ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НГУ

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 9–11 КЛАССОВ

Учебное пособие

Второе издание, исправленное

Новосибирск
2010

УДК 330.1
ББК 65.012

О 54

Олимпиадные задачи по математике начального уровня для учащихся 9–11 классов. Учеб. пособие / Сост. Г. Я. Куклина. 2-е изд., исп. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. 108 с.

Пособие предназначено для учащихся 9–11 классов общеобразовательных школ, желающих расширить и углубить свои знания и умения в математике как школьной, так и олимпиадной. Пособие может быть полезно как дополнительный материал при самостоятельной подготовке в ВУЗ или к участию в математической олимпиаде.

Под редакцией А. А. Никитина, А. С. Марковичева

Рецензент
к.ф.-м.н., доцент М. Г. Пащенко

Предисловие

В Новосибирском государственном университете и Специализированном учебно-научном центре НГУ накоплен значительный опыт довузовской работы со школьниками. В течение многих десятилетий преподаватели НГУ участвуют в проведении олимпиад разного уровня; успешно работают подготовительные курсы для будущих абитуриентов и заочная школа; ежегодно проводится Летняя физико-математическая школа, через которую осуществляется набор учащихся в СУНЦ НГУ.

Помимо всего перечисленного работа преподавателей СУНЦ НГУ с математически одаренными или просто способными в математике школьниками складывается из нескольких составляющих:

- проведение занятий с учащимися девятых классов на подготовительных курсах по математике в СУНЦ НГУ;
- руководство и проведение факультативных и кружковых занятий по математике в ряде школ Новосибирска;
- проведение специальных курсов для учащихся 10–11 классов по решению олимпиадных задач по математике в СУНЦ НГУ.

Данное пособие возникло в ответ на запросы учащихся, их родителей и преподавателей дополнительных занятий по математике с целью восполнить имевшийся недостаток олимпиадной литературы в библиотеках школ и дать некоторый пример возможного варианта ведения курса по решению олимпиадных задач начального уровня.

Задачи данного пособия не являются оригинальными, часть из них подобрана из специальной литературы, список которой прилагается. Часть используемых заданий взята из учебных пособий Заочной физико-математической школы при СУНЦ НГУ прошлых лет, авторы и разработчики которых заслуживают искреннюю благодарность.

Данная подборка была составлена для спецкурса «Решение олимпиадных задач по математике», который проводился в течение более трех лет в Специализированном учебно-научном центре Новосибирского государственного университета. Надо заметить, что одновременно с данным спецкурсом в физико-математической школе проводился также спецкурс по подготовке к участию в математических олимпиадах высокого уровня, где работа велась скорее индивидуально, чем с группой, и задачи решались, соответственно, более высокого уровня.

Вторая часть подборки задач предлагаемого пособия является дополнением к спецкурсу, она была использована и может быть использована далее как дополнение к регулярным занятиям в ФМШ и подготовительным курсам в СУНЦ НГУ.

Весь курс рассчитан на один учебный год и состоит из 28 практических занятий и четырех зачетов.

Обычно задачи предлагались в начале занятия всем списком, каждый из учеников выбирал, что ему нравилось. Решение объяснялось вначале преподавателю, а в последней трети-четверти занятия все решения, как правило, разбирались у доски. Для устного зачета предлагались задачи не сложные, за два урока приходилось принимать зачеты у 30–40 учащихся. Для самостоятельной работы дома учащиеся получали по желанию индивидуальные домашние задания повышенной сложности.

В данном пособии приведены не только условия, но и краткие решения всех задач.

Пособие в первую очередь рассчитано на тех учащихся, для которых важно научиться искать самостоятельные пути решения задач.

По разным причинам не у всех учащихся была возможность вовремя познакомиться с дополнительными разделами математики, олимпиадными идеями и методами. То, что в сборнике приведены решения задач, поможет учащемуся приобрести новые идеи и знания, расширить свой математический инструментарий.

Тем, кто еще находится в начале пути в своем стремлении стать более успешным в решении нестандартных задач по математике, рекомендуется читать и разбираться в решениях предлагаемых задач самостоятельно или с помощью преподавателя. После этого пробовать решать новые задачи самостоятельно.

Все же наиболее «продвинутым» в математике ученикам рекомендуется решать задачи самостоятельно и только после этого сверять свое решение с предлагаемым кратким конспектом решения.

Задачи курса по уровню несколько различаются между собой. Есть совсем простые задачи, которые могут быть использованы школьниками девятых классов, например, при подготовке к поступлению и обучению в СУНЦ НГУ. Есть задачи посложней, которые могут быть полезны как дополнительный материал на занятиях в ФМШ или при самостоятельной подготовке в ВУЗ или к участию в математической олимпиаде.

