Определите, какие цифры соответствуют каждой из букв: Драма + Драма = Театр.
2. Докажите, что если выражение $\left(5+a+5b-c\right)$ делится на 17, то и выражение $3(a-c)-2(b+1)$ делится на 17.
3. С помощью циркуля и линейки разбейте угол в 19° на 19 равных частей.

4. Знаменатель несократимой дроби на 2 больше числителя. Если числитель дроби, обратной данной, уменьшить на 3 и отнять от полученной дроби данную дробь, то получится 1/15. Найдите данную дробь.

5. Цена за вход в сад 12 руб. После снижения цен на билеты количество посетителей увеличилось на половину и сбор увеличился на четверть. На сколько снижена цена на билеты?

6. При делении некоторого числа на 3 получается остаток 1, а при делении этого же числа на 5 – остаток 3. Каким будет остаток числа при делении на 15?

Занятие 24.
Окружности 1

Что надо знать по теме «Окружность»

1. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная.
2. Отрезки касательных, проведенные из одной точки к данной окружности, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.
3. Центральные и вписанные углы. Градусная мера дуги окружности.
4. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
5. Меры углов, образованных при пересечении хорд, касательной и секущей, двух секущих.
6. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.
7. Квадрат отрезка касательной, проведенной из заданной вне окружности точки равен произведению отрезка секущей, проведенной из этой же точки к заданной окружности, на его внешнюю часть.

Задачи

1. Радиус OM окружности с центром O делит хорду AB пополам. Докажите, что касательная, проведенная к окружности через точку M параллельна хорде AB.

2. Из точки A, лежащей вне окружности, выходят лучи AB и AC, пересекающие эту окружность. Докажите, что величина угла BAC равна полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

3. Вершина угла BAC расположена внутри окружности. Докажите, что величина угла BAC равна полусумме угловых величин дуг окружности, заключенных внутри угла BAC и внутри угла, симметричного ему, относительно вершины A.

4. Хорда делит окружность в отношении 5 : 11. Определите величины вписанных углов, опирающихся на эту хорду.

5. Точки B_1, C_1 – середины дуг AB и AC, лежащих по разные стороны от точки A. Точки M, N – точки пересечения хорды B_1C_1 с хордами AB и AC соответственно. Докажите, что $AM = AN$.

6. Окружность отсекает на двух прямых, которые пересекаются в точке, не лежащей на окружности, равные хорды. Докажите, что расстояния от точки пересечения этих прямых до концов той и другой хорды соответственно равны между собой.

7. Хорда делит окружность в отношении 11 : 16. Определите угол между касательными, проведенными из концов хорды.

8. В данном круге проведены две равные параллельные хорды, расстояние между которыми равно радиусу данного круга. Найдите острый угол между прямыми, соединяющими концы хорд.

Домашнее задание 24

1. Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB опущен перпендикуляр MN. Докажите, что угол MAN равен углу MCN.

2. Найдите ошибку в доказательстве:

Докажем, что можно построить треугольник с двумя прямыми углами: Пусть окружности O_1 и O_2 пересекаются в точке C, CA и CB – диаметры, прямая AB пересекает окружности в точках D и K соответственно. Тогда углы CKA и CDB – прямые, как опирающиеся на диаметры CA и CB, и в треугольнике CDK два прямых угла!

3. Диаметр AB и хорда AC образуют угол в 30°. Через точку C проведена касательная, пересекающая продолжение AB в точке P. Докажите, что треугольник ACP равнобедренный.

4. В треугольнике ABC из вершины B проведены высота BH и биссектриса угла B, которая пересекает в точке E описанную около треугольника окружность с центром O. Докажите, что луч BE является биссектрисой угла OBH.

5. Назовем шестизначный номер автобусного билета счастливым, если сумма первых трех цифр этого номера равна сумме вторых трех цифр. Будем считать, что номер билета может начинаться на любую комбинацию цифр, в том числе на любое количество нулей. Докажите, что сумма номеров всех счастливых билетов делится на 1001.

6. Найдите все целые решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x+y^2=6, \\ y+x^2=6. \end{cases}$$

Занятие 25.
Принцип Дирихле

Принцип Дирихле: Если в N клетках сидят не менее $N+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов.

Обобщенный принцип Дирихле: Если в N клетках сидят не менее $kN+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее $k+1$ кроликов.

1. В мешке лежат шарики двух цветов: черного и белого. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?

2. В школе 370 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

3. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 999 000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

4. В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трех сортов, причем в каждом ящике лежали яблоки одного сорта. Найдутся ли 9 ящиков одного сорта?

5. Докажите, что из любых трех целых чисел можно выбрать два, сумма которых четна.

6. Докажите, что среди любых шести целых чисел найдутся два числа, разность которых кратна 5.

Домашнее задание 25

1. В классе 40 учеников. Найдется ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше, чем 4 ученика этого класса?

2. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

3. В квадрат со стороной 1 м бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три точки можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

4. Может ли сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом целого числа?

5. Пять участников олимпиады стали ее победителями, набрав по 15, 14 и 13 баллов и заняв соответственно первое, второе и третье места. Сколько участников завоевали каждое призовое место, если вместе они набрали 69 баллов?

6. В треугольнике ABC биссектрисы BP и CT пересекаются в точке O. Известно, что точки A, P, O и T лежат на одной окружности. Найдите величину угла A.

Занятие 26.
Тригонометрия

Значение синуса (косинуса) острого угла не зависит от выбора прямоугольного треугольника, содержащего равный ему угол.

1. Вычислите синус и косинус угла равного $45°$.

2. Вычислите синус и косинус угла равного $30°$.

3. Вычислите синус и косинус угла равного $15°$. (Рассмотрите равнобедренный треугольник с углом при вершине $30°$.)

4. Составьте таблицу тригонометрических функций углов: $15°$, $30°$, $45°$, $60°$, $75°$, $90°$.

5. Докажите, что $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$.

6. Вычислите значение суммы
$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha$ при $\alpha = 15°$

7. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза c и острый угол α. Найдите катеты и длины их проекций на гипотенузу.

8. Докажите, что для любого острого угла α верны равенства:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$;

б) $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 2\sin^2\alpha$;

в) $\left(1+\cos\alpha\right)\left(1-\cos\alpha\right)=\sin^2\alpha$.

Домашнее задание 26

1. Вычислите синус угла равного 18° .

2. Докажите равенство:
$\sin 15^\circ+\sin 30^\circ=\sin 60^\circ+\sin 75^\circ=\cos 15^\circ+\cos 30^\circ+\cos 60^\circ+\cos 75^\circ$.

3. Вычислите: а) $\left(\sin 30^\circ+\sin 60^\circ\right)\cdot\left(\cos 30^\circ-\cos 60^\circ\right)$;
б) $\operatorname{tg}15^\circ+\operatorname{tg}30^\circ+\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}75^\circ$.

4. Покажите, что сумма кубов трех последовательных чисел кратна 9.

5. Два квадрата со стороной a имеют общую вершину, причем сторона одного из них лежит на диагонали другого. Найдите площадь общей части этих квадратов.

6. Цена входного билета на стадион составляла 20 руб. После снижения входной платы число зрителей увеличилось на 25 %, а выручка возросла на 12,5 %. Сколько стал стоить входной билет после снижения цены?

Занятие 27.
Окружности 2

Окружности и четырехугольники

1. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

2. Вокруг четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы величин его противоположных углов равны 180°.

Задачи

1. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм – ромб.

2. Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм – прямоугольник.

3. Из точки на окружности проведены две хорды, каждая из которых равна радиусу. Найдите угол между ними.

4. Определите величину угла между касательными, проведенными из одной точки, если кратчайшее расстояние от этой точки до окружности равно радиусу этой окружности.

5. Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC. Докажите, что угол C_1AP равен углу C_1B_1P.

6. Докажите, что все углы, образованные сторонами правильного n-угольника, кратны $180/n$.