Поскольку предлагаемая подборка составлялась для использования на занятиях спецкурса, по возможности задачи предлагаются достаточно изящные и нетрудоемкие в решении, увлекательные в своей постановке. Знакомство с ними не только расширяет запас олимпиадных идей и методов, но и углубляет понимание основных разделов алгебры, математического анализа и геометрии школьного курса. Многие из задач могут быть рассмотрены как исследовательские задачи начального уровня. Подобные задачи не только прививают интерес и увлеченность через привлекательность постановки и красоту решения, но и помогают развивать «вкус» к исследованию, способность к глубокому погружению в задачу, независимость рассуждений. Одним ребятам такие задачи дают возможность заняться любимым делом, другим – помогают подняться на более высокий уровень понимания исследовательского процесса.

В любом случае каждого из учащихся ждет собственный процесс саморазвития.

Хочется верить, что данное пособие послужит одной из ступенек в этом увлекательном путешествии.

Желаем успехов!

Занятие 1. **Вводное**

1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}[x]\cdot y=1000,\\ x\cdot[y]=1996.\end{cases}$$

2. Пусть a, b, c – целые числа, $a^2+b^2+c^2=1$. Докажите неравенство: $b(a+c)\le\sqrt{2}/2$.

3. Сумма четырех натуральных чисел равна 1995. Какое наименьшее значение может принимать их НОК[1]?

4. Малыш и Карлсон разделили круглый торт двумя перпендикулярными разрезами на 4 части. Карлсон взял себе одну наименьшую и одну наибольшую части, а остальные две отдал Малышу. Докажите, что Карлсону досталось не менее половины торта.

5. Трапеция $ABCD$ $(AB\parallel CD)$ такова, что окружность, описанная около треугольника ABD, касается прямой BC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BCD, касается прямой AD.

6. Учащиеся школы построены прямоугольным каре. После этого в каждой колонне выбран самый высокий, и из них выбран самый низкий – им оказался Петя Иванов. Затем в каждой шеренге выбрали самого низкого, и из них выбрали самого высокого – им оказался Ваня Петров. Кто выше, Петя или Ваня?

7. Докажите, что любую сумму, большую 8 копеек, можно выплатить с помощью монет достоинством 3 и 5 копеек.

8. Докажите, что число $a=0{,}123...91011...$ (подряд выписываемые натуральные числа) – иррационально.

9. В некотором числе переставили цифры, и оно уменьшилось в три раза. Докажите, что это число делится на 27.

10. На координатную плоскость поставлена клякса площадью больше 1. Докажите, что найдутся две точки кляксы с одинаковыми дробными долями координат.

[1] НОК – наименьшее общее кратное.

Занятие 2.
Популярные задачи по планиметрии

1. Длины сторон треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию и известно, что $AB \le BC \le AC$. Докажите, что тогда центр окружности, вписанной в этот треугольник, и точка пересечения его медиан лежат на прямой, параллельной BC.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD поделены точками K, L и M, N на три равные части. Докажите, что $S_{KLMN} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$.

3. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, стороны которого a, b, c заключены в следующих пределах: $0 \le a \le 1 \le b \le 2 \le c \le 3$?

4. Даны отрезок и параллельная ему прямая. Пользуясь только односторонней линейкой, разделите отрезок пополам.

5. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $\angle CAD = 60°$. Точка O – точка пересечения диагоналей, точка F делит пополам BO, точка K – середина AO, точка M – середина CD. Докажите, что треугольник FKM равносторонний.

6. Теорема Птолемея. Докажите, что во всяком вписанном четырехугольнике произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин противоположных сторон.

7. Через точку S, лежащую вне окружности с центром O, проведены две касательные, касающиеся окружности в точках A и B, и секущая, пересекающая окружность в точках M и N. Прямые AB и SO пересекаются в точке K. Докажите, что точки M, N, K, O лежат на одной окружности.

8. В окружность радиуса R вписан равносторонний треугольник ABC, M – произвольная точка окружности. Найдите сумму квадратов длин отрезков хорд MA, MB и MC, т. е. величину $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

9. Три окружности с радиусами 1, 2, 3 попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через три точки попарного касания данных окружностей.

Занятие 3.
Делимости и целые числа. Задачи

1. Из цифр 2, 3, …, 9 составили два натуральных числа (каждая цифра использовалась ровно один раз). Могло ли одно из этих чисел оказаться вдвое больше другого?

2. Найдите все натуральные числа а, для которых число $a^3 + 1$ – степень тройки.

3. Найдите все пары простых чисел вида $\left(a^n - 1, a^n + 1\right)$, $n \in N$, $a \in N$.

4. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде: $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$, $a, b \in N$.

5. Найдите все простые числа p, q такие, что $p + q = (p - q)^3$.

6. Натуральное число n назовем хорошим, если каждое из чисел $n, n+1, n+2, n+3$ делится на сумму своих цифр. Например, 60398 – хорошее число. Обязательно ли предпоследней цифрой хорошего числа, оканчивающегося восьмеркой, будет девятка?

7. Существует ли такое натуральное число, что произведение всех его натуральных делителей (включая 1 и само число) оканчивается ровно на 2009 ноль?

8. На доске написаны пять чисел, одно из которых 2009. Разрешается стереть любое число и вместо него записать число $a + b - c$, где a, b, c – какие-то три из остальных четырех чисел. Можно ли с помощью таких операций получить пять чисел, каждое из которых равно 2009?

9. Даны целые числа a, b, c, $c \ne b$. Известно, что квадратные трехчлены $A = \left(ax^2 + bx + c\right)$ и $B = \left(c - b\right)x^2 + (c - a)x + (a + b)$ имеют общий корень, не обязательно целый. Докажите, что $\left(a + b + 2c\right) \vdots 3$.

10. Из десятичного разложения дроби $\frac{1}{p}$, $p > 5$ – простое число, вычеркнули 2000-ю цифру. В результате получилось десятичное разложение несократимой дроби $\frac{a}{b}$. Докажите, что $b \vdots p$.

11. Числа от 1 до 999999 разбиты на две группы: в первую группу отнесено каждое число, для которого ближайшим к нему квадратом будет квадрат нечетного числа, во вторую – числа, для которых ближайшим являются квадраты четных чисел. В какой группе сумма чисел больше?

12. Существуют ли два квадратных трехчлена ax^2+bx+c и $(a+1)x^2+(b+1)x+(c+1)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня?

Занятие 4.
Параллельность, перпендикулярность, площади

1. Из середины M основания AC равнобедренного треугольника ABC опущен перпендикуляр MH на сторону BC. Точка P – середина отрезка MH. Докажите, что прямая AH перпендикулярна прямой BP.
2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG. Докажите, что $EF=DG$.
3. В параллелограмме $ABCD$, $AB\neq BC$, дано отношение диагоналей $AC:BD=k$. Пусть луч AM симметричен лучу AD относительно прямой AC, луч BM симметричен лучу BC относительно прямой BD, M – общая точка лучей AM и BM. Найдите отношение $AM:BM$.
4. Из вершин произвольного выпуклого четырехугольника опущены перпендикуляры на его диагонали. Докажите, что четырехугольник, вершинами которого являются основания этих перпендикуляров, подобен исходному.

Занятие 5.
Конструкции

В задачах этого раздела требуется построить некоторую конструкцию или осуществить некоторый процесс. В некоторых случаях требуется определить, можно ли это сделать. Для обоснования положительного ответа достаточно предъявить требуемую конструкцию. Если конструкция сложная, следует доказать, что она удовлетворяет требуемым условиям. Более сложна ситуация, когда приходится доказывать невозможность требуемой конструкции. Для

этого следует предположить, что она существует, и прийти к противоречию. Иногда требуется построить наилучшую конструкцию, то есть не только ее предъявить, но и доказать, что улучшить ее нельзя.

1. Запишите в клетки квадрата 3×3 различные натуральные числа так, чтобы 6 произведений (по строкам и по столбцам) равнялись между собой.
2. 36 тонн груза упакованы в мешки весом не более 1 т. Докажите, что четырехтонный автомобиль за 11 поездок может перевезти этот груз.
3. Квадрат 2009×2009 разделен на квадратики 4×4, 3×3, 2×2, 1×1. Может ли оказаться, что суммарное число квадратиков 4×4, 2×2, 1×1 равно 2009?
4. Клетки шахматной доски пронумерованы числами от 1 до 64 так, как показано в таблице («змейкой» вверх начиная с левого угла нижней строки). На доску поставили 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Какое наименьшее значение может принимать сумма номеров клеток, на которых стоят ладьи?
5. В таблице 10×10 написаны натуральные числа, не превосходящие 10. При этом числа в любых двух соседних по стороне угла клетках взаимно просты. Докажите, что какое-то число встречается в таблице не менее 17 раз.
6. Компьютер «Intel Пентиум-5» умеет выполнять с числом только одну операцию: он прибавляет к нему 1, а затем в полученном числе переставляет все нули в конец, а остальные цифры – как угодно (например, из числа 1004 он может получить 1500 или 5100). В компьютер ввели число 12345, и после выполнения 400 операций на экране оказалось число 100 000. Сколько раз за это время на экране компьютера появлялось число, оканчивающееся на 0?
7. В стране Анчурии, где правит президент Мирафлорес, приблизилось время новых президентских выборов. В стране 20 млн. избирателей, из которых только 1 % поддерживает Мирафлореса (регулярная армия). Мирафлорес хочет быть избранным, но избранным «демократически». «Демократическим» голосованием он называет вот что: все избиратели разбиваются на несколько равных групп, каждая из них также разбивается на несколько равных групп и так далее. В самых мелких группах выбирают представителя группы – выборщика – для голосования в большей группе, выборщики в этой большей группе выбирают выборщика для голосования

в еще большей группе и так далее. Наконец, представители самых больших групп выбирают президента. Мирафлорес делит избирателей на группы по своей воле. В каждой группе решает большинство, а при равенстве голосов побеждает оппозиция. Сможет ли Мирафлорес победить на выборах?