7. Точка D лежит на радиусе OA, хорда BDC перпендикулярна AO. Через точку C проведена касательная до пересечения с продолжением OA в точке E. Докажите, что прямая CA – биссектриса угла BCE.

8. На окружности взяты четыре точки. Докажите, что прямые, соединяющие середины противолежащих дуг, взаимно перпендикулярны.

Домашнее задание 27

1. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Его противоположные стороны CD и AB, BC и AD продолжены до взаимного пересечения в точках N и M. Докажите, что биссектрисы углов BMA и AND перпендикулярны.

2. Через точку P, лежащую на общей хорде AB двух окружностей, проведена хорда KM первой окружности и LN – второй окружности. Докажите, что вокруг четырехугольника $KLMN$ можно описать окружность.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B провели прямую, пересекающую окружности в точках P и M, а затем через точки P и M провели касательные к этим окружностям. Докажите, что точки A, M, P и C – точка пересечения касательных – лежат на одной окружности.

4. Через каждую вершину треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла треугольника при этой вершине. Проведенные прямые, пересекаясь, образуют новый треугольник. Докажите, что вершины этого треугольника лежат на прямых, содержащих биссектрисы треугольника ABC.

5. В корзине лежат яблоки. Если их считать тройками, четверками и даже дюжинами, то всегда остаются 2 яблока. Найдите наименьшее количество яблок, удовлетворяющих этому условию.

6. На плоскости отмечено 6 различных точек. Известно, что прямая, проходящая через любые две отмеченные точки, содержит

еще одну отмеченную точку. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной прямой.

Занятие 28. **Комбинаторика**

1. В киоске продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку?
2. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
3. В Стране Чудес есть три города: *А*, *Б* и *В*. Из города *А* в город *Б* идет 6 дорог, а из города *Б* в город *В* – 4 дороги. Сколькими способами можно проехать от *А* до *В*?
4. Крыса бежит по лабиринту, который устроен так, что сначала она должна выбрать одну из двух дверей, затем одну из трех дверей, а за каждой из них ей ожидают четыре двери. Пройдя какую-либо дверь, крыса не может вернуться через нее обратно. Сколькими различными путями крыса может пройти лабиринт от начала до конца?

Выделение нескольких возможных случаев

5. В магазине «Все для чая» продаются 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?
6. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы слов: Крот, Мама.
7. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?
8. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

Перестановки

9. Сколько существует различных трехзначных чисел, в десятичной записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?
10. Сколькими способами 8 человек могут встать в очередь?

Рассуждая аналогично, легко заметить, что n различных предметов можно выложить в ряд $n*(n-1)*(n-2)* \ldots 2 * 1 = n!$ количеством способов.

11. Сколько имеется трехзначных чисел, в запись которых входит ровно одна цифра 5?
12. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы следующих слов:

а) ВЕКТОР;

б) ЛИНИЯ?

Домашнее задание 28

1. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?
2. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы следующих слов:

а) ПАРАБОЛА;

б) БИССЕКТРИСА;

в) МАТЕМАТИКА?

3. Бусы – это кольцо, на которое нанизаны бусинки. Бусы можно поворачивать, но не переворачивать. Сколько различных бус можно сделать из 13 различных бусинок?
4. В алфавите племени Бум-Бум шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Бум-Бум?
5. Диагональ трапеции перпендикулярна одной из боковых сторон и является биссектрисой одного из углов трапеции. Найдите отношение длин оснований трапеции.
6. Сколько килограммов меди нужно переплавить с 5 кг сплава меди и серебра, содержащего 13 % серебра, чтобы получить сплав, содержащий 8 % серебра?

Занятие 29. **Задачи на построения с помощью циркуля и линейки**

Задачи

1. В треугольнике найдите точку, равноудаленную от всех его сторон.
2. Через точки *A* и *B* проведите две прямые так, чтобы угол между ними делился данной прямой *MK* пополам.
3. Постройте биссектрису угла с недоступной вершиной.

4. Дан треугольник, у которого одна из вершин недоступна. Постройте медиану треугольника, выходящую из этой вершины.

5. Постройте из данной точки касательную к данной окружности.

6. Впишите окружность в данный угол так, чтобы она проходила через заданную точку A, лежащую на одной стороне угла.

7. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к ней, и медиане, проведенной к одной из двух других сторон.

8. Дана окружность с центром в точке O и точка A вне ее. Проведите через точку A прямую, пересекающую окружность в точках B и C таких, что $AB = BC$.

Домашнее задание 29

1. Постройте параллелограмм по данным длинам двух его диагоналей и одной из сторон.

2. Постройте треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведенной из вершины другого угла.

3. На прямой a найдите точку K, сумма расстояний от которой до двух заданных по одну сторону от прямой точек B и C была бы наименьшей.

4. Дан угол ABC и точка M внутри него. Найдите на сторонах данного угла такие точки E и K, чтобы треугольник MEK имел наименьший периметр.

5. Имеются два сплава двух металлов. В первом сплаве металлы находятся в отношении 1 : 2, а во втором – в отношении 2 : 3. Сколько частей каждого сплава надо взять, чтобы получить сплав с отношением металлов 7 : 13?

6. Найдите все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2u + v = 7, \\ |u - v| = 2. \end{cases}$$

Занятие 30.
Отношение площадей треугольников

Задачи

1. Докажите, что если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как длины оснований.

2. Докажите, что медиана делит площадь треугольника пополам.

3. Докажите, что медианы разбивают треугольник на шесть равных по площади треугольников.

4. Найдите, в каком отношении биссектриса угла C делит площадь треугольника ABC, если известно, что $\frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$.

5. Середина одной из диагоналей выпуклого четырехугольника соединена с концами другой диагонали. Докажите, что полученная ломаная делит четырехугольник на две равные по площади части.

6. В трапеции $ABCD$ (BC параллельна AD) точка K – середина AB – соединена отрезками с вершинами C и D. Найдите отношение площадей треугольника KCD и трапеции $ABCD$.

7. Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках E и F. Докажите, что треугольники CDE и BDF имеют равные площади.

8. Медиана BD и биссектриса AE треугольника ABC пересекаются в точке F, причем длина отрезка AF в три раза больше длины отрезка FE. Длина медианы BD равна a, длина биссектрисы AE равна b. Найдите площадь треугольника ABC.

Домашнее задание 30

1. В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ABO равна S.

2. Точка, лежащая внутри параллелограмма, соединена отрезками со всеми его вершинами. Докажите, что суммы площадей противолежащих треугольников, на которые разбивается параллелограмм, равны.

3. Сравните числа $\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} + \frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$ и $\sqrt{10}$.

4. В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина стороны AB. Отрезок DM и диагональ AC пересекаются в точке K. Найдите площадь треугольника AKD, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна S.

5. Переменные x и y положительны и известно, что $x+y=10$. Найдите наименьшее значение суммы $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

6. Два пешехода отправились одновременно навстречу друг другу из поселков K и P. При встрече оказалось, что первый прошел на 2 км больше второго. Отдохнув вместе полчаса, они продолжали свой путь. Первый пришел в P через 1 ч 30 мин, а второй в K – через 2 ч 40 мин. Найдите расстояние между поселками.

Занятие 31.
Векторы как направленные отрезки

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется направленным отрезком или вектором.

Вспоминаем, что надо знать по данной теме.

1. Равенство и коллинеарность ненулевых векторов.

2. Сложение и вычитание векторов осуществляется по трем известным правилам:

1) правило треугольника;

2) правило параллелограмма;

3) правило ломаной.

3. Умножение вектора на число.

4. Свойства сложения векторов и умножения вектора на число:

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;

2) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$;

3) $(\lambda+\mu)\cdot\overline{a}=\lambda\cdot\overline{a}+\mu\cdot\overline{a}$;

4) $\lambda\cdot(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\cdot\overline{a}+\lambda\cdot\overline{b}$.

5. Единственность разложения любого вектора по двум неколлинеарным векторам.

Задачи на применение векторов

1. Точка C – середина отрезка AB, а точка O – произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overline{OC}=\frac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OB}\right)$.

2. Докажите, что прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон.

3. Докажите, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

4. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырехугольника, точкой пересечения делятся пополам.

5. Точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$, считая от точки A. Докажите, что для любой точки O справедливо равенство $\overline{OC}=\frac{n}{n+m}\overline{OA}+\frac{m}{m+n}\overline{OB}$.

6. Даны четырехугольник $ABCD$ и точка O. Точки E, F, G, H симметричны точке O относительно соответственно середин сторон AB, BC, CD, DA. Что представляет собой четырехугольник $EFGH$?

7. Точка O – середина медианы EG треугольника DEF. Выразите вектор $\overline{DO}$ через векторы $\overline{a}=\overline{ED}$ и $\overline{b}=\overline{EF}$.

Домашнее задание 31

1. Рассмотрим трапецию $ABCD$, у которой длина основания AB в два раза больше длины основания CD. Точка M – середина стороны AD, точка O – точка пересечения диагоналей трапеции. Выразите через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$:

а) вектор $\overline{AM}$,

б) вектор $\overline{AO}$,

в) вектор $\overline{BC}$,

г) вектор $\overline{AN}$,

если известно, что точка N расположена на стороне BC и точки M, O, N лежат на одной прямой.

2. Определите, какие цифры соответствуют каждой из букв:

Кафтан + Кафтан = Тришка.

3. Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за 7 дней при условии, что второй рабочий приступит к ней на два дня позже первого. Если бы ту же работу каждый выполнял в одиночку, то первому понадобилось бы на 4 дня больше, чем второму. За сколько дней каждый рабочий мог бы выполнить эту работу, если известно, что число дней, необходимое каждому из них, – целое?

4. Докажите, что для всех хорд AB данной окружности величина $\left(AB^2\right)/AD$, где AD – расстояние от точки A до касательной в точке B, имеет одно и то же значение.

5. Пусть H – точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC, а A', B', C' – точки, симметричные точке H относительно прямых BC, CA, AB. Докажите, что точки A', B', C' лежат на окружности, описанной около треугольника ABC.

6. Отрезок AB является диаметром окружности с центром O. На каждом радиусе OM окружности отложен от центра O отрезок, равный расстоянию от конца M этого радиуса до прямой AB. Найдите множество концов построенных таким образом отрезков.

Занятие 32.
Декартовы координаты на плоскости. Координаты векторов

Проведем на плоскости через точку O две взаимно перпендикулярные прямые – оси координат. Ось X, она обычно горизонтальна, называют осью абсцисс, а ось Y – осью ординат. Точкой пересечения O – началом координат – каждая из осей разбивается на две полуоси. Условимся одну из них называть положительной, отмечая ее стрелкой, а другую отрицательной.

Каждой точке A плоскости поставим в соответствие пару чисел – координаты точки – абсциссу x и ординату y. Через точку A проведем прямую, параллельную оси ординат. Она пересечет ось абсцисс в некоторой точке x'. Назовем абсциссой точки A число x, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки O до x'. Ордината y определяется аналогичным образом. Введенные на плоскости таким образом координаты называются декартовыми и обозначаются (x, y).

Координаты середины $C(x, y)$ отрезка AB, где точки A и B – две произвольные точки плоскости с координатами $A\left(x_1, y_1\right)$, $B\left(x_2, y_2\right)$, выражаются так: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Расстояние между двумя произвольными точками плоскости A и B с координатами $A\left(x_1, y_1\right)$, $B\left(x_2, y_2\right)$, выражается так: $d = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}$.

Уравнение окружности с центром в точке с координатами (a, b) и радиусом R: $\left(x - a\right)^2 + \left(y - b\right)^2 = R^2$.

Уравнение прямой: $ax + by + c = 0$.

Координаты вектора $\overline{a}$, имеющего началом точку $A\left(x_1, y_1\right)$, а концом точку $B\left(x_2, y_2\right)$, будут вычисляться следующим образом: $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$.

Абсолютная величина вектора с координатами $\overline{a} = \left(a_1, a_2\right)$ выражается так: $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Если $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ – единичные векторы, то любой вектор $\overline{a} = \left(a_1, a_2\right)$ допускает следующее разложение:

$$\overline{a} = a_1 \cdot \overline{e}_1 + a_2 \cdot \overline{e}_2 .$$

Скалярное произведение векторов

1. Скалярным произведением векторов $\overline{a}\left(a_1, a_2\right)$ и $\overline{b}\left(b_1, b_2\right)$, заданных своими координатами, называется сумма попарных произведений координат векторов, то есть число $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

2. Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.

3. Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. И наоборот, если скалярное произведение равно нулю, то векторы перпендикулярны.

Задачи

1. Найдите координаты середины отрезка с концами (10, 2) и (–2, 6).

2. Даны точки A(2, 1) и B(–2, 6). Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB.

3. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки A(–1, 1) и B(1, 0).

4. Найдите точки пересечения с осями координат прямой $3x-2y+6=0$.

5. Даны векторы $\overline{a}$ (3, 2) и $\overline{b}$ (0,–1). Найдите вектор: $-2\overline{a}+4\overline{b}$.

6. Найдите абсолютную величину вектора $\overline{a}+\overline{b}$, если $\overline{a}$ (1, –4); $\overline{b}$ (–4, 8).

Домашнее задание 32

1. Даны точки $A(0,1)$; $B(1,0)$; $C(1,2)$; $D(2;1)$. Докажите, что $\overline{AB}=\overline{CD}$.

2. Найдите сумму векторов: а) $\overline{a}$ (1,–2), $\overline{b}$ (2,–3); б) $\overline{a}$ (–3,4), $\overline{b}$ (2,–3).

3. Абсолютная величина вектора $\lambda\overline{a}$ равна 5. Найдите λ, если $\overline{a}$ (–6,8).

4. Найдите косинусы углов треугольника, если его вершины заданы точками: $A(1,1)$; $B(4,1)$; $C(4,5)$.

5. Даны четыре точки: $A(1,1)$; $B(2,3)$; $C(0,4)$; $D(-1,2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – прямоугольник.

6. Решите уравнение: $|x-2|+|x-3|=5$.

Приложение.
Олимпиадные задачи для самостоятельной работы

1. Сколько существует делящихся на 9 десятизначных натуральных чисел, в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 5?

2. На математическом конкурсе было предложено несколько простых и несколько сложных задач. Участнику давали 3 очка за решение сложной и 2 очка за решение простой задачи. Кроме того, за каждую нерешенную простую задачу списывалось одно очко. Рома решил 10 задач и набрал 14 очков. Сколько было простых задач?

3. Баба-Яга и Кощей собрали некоторое количество мухоморов. Количество крапинок на мухоморах Бабы-Яги в 13 раз больше, чем на мухоморах Кощея, но после того, как Баба-Яга отдала Кощею свой мухомор с наименьшим числом крапинок, на ее мухоморах стало крапинок только в 8 раз больше, чем у Кощея. Докажите, что вначале у Бабы-Яги было не более 23 мухоморов.

4. На доске выписали в порядке возрастания все числа от 1 до 10000, а потом стерли те, которые не делятся ни на 4, ни на 11. Какое число окажется 1994-м?

5. В турнире по олимпийской системе (то есть в каждом туре оставшиеся игроки разбиваются на пары, и проигравшие выбывают) играли 512 человек. Каждому присвоили квалификационный номер – от 1 до 512. Партия называется неинтересной, если разность номеров участников больше 30. Может ли в турнире не быть неинтересных партий?

6. Есть пять монет достоинством 1, 2, 3, 5 и 10 пиастров. Одна из них фальшивая, то есть ее вес в граммах не равен ее достоинству. Как при помощи чашечных весов без гирь определить фальшивую монету?