8. Докажите, что уравнение $x^3+y^3+z^3=2$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

9. Можно ли расставить числа 1, 2, …, 25, 26 в вершинах и серединах сторон правильного 13-угольника таким образом, чтобы сумма трех чисел, стоящих на каждой стороне, была одной и той же?

Занятие 6.
Вписанные четырехугольники

1. Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность с центром на гипотенузе AB проходит через точку A и пересекает катет BC в точках M и N. Пусть K – точка, симметричная M относительно прямой AB. Доказать, что $KN=MC+CN$.

2. Докажите, что любой треугольник можно разрезать не более чем на 3 части, из которых складывается равнобедренный треугольник.

3. Дан треугольник ABC. На прямой AC отмечена точка B' так, что $AB=AB'$, при этом B' и C находятся по одну сторону от A. Через точки C, B' и основание биссектрисы угла A треугольника ABC проводится окружность w, вторично пересекающая окружность, описанную вокруг треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что касательная, проведенная к окружности w в точке Q, параллельна AC.

4. Одна из двух окружностей радиуса R проходит через вершины A и B, а другая – через вершины B и C параллелограмма $ABCD$. Доказать, что если точка M – вторая точка пересечения этих окружностей, то радиус окружности, описанной около треугольника AMD, равен R.

Занятие 7.
Инварианты – 1

Нужно найти величину или характеристику, которая не меняется в процессе некоторого действия.

Иногда это легко удается, когда процесс связан с делимостью или четностью. Труднее, когда надо догадаться, какое выражение следует взять для анализа четности, делимости и так далее, то есть надо прибегнуть к некоторой дополнительной конструкции.

1. На доске написано 11 чисел: 6 нулей и 5 единиц. Теперь 10 раз подряд выполните такую операцию: зачеркните любые два числа и, если они были одинаковы, допишите к оставшимся числам один ноль, а если разные – единицу. Какое число получится в конце?

2. На шести елках сидят шесть чижей, на каждой елке по чижу. Елки растут в ряд с интервалом в 10 м. Если какой-то чиж перелетает с одной елки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной елке? А если чижей и елок 7?

3. На доске написаны числа 1, 2, 3, … , 2009. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них разность этих чисел. Можно ли добиться того, чтобы все числа на доске стали нулями?

4. Круг разделен на 6 секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

5. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 19, 20. Разрешается стереть любые два числа a и b, и написать вместо них число $a+b-1$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

6. На доске написаны числа 1, 2, 3, … , 20. Разрешается стереть любые два числа a и b, и написать вместо них число $(ab+a+b)$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

7. Шоколадку, состоящую из квадратных долек размером 6×4 разрешается ломать только по бороздкам. Какое минимальное количество разломов нужно, чтобы разломать ее на единичные дольки?

8. В таблице 8×8 одна из клеток закрашена черным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце соответственно.

Занятие 8.
Инварианты – 2

1. Решить задачу 8 занятия 7 для таблицы 3×3. Исходно лишь

одна клетка покрашена в черный цвет.

2. У Вани есть 1 руб. Существует два обменных пункта, в одном из них меняют 1 руб. на 10 долл., в другом – 1 долл. меняют на 10 руб. Может ли получиться в процессе обменов, что количество долларов и рублей станет одинаковым?

3. Фишка ходит по квадратной доске, каждым своим ходом сдвигаясь либо на клетку вверх, либо на клетку вправо, либо по диагонали вниз–влево. Может ли она обойти всю доску, побывав на всех полях ровно по одному разу, и закончить на поле, соседнем справа от исходного?

4. В стране Серобуромалинии живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета. Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

5. В вершинах правильного 12-угольника расставлены числа $(+1)$ и (-1) так, что во всех вершинах, кроме одной, стоят $+1$. Разрешается менять знак в любых k подряд идущих вершинах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы единственное число (-1) сдвинулось в соседнюю с исходной вершину, если $k = 3,\ 4,\ 6$?

6. Числа $1, 2, 3, ..., n$ расположены в некотором порядке. Разрешается менять местами любые два стоящих рядом числа. Докажите, что если проделать нечетное число таких операций, то наверняка получится отличное от первоначального расположение чисел $1, 2, 3, ..., n$.

7. Петя разорвал листок бумаги на 10 кусков, некоторые из этих кусков он снова разорвал на 10 кусков и так далее. Мог ли Петя получить таким образом 2009 кусочков бумаги?