7. При дворе принца Лимона служили герцоги, графы и бароны. В начале правления принца придворных было 2009, но каждый день один из них убивал другого на дуэли, причем герцоги убивали только графов, графы – только баронов, а бароны – только герцогов. При этом никто не выиграл дуэль дважды. В конце концов, остался в живых лишь барон Апельсин. Какой титул был у первого погибшего придворного?

8. Три двузначных числа таковы, что сумма любых двух из них равна числу, отличающемуся от третьего лишь порядком цифр. Какой может быть сумма этих трех чисел?

9. В марсианском алфавите k букв, и два слова называются похожими, если в них одинаковое количество букв, и они отличаются лишь в одном месте (например, ТРИКС и ТРУКС). Докажите, что все слова в языке можно разбить на k групп, в каждой из которых все слова не похожи друг на друга.

10. Представим, что 25 школьников стоят в ряд. Самый левый школьник выше самого правого. Докажите, что найдется школьник, у которого левый сосед выше правого.

11. На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят либо на 2, либо на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.

12. Утром в луже плавало 19 синих и 95 красных амеб. Иногда они сливались: если сливаются две красные, то получается одна синяя амеба, если сливаются две синие, то получившаяся амеба тут же делится, и в итоге образуются четыре красные амебы, наконец, если

сливаются красная и синяя амебы, то это приводит к появлению трех красных амеб. Вечером в луже оказалось 100 амеб. Сколько среди них синих?

13. В таблице 2 х 2 стоят четыре натуральных числа. При этом соседние по вертикали числа отличаются на 6, а соседние по горизонтали – в два раза. Что за числа стоят в таблице?

14. Пятизначное число, в записи которого нет нулей, делится на 54. Из него вычеркнули одну цифру, и получилось четырехзначное число, делящееся на 54. Из этого четырехзначного числа тоже вычеркнули одну цифру – получилось трехзначное число, делящееся на 54. Наконец, после вычеркивания еще одной цифры, получилось число 54. Найдите исходное число.

15. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде частного от деления квадрата некоторого натурального числа на куб некоторого натурального числа.

16. Сумма трех натуральных чисел (не обязательно различных) равна 100. Из этих чисел можно составить три попарные разности (при вычислении разности из большего числа вычитают меньшее). Какое наибольшее значение может принимать сумма этих попарных разностей?

17. Тома задумала натуральное число и нашла его остатки при делении на 3,6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.

18. В 2009 году каждый из президентов пятнадцати «Обществ защиты чего-то особенного» послал в подарок на день рождения каждому из остальных президентов торт с таким числом свечек, сколько лет исполнилось юбиляру. Могло ли так случиться, что всего было послано 2009 свечек?

19. Можно ли так расставить по кругу натуральные числа от 1 до 10 таким образом, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих через одно, делилась на три?

20. На поле брани встретились армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый толстый солдат выстрелил в одного из тонких, затем каждый уцелевший тонкий солдат выстрелил в одного из толстых. Докажите, что в живых осталось не менее 1000 солдат.

21. На поле брани встретились армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый толстый солдат выстрелил в одного из тонких, затем каждый уцелевший тонкий солдат выстрелил в одного из толстых. После этого каждый уцелевший толстый еще раз выстрелил в одного из тонких. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.

22. В Море Дождей живут осьминожки, у каждого один или два друга. Когда взошло солнце, те, у кого двое друзей, посинели, а те, у кого один друг – покраснели. Оказалось, что любые два друга – разноцветные. Тогда 10 синих осьминожек перекрасились в красный цвет, а 12 красных – в синий; теперь любые два друга одного цвета. Сколько осьминожек в Море Дождей?

23. На доске написано число 23. Каждую минуту число стирают с доски и записывают на его место произведение его цифр, увеличенное на 12. Что окажется на доске через час?

24. Можно ли так расставить по кругу все целые числа от –7 до 7 (включая 0), чтобы у каждого числа произведение двух его соседей было неотрицательным? Если да – приведите пример, если нет – объясните, почему.

25. Докажите, что в любом шестидесятизначном числе, десятичная запись которого не содержит нулей, можно зачеркнуть несколько цифр так, что получившееся в результате число будет делиться на 1001.

26. Можно ли подобрать такие четыре различных натуральных числа, чтобы сумма любых двух из них была степенью числа 5?

27. Дети, построенные парами, выходят из лесу, где они собирали орехи. В каждой паре идут мальчик и девочка, причем у мальчика орехов либо вдвое больше, либо вдвое меньше, чем у девочки. Могло ли так случиться, что у всех 1 000 орехов?

28. На пальме сидело много мартышек. Двадцать из них получили по пинку. Пнутая мартышка срывает с пальмы три финика и раздает подружкам. Мартышка, получившая два финика, съедает их и пинает другую мартышку. После того, как произошло 30 новых пинков, мартышки упокоились. Сколько фиников осталось у мартышек?

29. Несколько государственных служащих получили одинаковую зарплату. После этого время от времени кто-нибудь из них брал часть своих денег и раздавал их поровну остальным. Через несколько таких операций у одного из служащих оказалось 24 копейки, а еще у одного – 17 копеек. Сколько было служащих?

30. По окружности расставлены 20 единиц и 30 двоек так, что никакие три одинаковые цифры не стоят подряд. Найдите сумму произведений всех троек подряд идущих цифр.

31. Можно ли расставить в клетках квадрата 4 х 4 числа от 1 до 16 так, чтобы в каждой клетке было или меньше всех чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, или больше всех этих чисел?

32. Аня, Ваня и Саня рисовали чертиков на чистых тетрадных листочках. Экономная Аня нарисовала больше чертиков, чем Ваня и Саня вместе, и израсходовала на это меньше всего листочков, а расточительный Ваня нарисовал меньше всего чертиков, но извел больше листочков, чем Аня вместе с Саней. Больше пяти чертиков на листочек не влезает. Докажите, что Аня изрисовала не меньше шести листочков.

33. Под куполом цирка летают красные, синие и зеленые воздушные шары – по 150 каждого цвета. Внутри каждого синего шара находится ровно 13 зеленых, внутри каждого красного – ровно 5 синих и ровно 19 зеленых. Докажите, что какой-то зеленый шарик не содержится ни в одном из 449 остальных шаров.

Ответы и/или краткие указания к решениям

Домашнее задание 1.

1. 53 % примесей в руде. 2. Отцу – 42 года, сыну – 24. 3. $19/49$. 4. 9 или 11. 5. а) 11; б) 21; в) 20. 6. 2970 и 6975.

Домашнее задание 2.

1. На расстоянии 400 м. 2. $35°; 70°; 65°$. 3. Параллельный перенос $y=|x|$ вдоль оси OY. 4. Параллельный перенос $y=|x|$ вдоль оси OX. 5. $x\in(-\infty;\ 1)$. 6. Разбейте монеты на 3 группы: 6, 6 и 5 и сравните вес монет.

Домашнее задание 3.

1. $5\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; $\frac{10}{\sqrt{7}}$. 2. $\angle C = 45°$. 3. Разрежьте по средней линии треугольника и высоте образованного треугольника, проведенной к средней линии. 4. Разложите на множители $\left(7^2\right)^{50}-\left(2^2\right)^{50}$. 5. 36 и 63. 6. $-2\sqrt{2}$.

Домашнее задание 4.

1. Свойство 4) совместно с любым из трех остальных, а свойства 2) и 3) совместны лишь со свойством 4). Ответ: $A_1=35;\ A_2=46;\ A_3=74$. 2. Верно рассказал Слава. 3. Наташа получила первую, Коля – вторую, Дима – третью премии. Рассмотрите три возможности. В каждом случае одно высказывание считайте верным, а остальные – ложными. Установите в каждом случае возможные варианты распределения премий. 4. 3 г. 5. $20=2+9+9$. 6. 30 ч.

Домашнее задание 5.