8. На каждой грани куба написано число, причем не все эти числа одинаковы. Каждое из написанных чисел заменяется на среднее арифметическое чисел, написанных на четырех соседних гранях куба. Могут ли через несколько таких операций на всех гранях оказаться исходные числа?

Занятие 9.
Инварианты – 3

Будем называть полуинвариантом величину, меняющуюся монотонным образом и принимающую лишь конечное число различных значений.

1. В прямоугольной таблице $m \times n$ записаны действительные числа. Разрешается менять знак сразу у всех чисел какой-либо строки или какого-либо столбца. Докажите, что этими операциями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в столбце сумма чисел была бы неотрицательной.

2. Докажите, что любые $2n$ точек на плоскости являются концами n непересекающихся отрезков.

3. В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага.

4. При дворе короля Артура собрались $2N$ рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более $N-1$ врага. Докажите, что советник короля Артура может так рассадить рыцарей за круглый стол, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

5. В концах диаметра окружности записываются единицы. Каждая из полученных полуокружностей делится пополам, и в ее середине пишется сумма чисел, стоящих в концах дуги (первый шаг). Затем каждая из четырех получившихся дуг делится пополам, и в ее середине пишется число, равное сумме чисел, стоящих в концах дуги (второй шаг). Всего осуществляется n таких шагов. Найти сумму всех записанных чисел.

6. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и умноженная на 5 прибавляется к тому числу, которое осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 7^{2008}. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 2008^7?

Занятие 10.
Замечательные точки и отрезки треугольника

1. Доказать, что ортоцентр H, точка пересечения медиан G и центр описанной окружности O треугольника ABC лежат на одной прямой.

2. Дан треугольник ABC. Две прямые, симметричные прямой AC относительно прямых AB и BC соответственно, пересекаются в точке K. Доказать, что прямая BK проходит через центр описанной ок-

ружности O треугольника ABC.

3. «Метод обратного хода». Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и C, пересекают касательную, проведенную в точке B, в точках E и F. В треугольнике ABC проведена высота BK, точка K лежит на стороне AC. Доказать, что прямая BK является биссектрисой угла EKF.

Занятие 11.
Графы – 1

Во многих задачах удобно изображать объекты точками, а связи между ними линиями или стрелками. Такой способ представления называется графом. Точки – вершины графа, а линии – ребра.

Одинаковые, но, может быть, по-разному нарисованные графы принято называть изоморфными. Чтобы убедиться в изоморфности, надо правильно занумеровать вершины графа. Количество ребер, выходящих из данной вершины графа, называют ее степенью.

Сумма степеней всех вершин графа должна быть четной, так как эта величина получается умножением на два общего числа ребер графа.

Вершину называют четной, если из нее выходит четное число ребер, нечетной в противном случае.

Число нечетных вершин любого графа – четно, так как сумма нескольких слагаемых четна тогда и только тогда, когда количество нечетных слагаемых четно.

Граф называется четным, если у него все вершины четные, связным, если между любыми вершинами есть путь, состоящий из ребер графа, ориентированным, если на каждом ребре указано направление, плоским, если он нарисован на плоскости и его ребра не пересекаются во внутренних точках.

Циклом называется замкнутый путь, не проходящий дважды через одну и ту же вершину. «Куски» называются компонентами связности графа.

Простым путем называется путь, в котором никакое ребро не встречается дважды.

Деревом называется связный граф, не имеющий циклов.

Вершина называется висячей, если из нее выходит ровно одно ребро.

Лемма о висячей вершине. В дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро.

Доказательство. Рассмотрим любую вершину графа и пойдем по любому выходящему из нее ребру в другую вершину. Если из новой вершины больше ребер не выходит, мы остаемся в ней, а в противном случае идем по любому другому ребру дальше. Понятно, что в этом путешествии мы никогда не сможем попасть в вершину, в которой уже побывали – так как был бы тогда цикл. Так как у графа конечное число вершин, то наше путешествие должно закончиться. Но закончиться оно может только в висячей вершине.

Теорема. В дереве число вершин на одну больше числа ребер.

При решении многих олимпиадных задач используют следующие утверждения, относящиеся к обходу ребер графа:

1) если в графе больше двух нечетных вершин, то его правильный обход (обход, при котором каждое ребро проходится ровно один раз) невозможен;
2) для каждого четного связного графа существует правильный обход, который можно начать с любой вершины и который обязательно кончается в той же вершине, с которой начался;
3) если в связном графе ровно 2 нечетные вершины, то существует правильный обход, причем в одной из них он начинается, а в другой кончается;
4) в любом графе число нечетных вершин четно.

1. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с 5 другими?

2. В классе 30 человек. Может ли быть так, чтобы 9 из них имели по 3 друга в этом классе, 11 – по 4 друга и 10 – по 5?

3. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

4. В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого.

5. В тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний.

6. В стране Древляндии 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один

путь. Сколько в этой стране дорог?

7. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

8. Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 так, чтобы число, составленное из двух соседних цифр, делилось либо на 7, либо на 13.

Занятие 12.
Графы – 2

1. Докажите, что в компании из 17 человек, в которой каждый знаком ровно с 4 другими, найдутся двое, не знакомых друг с другом и не имеющих общих знакомых.

2. Турист, приехавший в Москву на поезде, весь день бродил по городу пешком. Поужинав на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал и при этом идти только по тем улицам, по которым он шел до этого нечетное число раз. Докажите, что он всегда сможет это сделать.

3. В Марсианском метро 100 станций, и можно проехать от любой станции до любой другой. Забастовочный комитет хочет закрыть одну из станций так, чтобы между всеми остальными станциями был возможен проезд. Докажите, что такая станция найдется.

4. В трех вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается передвигать их по диагонали в любую свободную вершину. Можно ли таким образом добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на свое место, а две другие поменялись местами?

5. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Рис. 1

6. Можно ли, сделав несколько ходов конями из исходного положения, изображенного на рис. 1, расположить их так, как показано на рис. 2?

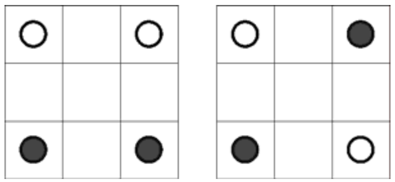


Рис. 2

Занятие 13.
Окружности

1. Внутри угла с вершиной M отмечена точка A. Из этой точки выпустили шар, который отразился от одной стороны в точке B, затем, от другой стороны в точке C, затем вернулся в точку A (угол падения равен углу отражения). Докажите, что центр O окружности, описанной около треугольника BCM, лежит на прямой AM.

2. На одной стороне угла с вершиной O взята точка A, а на другой – точки B и C так, что B лежит между O и C. Проведены окружности с центрами O' и O'' – вписанная в треугольник OAB и вневписанная относительно треугольника OAC, с касанием стороны AC внешним образом. Докажите, что если $O'A = O''A$, то треугольник ABC – равнобедренный.

3. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки $M; N$ соответственно таким образом, что $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

4. Хорды AC и BD окружности с центром в точке O пересекаются в точке K. Пусть M и N – центры окружностей, описанных около треугольников AKB и CKD соответственно. Докажите, что $OM = KN$.

Занятие 14.
Функциональные уравнения

1. Найдите вид функции $f(x)$, если $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = x^2$.

2. Требуется найти функцию $f(x)$, определенную при всех ненулевых значениях аргумента и удовлетворяющую уравнению $f(x) - 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2^x, \quad x \neq 0$.

3. Найдите функцию $f(x)$ такую, что: $f(x) + f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = x$.

4. Найдите функцию $f(n)$ такую, что: $n^{f(n)-1} = (n-1)^{f(n-1)}$, $n \geq 2$.

5. Найдите функцию $f(x)$ такую, что: $f(x\cdot y)=y^k\cdot f(x)$.

6. Найдите функцию $f(x)$ такую, что $f(x+y)-2f(x-y)+$ $+f(x)-2f(y)=y-2$.

7. Найдите функцию $f(x)$ такую, что: $f\left(x^y\right)=y\cdot f(x),\quad x>0$.

8. Найдите функцию $f(x)$ такую, что: $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

9. Пусть S множество неотрицательных целых чисел. Найдите все функции $f(x)$, определенные на этом множестве S и принимающие значения такие, что $f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)$.

10. Значение функции определено для всех действительных чисел и является действительным. Найдите вид функции, если известно, что $\forall\ x\in D$: $2f(x)+f(1-x)=x^2$.

Занятие 15.
Свойства функций: монотонность и периодичность

1. Найдите все вещественные корни уравнения $\sqrt[5]{x+30+\sqrt[5]{x}}=2$.

2. Докажите, что $\cos(\sin x)>\sin(\cos x),\ \ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

3. Область определения функции $f(x)$ – вся числовая прямая, и известно, что ни для какого x ее значение не равно единице и для некоторого фиксированного числа k, не равного нулю, и всех x выполняется соотношение: $f(x+k)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Докажите, что $f(x)$ является периодической функцией.

4. Найдите наименьший положительный период функции $y=\operatorname{tg}(\sin x)$. Ответ обосновать.

Занятие 16.
Комбинаторика и не совсем...

1. В клетки прямоугольной таблицы вписаны натуральные числа. Разрешается удваивать все числа любой строки, а также вычитать по единичке из всех чисел любого столбца. Доказать, что с помощью таких операций можно получить таблицу из одних нулей.

2. В стране провели опрос-анкетирование, где требовалось указать любимого писателя, художника и композитора. Оказалось, что

каждый упомянутый деятель искусств является любимым ровно у n человек. Доказать, что участников анкеты можно разбить на $(3n-2)$ группы так, что в каждой группе любые два человека имеют совершенно различные вкусы.