1. Пересечение биссектрисы угла с геометрическим множеством точек, равноудаленных от заданной прямой. 2. Пересечение окружности с геометрическим множеством точек, равноудаленных от заданной прямой. 3. $n=6$. 4. $(2;0);(-2;0)$. 5. $\left(n^2+1\right)\left(n^2+4n+5\right)$. 6. Надо взять первого сплава 40 кг, второго – 100 кг.

Домашнее задание 6.

1. $\frac{11a+b}{6(a-b)}$. 2. Выделите целую часть и выполните параллельный перенос вдоль осей: OX и OY. 3. а) 4; б) $n=4k-1$, $k\in N$; $k\neq 7$. 4. 10 нулей. 5. Треугольник равнобедренный. 6. Первый поезд – 75 ч; второй – 50 ч.

Домашнее задание 7.

1. $p=-2$; $g=-1$. 2. Раскройте модуль по определению, выделите полный квадрат и выполните параллельный перенос вдоль осей: Ox и Oy. 3. $(1;0);(-2;3)$. 4. 14 дней первый рабочий и 19 дней – второй. 5. Выделите полный квадрат. 6. Нет.

Домашнее задание 8.

1. Вычислите длину высоты, проведенной к гипотенузе. 2. На одном из оснований трапеции отложите отрезок длиной равной полусумме оснований. Покажите, что площадь треугольника, образованного боковой стороной и данным отрезком искомая. 3. $x=2000$. 4. 1 кг ирисок стоит 1 руб. 11 коп. 5. Линия сгиба MK перпендикулярна диагонали AC и проходит через центр прямоугольника. Докажите, что $S_{CMK}>\frac{1}{4}S_{ABCD}$. 6. $a\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Домашнее задание 9.

1. $x=-8$ и $x=6$; $x=5$ и $x=-4$. 2. $\frac{2(x+9)}{3(x-7)}$. 3. а) $x=\frac{15}{4}$ и $x=1$; б) $x=-\frac{11}{5}$ и $x=6$. 4. $20°$. 5. Достройте треугольник до параллелограмма. 6. Гипотенуза равна 50.

Домашнее задание 10.

1. Нет. 2. Нет. 3. Нет. 4. Знаем, что: $(a+b+c)^2=\left(a^2+b^2+c^2\right)+$ $+2\cdot(ab+bc+ac)$. 5. Второй турист идет быстрее. 6. Теорема Пифагора.

Домашнее задание 11.

1. 3 ч. 2. 5 и 7 м. 3. 500 кг. 4. 72 км/ч. 5. 20 кг. 6. 202032 и 207036.

Домашнее задание 12.

1. 0,5. 2. $AC = 1$. 3. Воспользуемся тем, что диагональ ромба – биссектриса угла треугольника ABC. 4. $\frac{bc}{a+c}$. 5. Скорость велосипедиста больше скорости пешехода в 2 либо в 3 раза. 6. Группировка.

Домашнее задание 13.

1. а) $x^2 - 11x + 24 = 0$; б) $3x^2 - 16x + 64 = 0$. 2. а) 70; б) $\frac{21}{4}$. 3. $a = 0$. 4. 35. 5. Докажите, что треугольники BMB_1 и ABB_1 равны. 6. Последняя цифра 1.

Домашнее задание 14.

1. Выделите полный квадрат. 2. Выделите полный квадрат. 3. а) $x > 0$; б) $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$; в) $x > 4$. 4. Нельзя разбить. (Сумма цифр нечетное число, а в каждой группе сумма цифр четна.) 5. Рассмотрите равные треугольники. 6. $9/10$.

Домашнее задание 15.

1. Надо добавить 15 кг пресной воды. 2. Подбор. 3. Параллельный перенос. 4. Преобразования: $(x-1)(x-2)(x+3)$. 5. Задача Рамсея. Логические рассуждения. 6. Английский изучают 28 человек, немецкий – 21, французский – 6.

Домашнее задание 16.

1. Первый игрок всегда выигрывает. 2. Поровну. 3. 5812. 4. Выиграет первый. 5. 1 : 5. 6. Проводим через основание биссектрисы прямые, параллельные сторонам треугольника. Стороны полученного вспомогательного треугольника находятся из подобия.

Домашнее задание 17.

1. В 101 раз. 2. Покупка стоила 700 руб. 3. Решите обратную задачу. Рассмотрите правильный треугольник ABN, точка N – внутри квадрата. 4. Выделите области, удовлетворяющие данным отношениям. 5. Выделите области, удовлетворяющие данным отношениям. 6. $y = x^2 - 2x + 4$.

Домашнее задание 18.

1. $\frac{15}{8}$; 2^{-25}. 2. –4. 3. $\frac{ab}{a+b}$. 4. Единственным способом: $1979 = 990^2 - 989^2$. 5. Прямоугольник равновелик параллелограмму и квадрату со стороной $\sqrt{ab}$. 6. На 25 % больше.

Домашнее задание 19.

1. Делимость. 2. 8280. 3. 432; 936. 4. Верно. 5. Преобразования. 6. 10652 – 9067 = 1585.

Домашнее задание 20.

1. Высота равна $\frac{4}{9}\sqrt{110}$ и делит сторону на отрезки $3\frac{7}{9}$, $5\frac{2}{9}$. 2. 5,2. 3. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 4. Высота равна 4, гипотенуза равна 6,25. 5. Число 9. 6. 20 и 30 мин.

Домашнее задание 21.

1. 2; 10. 2. 2. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 3. 7. 4. $2 \cdot 3^{2008}$ (на каждом шаге сумма всех новых чисел будет в два раза больше суммы всех старых чисел). 5. За 3 мин. 6. $45° + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Домашнее задание 22.

1. 51286+1582=52868. 2. В шестеричной. 3. 25; 30. 4. $2234210_5 = 39930 = 2000202220_3$. 5. а) $x = 6$; б) $x = 9: (5x+3)\cdot(x+6) = 8x^2 + 8x$. 6. Указание. Пусть первая цифра числа *n* равна *A*, вторая – *B*, третья – *C*, четвертая – *D*. Тогда $S + 9T = (A+B+C+D) + 9((100A+10B+C) + (10A+B) + A) = 1000A + 100B + 10C + D = n$.

Домашнее задание 23.

1. 18969+18969=37938. 2. Преобразования. 3. $19 \cdot 19 = 361$. 4. 3/5. 5. 2. 6. 13.

Домашнее задание 24.

1. Описать окружность вокруг четырехугольника $ANMC$. 2. Точки K и D совпадают. 3. Углы между хордами, секущими, касательными. 4. Докажите, что прямая OE параллельна прямой BH. 5. Использовать свойства десятичной формы записи числа. 6. (2, 2), (−3, −3).

Домашнее задание 25.

1. Да. 2. Принцип Дирихле. 3. Принцип Дирихле. 4. Нет. Если числа нечетные, то остаток от деления суммы их квадратов на 4 равен 2. 5. Первое место – 1 участник, второе и третье места – по двое участников. 6. Угол A равен 60°.

Домашнее задание 26.

1. $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (рассмотрите равнобедренный треугольник ABC: $AC = BC = 1$; $\angle C = 36°$). 2. Формулы приведения. 3. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}}$.

4. Сгруппируйте и рассмотрите остатки от деления на 3. 5. $\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot a^2$. 6. 18 руб.

Домашнее задание 27.

1. Углы между хордами и секущими. 2. Углы между хордами. 3. Углы между хордами, секущими, касательными. 4. Стороны нового треугольника являются биссектрисами внешних углов треугольника ABC. 5. 62 яблока. 6. От противного.

Домашнее задание 28.

1. $884375 = 900000 - 5^6$. 2. а) $\frac{8!}{3!}$; б) $\frac{11!}{2!\cdot 3!}$; в) $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$ 3. 13!/13 = 12! 4. $6^6 - 6!$ 5. Продолжить боковые стороны трапеции до пересечения. Ответ: $AD:BC = 2$. 6. $3\frac{1}{8}$ кг меди.

Домашнее задание 29.

1. Сведение к построению треугольника по трем заданным сторонам. 2. «Распрямление» периметра. 3. Отражение. 4. Отражение. 5. Первого сплава – 3 части, второго – одну часть. 6. $(3;\ 1)$; $\left(\frac{5}{3};\ \frac{11}{3}\right)$.

Домашнее задание 30.

1. $S_{ABC} = 3S$. 2. Вычислите площади треугольников. 3. $\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}+\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} < \sqrt{10}$. 4. $S_{AKD} = \frac{S}{6}$. 5. 0,4 – наименьшее значение выражения. 6. 14 км.

Домашнее задание 31.

1. Сложение векторов. 2. 364768+364768=729536. 3. 14 и 10 дней. 4. Вписанные углы и подобные треугольники. 5. Вписанные углы. 6. Вписанные углы.

Домашнее задание 32.

1. Длина вектора. 2. Сложение координат. 3. 1/2. 4. Скалярное произведение. 5. Длина векторов и скалярное произведение. 6. $[-3,2]$.

Решения олимпиадных задач

1. У таких чисел сумма цифр делится на 5 и на 9 и при этом не превосходит 50, значит, она равна 45. Поэтому в записи числа участвуют 9 пятерок и один ноль. И обратно, каждое число из 9 пятерок и нуля удовлетворяет условию. Ноль может стоять в любой позиции, кроме первой, что дает 9 вариантов. Ответ: 9 чисел.

2. Если все задачи на конкурсе были сложными, то Рома набрал бы 3*10=30 очков. На каждой же простой задаче, независимо от того, решил ее Рома или нет, он теряет одно очко (то есть получает на одно очко меньше, чем если бы та же задача считалась сложной). Так как 14 = 30–16, то простых задач было 16.

3. Пусть на мухоморах Кощея было n крапинок, а на том, который он получил – k крапинок. Тогда у Бабы-Яги было $13n$ крапинок, а осталось – $(13n-k)$. Значит, $13n-k=8(n+k)$, то есть $n = 9\,k/5$. Значит, у Бабы-Яги в начале было $117\,k\,/5<24k$ крапинок, а поскольку на каждом мухоморе было не меньше k крапинок, то их у нее было не более 23.

4. Ответ: 6268. На доске остались числа, делящиеся на 4 или на 11. Остатки этих чисел при делении на 44 образуют периодическую последовательность с периодом 14. Так как 1994=142*14+6, то 1994-ое число – шестое в 143-м периоде.

5. Ответ: нет, не может. После каждого тура, если в нем все партии интересны, наименьший номер оставшегося участника увеличится не более, чем на 30, а наибольший номер оставшегося участника уменьшится не более, чем на 30. Тогда после 8 туров разность между наибольшим и наименьшим номерами будет не меньше, чем 511–8*60 = 31. Но это значит, что партия в финале будет интересной.

6. Выполним 3 взвешивания, чтобы проверить равенства 1+2=3, 2+3=5, 2+3+5=10 для весов соответствующих монет. Если фальшива монета в 1 пиастр, то мы обнаружим нарушение только первого равенства; если фальшива монета в два пиастра, то нарушены все три равенства, причем во всех взвешиваниях будет перевешивать одна и та же чашка весов; если фальшива монета в 3 пиастра, то опять нарушены все три равенства, но в первом и втором взвешивании будут перевешивать разные чашки; если фальшива монета в 5 пиастров, то будут нарушены два последних равенства; наконец, если фальшива монета в 10 пиастров, то будет нарушено только последнее равенство. Как видим, исход взвешиваний однозначно определяет, какая монета фальшивая.

7. Барон Апельсин убил ровно одного герцога, поскольку выиграл только одну дуэль. Этот герцог до дуэли с Апельсином убил одного графа (и больше никого), граф до этого убил барона, барон – еще какого-то герцога и т. д. Титулы придворных в этом перечислении погибших будут повторяться через три. Так как возглавляет этот список, уцелевший барон, то четвертое, седьмое,…, 2008-е места в этом списке также занимают бароны. Тогда самым последним в списке идет герцог.

8. Остаток двузначного числа при делении на 9 не зависит от порядка цифр. Рассматривая выражение: $a\overline{b}+c\overline{d}+e\overline{f}$, находим, что оно при делении на 9 дает такой же остаток, как и число $a\overline{b}+b\overline{a}$, а это число дает такой же остаток при делении на 9, как и $2a\overline{b}$. Аналогично можно пока-

зать, что такой же остаток имеют числа $2\overline{cd}$ и $2\overline{ef}$. Значит, все три числа имеют одинаковые остатки при делении на 9. Но с другой стороны, сумма двух чисел дает такой же остаток, что и третье. Такое возможно только если все три числа делятся на 9. В этом случае сумма цифр каждого числа равна 9, и мы получаем: $\overline{ab}+\overline{cd}+\overline{ef}=\overline{ab}+\overline{ba}=11(a+b)=99.$

9. Заменим буквы числами от 1 до k и в одну группу поместим все слова, у которых сумма букв дает один и тот же остаток при делении на к. Очевидно, что любые два слова из одной группы не могут отличаться лишь одной буквой.

10. Предположим, что у каждого школьника (кроме крайних) правый сосед не ниже левого. Пронумеруем школьников слева направо. Тогда третий школьник не ниже первого, пятый не ниже третьего, (а значит, не ниже первого), и так далее. Таким образом, получаем, что двадцать пятый школьник не ниже первого, что противоречит условию.

11. После каждой операции изменяется на единичку четность общего количества двоек и троек в разложении на простые множители числа на доске. Вначале это количество нечетно: 12=2*2*3. Поэтому через 60 операций это количество должно быть нечетным тоже, но в разложении числа 54 три тройки и одна двойка.

12. Заметим, что после каждого деления число синих амеб увеличивается на столько же, насколько уменьшается общее число амеб; или уменьшается на столько, на сколько увеличивается общее число амеб. Число амеб уменьшилось на 14, значит, число синих амеб стало равно 19+14=33.

13. В таблице стоят числа 6 и 12. Пусть в верхней строчке слева стоит число x, справа – $2x$. (Случай, когда правое число в верхней строчке в два раза меньше левого, ничем не отличается в силу симметрии таблицы.) Тогда внизу слева стоит число x+6 или x–6, а внизу справа – число $2x + 6$ или $2x$–6 (рис.2). Поскольку одно из чисел в нижней строчке в два раза больше другого, то должно быть выполнено одно из следующих восьми соотношений: $x+6=2(2x+6)$, $x-6=2(2x+6)$, $x+6=2(2x-6)$, $x-6+2(2x-6)$, $2(x+6)=2x+6, 2(x-6)=2x+6, 2(x+6)=2x-6, 2(x-6)=2x-6.$ Лишь одно из этих уравнений имеет натуральное решение, для которого числа, стоящие в таблице, будут натуральными.

14. Исходное число – 59994. Так как до и после каждого из вычеркиваний число делилось на 9, то и сумма цифр числа в каждый из этих моментов делилась на 9. Поэтому вычеркивалась каждый раз девятка. Среди чисел 549, 594, 954 только 594 делится на 54, значит, перед последним вычеркиванием число было равно 594. Среди чисел 9594, 5994,5949 на 54 делится только 5994, значит, после первого вычеркивания число было равно 5994. Наконец, среди чисел 95994, 59994, 59949 на 54 делится только 59994. Это и есть исходное число.

15. Например, $n=\dfrac{\left(n^2\right)^2}{n^3}$.

16. Ответ: 194. Обозначим данные натуральные числа a, b и c, причем пусть $a \ge b \ge c$. Тогда сумма их попарных разностей равна $(a-b)+(a-c)+(b-c)=2(a-c)$. Так как $b \ge 1$, $c \ge 1$, а сумма всех трех чисел равна 100, то $a \le 98$. Значит, $2(a-c) \le 2(98-1)=194$. Равенство достигается только при $a=98, b=c=1$.