3. На плоскости проведены n, $n\geq 2$, прямых, делящих плоскость на несколько областей. Некоторые из них окрашены, причем никакие две окрашенные области не могут соприкасаться на границе. Доказать, что число окрашенных областей не превосходит $\dfrac{n^2+n}{3}$.

4. Квадрат со стороной $(n-1)$ и прямоугольник со сторонами $(a-1)$ и $(b-1)$ разбиты на единичные квадраты, n, a, b – натуральные числа, большие единицы, $ab=n^2$. Каждому из узлов квадрата сопоставлен узел прямоугольника, причем разным узлам – разные, при этом четырем вершинам и центру каждого квадрата площади 2 сопоставлены соответственно вершины и центр прямоугольника, может быть вырожденного. Доказать, что $a=b$.

5. Множество M состоит из целых чисел, его наименьший элемент равен 1, а наибольший элемент равен 100. Каждое число из множества M, кроме 1, равно сумме двух, возможно одинаковых, чисел множества M. Указать среди всех множеств M, удовлетворяющих этим условиям, множество с минимальным числом элементов.

Занятие 17.
Задачи на наибольшие и наименьшие значения в геометрии – 1

1. На плоскости фиксируется точка P. Рассматриваются всевозможные равносторонние треугольники ABC, для которых $AP=3$, $BP=2$. Какую наибольшую длину может иметь CP?

2. На какое наименьшее количество тетраэдров можно разбить куб?

3. Найти наибольшее значение, которое может принимать длина отрезка, отсекаемого боковыми сторонами треугольника на касательной к вписанной окружности, проведенной параллельно основанию, если периметр треугольника равен $2p$.

4. Длины двух параллельных сторон прямоугольника равны 1. Кроме того, известно, что двумя перпендикулярными прямыми он может быть разбит на четыре прямоугольника, три из которых име-

ют площадь, не меньшую 1, а четвертый – не меньшую 2. При какой минимальной длине двух других сторон прямоугольника это возможно?

Занятие 18.
Задачи на наибольшие и наименьшие значения в геометрии – 2

1. Расстояние между параллельными прямыми равно h. Третья прямая, параллельная заданным прямым, находится вне полосы между ними на расстоянии H от дальней прямой. Отрезок AB перпендикулярен прямым, а концы его лежат на первых двух прямых. Найти на третьей прямой точку M так, чтобы угол AMB был наибольшим.

2. В сектор круга с центральным углом AOB равным α вписывается прямоугольник так, что две его вершины лежат на радиусе OA, одна вершина – на дуге AB, одна вершина – на радиусе OB. Доказать, что прямоугольник имеет наибольшую площадь, когда угол между радиусом OA и радиусом, проведенным в вершину прямоугольника, лежащую на дуге AB, равен $\alpha/2$.

3. Дана окружность радиуса R с центром O. От точки O отложен отрезок OB, длина которого меньше длины радиуса окружности. Найти на окружности точку M, для которой угол OMB принимал бы наибольшее возможное значение. Определить это значение.

4. Среди всех прямоугольных треугольников, у которых высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, равна заданной величине h, указать треугольник, имеющий наименьший радиус вписанного круга.

Занятие 19.
Многочлены – 1

Многочлены являются объектами как алгебраическими (дискретные свойства, корни, группировки), так и непрерывными, функциональными (графические представления, четность, монотонность и другие свойства).

1. Каждый из квадратных трехчленов $P_1(x) = x^2 + px + q$ и $P_2(x) = x^2 + qx + p$ имеет корни. Докажите, что тогда какой-то из трехчленов $Q_1(x) = x^2 + (p-2)x + 1$ или $Q_2(x) = x^2 + (q-2)x + 1$ имеет корень.

2. Существуют ли многочлены $P = P(x;y;z)$, $Q = Q(x;y;z)$, $R = R(x;y;z)$ такие, что для всех действительных значений x, y, z выполнено тождество:
$(x-y+1)^3 \cdot P + (y-z+1)^3 \cdot Q + (z-2x+1)^3 \cdot R = 1$?

3. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что уравнение $f(x) = x$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет действительных корней.

4. Найдите такие вещественные числа a,b и p,q, чтобы равенство $(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20} = (x^2 + px + q)^{10}$ выполнялось при любом x.

5. Последовательность $a_1, a_2, \dots a_{2000}$ действительных чисел такова, что $\forall n \in N$ таких, что:
$1 \le n < 2009 \;\Rightarrow\; a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$.
Докажите, что все члены этой последовательности – целые числа.

6. Решите уравнение $\{(x+1)^3\} = x^3$, где $\{z\}$ – дробная часть числа, то есть $\{z\} = z - [z]$.

7. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b \cdot \cos x$. Найдите все значения параметров a, b, при которых уравнения $f(x) = 0$ и $f(f(x)) = 0$ имеют совпадающие непустые множества решений.