17. Ответ:17. Остатки при делении на 3, 6, 9 не превосходят соответственно 2, 5, 8, поэтому сумма этих остатков не больше 2+5+8 = 15, и равенство может быть только в случае, если остатки задуманного числа как раз и равны 2, 5, 8 соответственно. Так как число дает остаток 8 при делении на 9, то оно может давать при делении на 18 лишь остатки 8 или 17. Но в первом случае число оказалось бы четным и не могло дать остаток 5 при делении на 6. Второй случай действительно может иметь место, например, если задумано число 17.

18. Ответ: такого быть не могло. Каждый президент получил 14 тортов с одним и тем же числом свечек (равным его новому возрасту). Поэтому общее число свечек, полученных каждым президентом, делится на 14. Значит, и количество свечек во всех подарках делится на 14. Поскольку 2009 на 14 не делится, свечек не может быть ровно 2009.

19. Так расставить числа нельзя. Допустим, что нам удалось расставить числа. Где-то на окружности стоит число 3. Пусть a – число, стоящее через один от тройки по часовой стрелке. Тогда a+3, по условию, должно делиться на 3, значит, а делится на 3. Пусть b – число, стоящее через один от a по часовой стрелке. По условию, a+b делится на 3. Значит, b делится на 3. Сдвигаясь еще через одно число по часовой стрелке, мы аналогично найдем еще одно (уже четвертое) число, кратное трем. Но этого не может быть: среди чисел от 1 до 10 только три числа делятся на 3.

20. Пусть уцелело x тонких солдат. Тогда они убили не больше x толстых. Значит, толстых осталось не меньше 1000–x, а общее число оставшихся солдат не меньше x+1000–x = 1000.

21. После двух залпов осталось в живых не менее 1000 солдат, (см. решение задачи 21). Заметим, что следующим залпом могло быть убито не более половины оставшихся, значит, в конце останется не менее 500 живых.

22. После восхода у каждого синего осьминожки два друга, причем оба они красные, а у каждого красного осьминожки один друг, причем синий. Для каждого синего осьминожки образуем группу, состоящую из него и двух его (красных) друзей. Тогда каждый красный осьминожка попадет в столько групп, сколько у него синих друзей, то есть в одну. Таким образом, все осьминожки разбиваются на группы по трое, и в каждой группе один синий дружит с двумя красными. Так как после перекрашивания любые

два друга стали одинаковыми по цвету, в каждой группе перекрасился либо синий, либо оба красных осьминожки. По условию, групп первого типа 10, а второго – 12/2=6, поэтому всего групп 16, а осьминожек – 16*3=48.

23. Ответ: 16. Посмотрим, какие числа появятся на доске в течение нескольких первых минут: $23 \to 18 \to 20 \to 12 \to 14 \to 16 \to 18 \to \cdots$ Мы видим, что, начиная со второй минуты, числа повторяются с периодом 5. Так как 60 = 1+5*11+4, то через час на доске будет записано пятое число из (двенадцатого) периода, то есть 16.

24. Ответ: нельзя. Предположим, что такая расстановка чисел существует. По условию, любые два числа, стоящие через одно, имеют неотрицательное произведение, то есть либо это числа одного знака, либо одно из них – нуль. Занумеруем места, на которых стоят числа с номерами от 1 до 15 (всего чисел от –7 до 7 ровно 15 штук), начиная с того места, где стоит 0. Рассмотрим по очереди числа, стоящие на местах с номерами: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14. Каждые два числа, номера мест которых – соседние в этом списке, стоят на окружности через одно. При этом среди них нет нуля, так как нуль стоит на первом месте. Значит, все они – одного знака. С другой стороны, список включает все места, кроме первого, значит, все расставленные числа, кроме нуля, должны быть одного знака. Противоречие.

25. Заметим, что есть цифра, которая встречается в записи числа по крайней мере 6 раз (если каждая цифра встречается не более 5 раз, то всего в числе не более 5*9 = 45 цифр). Значит, можно вычеркнуть цифры так, что останется число из шести одинаковых цифр. Оно делится на 111111 = =111*1001, значит, делится и на 1001.

26. Из четырех данных чисел найдутся два числа одинаковой четности. Ясно, что их сумма будет четна и поэтому не может быть равна степени нечетного числа.

27. Заметим, что в каждой паре суммарное число орехов должно делиться на три, значит, и общее число орехов должно делиться на 3 и не может быть равно 1000.

28. Ответ: 90 фиников. Всего мартышки получили 50 пинков, значит, они собрали 150 фиников. 30 новых пинков сделали те мартышки, которые съели перед этим два финика, значит, 60 фиников было съедено. Осталось 90 фиников.

29. Ответ: 7 служащих. Когда один из служащих раздает другим часть своих денег, можно считать, что сначала он дает каждому из остальных по копейке, потом – еще по копейке и так далее, пока не отдаст все, что хотел. Заметим, что разность количеств денег у первого и второго служащего всегда будет делиться на k, где k – количество служащих. Действительно, сразу после зарплаты разность была равна нулю, то есть делилась на k. Если первый даст остальным по копейке, то у него станет на (k–1) копеек меньше, а у второго – на одну копейку больше, и разность изменится на k, то

есть по-прежнему будет делиться на k. Аналогично, если деньги раздает второй служащий. Если же деньги раздает кто-то из остальных служащих, то количество денег у первого и второго увеличивается на одну и ту же величину, то есть разность не изменится, и опять-таки будет делиться на к. По условию, в какой-то момент эта разность стала равна 7 копейкам. Значит, 7 делится на k. Так как в условии упомянуты двое служащих, то $k > 1$. Следовательно, $k = 7$.

30. Ответ: 180. Мы воспользуемся следующим хорошо известным равенством: 2+2 = 2*2. Поскольку три стоящих подряд числа на окружности – это две единицы и двойка, либо две двойки и единица, то равенство показывает, что произведение трех подряд стоящих чисел вдвое больше количества двоек среди них. Следовательно, искомая сумма равна удвоенному количеству двоек во всех тройках подряд стоящих чисел, что в шесть раз больше числа двоек на окружности.

31. Ответ: можно. Например, можно раскрасить доску в шахматном порядке, на черные клетки расставить произвольным образом числа от 1 до 8, а на белые – числа от 9 до 16.

32. Пусть у Ани было n листочков. Тогда у Сани их было не менее (n+1), а у Вани – не менее (2n+2). Значит, Ваня нарисовал не менее 2n+2 чертиков, а Саня – не менее 2n +3 чертиков. Следовательно, Аня нарисовала не менее 4n +6 чертиков. Но поскольку у Ани было лишь n листочков, то она не могла нарисовать больше 5n чертиков. Значит, $4n+6 \le 5n$, откуда $n \ge 6$.

33. Рассмотрим все шары, которые не содержатся ни в каком другом шаре. Допустим, что среди них k синих, n красных и ни одного зеленого. Тогда внутри этих шаров содержится 13k+19n зеленых. Следовательно, $13k + 19n = 150$. Но, как нетрудно проверить перебором, это уравнение не имеет решения в натуральных числах. Следовательно, хотя бы один зеленый шар должен не содержаться, ни в каком другом шаре.

Список литературы

1. Материалы подготовительных курсов СУНЦ НГУ. Составители: Куклина Г. Я., Киприянов А. А., Барам С. Г., Ильин М. А., Алешин В. Д. Под ред. А. А. Никитина, А. С. Марковичева. Новосибирск: Новосибирский гос. ун-т, Специализированный учебно-научный центр, 2006.

2. Урман А. А., Храмцов Д. Г., Шрайнер А. А. Задачи городских и районных математических олимпиад. Новосибирск: Новосибирский государственный педагогический университет, Новосибирский государственный университет, 2004.

3. Шрайнер А. А. Задачи районных математических олимпиад Новосибирской области. Новосибирск: НГПУ, 2000.

4. Никитин А. А., Белоносов В. С. и др. Геометрия: Учебник для восьмых-девятых классов средних общеобразовательных учебных заведений. Новосибирск: ИДМИ, 2000.

5. Никитин А. А., Белоносов В. С., и др. Математика: Учебник для восьмых классов средних общеобразовательных учебных заведений. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2001.

6. Белоносов В. С., Фокин М. В. Задачи вступительных экзаменов по математике: Учебное пособие. Новосибирск: Сиб. Унив. Изд-во, 2005.

7. Сурмин А. Г., Ерофеев В. И. Вычислительные задачи по математике с решениями: Учебное пособие. Новосибирск: Сиб. Унив. Изд-во, 2003.

8. Сурмин А. Г., Ерофеев В. И. Задачи по математике, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в ВКИ НГУ в 1993–2001 гг. Новосибирск: НГУ, 2001.

9. Барсуков А. Н. Алгебра. Учебник для 6–8 классов. М.: Просвещение, 1970.

10. Звавич Л. И., Аверьянов Д. И., Пигарев Б. П., Трушанина Т. Н. Задания для проведения письменного экзамена по математике в 9 классе: Пособие для учителя. М.: Просвещение, 1996.

11. Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С. Геометрия: задачник к школьному курсу. М.: АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1998.

12. Атанасян Л. С., Бутузов А. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия: Учебник для 7–9 классов средней школы. М.: Просвещение, 1994.

13. Атанасян Л. С., Бутузов А. Ф., Кадомцев С. Б., Юдина И. И. Геометрия: Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса. М.: Просвещение, 1997.

14. Киселев А. П., Рыбкин Н. А. Геометрия: Планиметрия: 7–9 классы: Учебник и задачник. М.: Дрофа, 1995.

15. Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Геометрия. М.: «Просвещение», 1992.

16. Каганов Э. Д. 400 самых интересных задач с решениями по школьному курсу математики для 6–11 классов. М.: ЮНВЕС, 1997.

17. Гордин Р. К. Это должен знать каждый матшкольник. М.: МНЦМО, 2003.

18. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре: Учебное пособие для 8–9 классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 2001.

19. Лурье М.В. Задачи на составление уравнений. Техника решения. М.: Учебно-научный центр довузовского образования, ФИЗМАТЛИТ, 2002.

20. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1975.

21. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. М.: МЦНМО, 2004.

22. Варианты вступительных экзаменов в Школу имени А. Н. Колмогорова / Сост.: Н. Б. Алфутова, В. В. Загорский, Т. П. Корнеева, М. В. Смуров, А. В. Устинов. М.: Школа имени А. Н. Колмогорова, Самообразование, 2000.

23. Петраков И. С. Математика для любознательных. М.: Просвещение, 2000.

24. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Математические олимпиады Московской области. 1993–2002. М.: Изд-во МФТИ, 2003.

25. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренко Ю. В., Резниченко С. В., Слинько А. М. Математические олимпиады школьников. 9 класс. М.: Просвещение, 1997.

26. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренко Ю. В., Резниченко С. В., Слинько А. М. Математические олимпиады школьников. 10 класс. М.: Просвещение, 1998.

27. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренко Ю. В., Резниченко С. В., Слинько А. М. Математические олимпиады школьников. 11 класс. М.: Просвещение, 1999.

28. LXIII Московская математическая олимпиада. М.: МЦНМО, 2000.

29. LXIV Московская математическая олимпиада. М.: МЦНМО, 2001.

30. Кордемский Б. А., Ахадов А. А. Удивительный мир чисел. М.: Просвещение, 1986.

31. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки. М.: Наука, 1978.

32. Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В., Потапов М. К. Старинные занимательные задачи. М.: Наука, 1988.

33. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. СПб.: Манускрипт, 1994.

34. Произволов В. В. Задачи на вырост. М.: Бюро Квантум, 2003. Приложение к журналу Квант № 5/2003.

35. Аменицкий Н. Н., Сахаров И. П. Забавная арифметика. М.: Наука, 1991.

36. Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад. М.: Просвещение, 1971.

37. Сборник задач московских математических олимпиад. Пособие для внеклассной работы по математике / Сост.: А. А. Леман / Под ред. В. Г. Болтянского. М.: Просвещение, 1965.

38. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады. Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Просвещение, 1986.

39. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Работ Ж. М., Тоом А. Л. Заочные математические олимпиады. М.: Наука, 1981.

40. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. Киров: АСА, 1994.

41. Каннель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2004.

42. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Толпыго А. К. Математические задачи. Библиотечка физико-математической школы. М.: Наука, 1971.

43. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л. Математические соревнования. Арифметика и алгебра. Библиотечка физико-математической школы. М.: Наука, 1970.

44. Васильев Н. Б., Молчанов С. А. и др. Математические соревнования. Геометрия. Библиотечка физико-математической школы. М.: Наука, 1974.

45. Московские математические регаты / Сост.: А. А. Блинков. М.: МЦНМО, 2001.

46. Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб.: Политехника, 1994.

47. Рукшин С. Е. Математические соревнования в Ленинграде-Санкт-Петербурге. Первые пятьдесят лет. Ростов н/Д.: МарТ, 2000.

48. Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П. Петербургские математические олимпиады. СПб. – М. – Краснодар: Лань, 2003.

49. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2003 года / Сост.: К. П. Кохась, С. В. Иванов, А. И. Храбров и др. СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург, 2003.

50. Медников Л. Э., Мерзляков А. С. Математические олимпиады. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

51. Петров Н. Н. Математические игры // Математика в школе. 1997, №6. М.: Школа-Пресс, 1997.

52. Муштари Д. Х. Подготовка к математическим олимпиадам. Казань: Казанское математическое общество, 2000.

Оглавление

Предисловие 3

Занятие 1. Вводное 5

Занятие 2. Уравнение и график прямой. Модуль. График модуля функции 6

Занятие 3. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора 8

Занятие 4. Логические задачи 9

Занятие 5. Начальные построения с помощью циркуля и линейки 11

Занятие 6. Рациональные дроби 12

Занятие 7. График квадратичной функции 14

Занятие 8. Площади многоугольников 16

Занятие 9. Квадратные уравнения 18

Занятие 10. Четность 19

Занятие 11. Текстовые задачи. Задачи на движение и работу. Задачи на проценты 21

Занятие 12. Теорема Фалеса. Подобие треугольников 22

Занятие13. Теорема Виета 24

Задание14. Числовые неравенства 25

Занятие 15. Математические игры 27

Занятие 16. Замечательные отрезки и точки в треугольнике 29

Занятие 17. Множество точек на координатной плоскости 31

Занятие 18. Степень с целым показателем 33

Занятие 19. Признаки делимости. Остатки от деления 35

Занятие 20. Метрические соотношения между элементами прямоугольного треугольника 37

Занятие 21. Степень с рациональным показателем 38

Занятие 22. Системы счисления 41

Занятие 23. Делимости. Задания на остатки и на целочисленные значения 43

Занятие 24. Окружности 1 45

Занятие 25. Принцип Дирихле 47

Занятие 26. Тригонометрия 48

Занятие 27. Окружности 2 49

Занятие 28. Комбинаторика 51

Занятие 29. Задачи на построения с помощью циркуля и линейки 52

Занятие 30. Отношение площадей треугольников 53

Занятие 31. Векторы как направленные отрезки 55

Занятие 32. Декартовы координаты на плоскости. Координаты векторов 57

Приложение. Олимпиадные задачи для самостоятельной работы 59

Ответы и/или краткие указания к решениям 63

Список литературы 72

Учебное издание

Составители:
Быковских Алла Михайловна,
Куклина Галина Яковлевна

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ КУРСЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
В СУНЦ НГУ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 8 КЛАССОВ

Верстка Т. В. Ивановой

Подписано в печать 15.02.2010 Формат 60x84/16
Заказ № Усл. печ. л. 5,3
Уч.–изд. л. 4,4
Тираж 200 экз.

Редакционно-издательский центр НГУ
630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2