Занятие 20.
Многочлены – 2

1. Решите уравнение:
$(x+1)^{63} + (x+1)^{62}(x-1) + (x+1)^{61}(x-1)^2 + \dots + (x-1)^{63} = 0$.

2. Пусть $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Решите уравнение:
$f(f(f(f(f(x))))) = 0$.

3. Вычислите $f(\sqrt[3]{2} - 1)$, если $f(x) = x^{1999} + 3x^{1998} + 4x^{1997} + 2x^{1996} + 4x^{1995} + 2x^{1994} + \dots + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.

4. Найдите два корня уравнения $5x^6 - 16x^4 - 33x^3 - 40x^2 + 8 = 0$, произведение которых равно 1.

5. Известно, что $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Нетрудно доказать, что

$\sin(nx)$ для нечетных n можно представить в виде многочлена степени n от $\sin x$. Пусть $\sin 2007x = P(\sin x)$, где $P(t)$ – многочлен 2007-ой степени от t. Решите уравнение: $P\left(\cos\dfrac{x}{2007}\right) = \dfrac{1}{2}$.

6. Решите уравнение: $x^5 + (x+1)^5 + (x+2)^5 + \ldots + (x+2010)^5 = 0$.

Занятие 21.
Неравенства – 1

Считаются известными неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом и Коши – Буняковского, а также легко выводимые следствия из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом вида:

(1) $a + \dfrac{1}{a} \le -2$ для $a < 0$ и $a + \dfrac{1}{a} \ge 2$ для $a > 0$;

(2) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac$.

1. Докажите неравенство $\dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{a+b+c} \ge abc, \ \forall\ a,b,c > 0$.
2. Докажите, что $\forall\ a,b,c > 0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\left(ab+bc+ac+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\right)}{abc} \ge 3\left(\sqrt{3}+1\right).$$
3. Докажите, что $\forall\ n \in N \Rightarrow (2n+1)^n \ge (2n)^n + (2n-1)^n$.
4. Докажите, что
$\forall a,b,c > 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)$.
5. Докажите, что
$$\forall a,b,c > 0 \Rightarrow \frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \ge \frac{3}{4}.$$
6. Дан многочлен $P(t) = t^2 - 4t$. Докажите, что
$$\forall x \ge 1 \text{ и } y \ge 1 \Rightarrow P\left(x^2+y^2\right) \ge P(2xy).$$
7. Докажите неравенство:
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+xy}}, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1.$$

8. Существует ли функция $f(x)\ \forall\ x \in R$ такая, что выполняется неравенство: $\left|f(x+y) + \sin x + \sin y\right| < 2$?

Занятие 22.
Неравенства – 2

1. Дано: $x + y + z = 1$. Докажите неравенство: $x^2 + y^2 + z^2 \ge \dfrac{1}{3}$.
2. Докажите: $S = \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}, \quad a,b,c > 0$.
3. Докажите неравенство Коши – Буняковского:
$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$
4. Докажите неравенство: $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}, \ a,b > 0$.
5. Даны a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите:
$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \ge 3.$$
6. Докажите неравенство:
$\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-a)(1-c)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} \le 1 + \sqrt{abc}$, если $0 \le a,b,c \le 1$.
7. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1;1]$ таковы, что сумма их кубов равна нулю. Докажите, что сумма этих чисел $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le \dfrac{n}{3}$.
8. Докажите, что для положительных чисел a, b, c верно неравенство: $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} + \dfrac{ab}{c} \ge a + b + c$.

Занятие 23.
Математическая индукция в олимпиадных задачах

1. В квадрате 2011×2011 клеток вырезана одна произвольная клетка. Докажите, что оставшуюся часть всегда можно разрезать на трех клеточные уголки вида буквы Г.
2. Найдите все натуральные числа k, $k > 1$, удовлетворяющие

условию: для некоторых натуральных m и $n, m \neq n$ числа $k^m + 1$ и $k^n + 1$ получаются друг из друга перестановкой в обратном порядке цифр десятичной записи этих чисел.

3. Докажите, что любое натуральное число, не превосходящее $n!$, можно представить как сумму не более чем n натуральных чисел, являющихся различными делителями числа $n!$.

4. Дан квадрат 64 на 64. Из него вырезана одна клетка. Докажите, что оставшуюся часть можно разрезать на уголки из трех клеток.

5. Докажите, что $2^{m+n-2} \geq mn$ при любых натуральных m,n.

Занятие 24.
Преобразование подобия

Определение. Пусть O – произвольная точка, k – любое число, отличное от нуля. Центральным подобием (гомотетией) с центром O и коэффициентом k называется отображение плоскости на себя, при котором любая точка M переходит в такую точку M', что $\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}$. Точка O – неподвижная точка плоскости при центральном подобии. При $k = 1$ все точки плоскости неподвижны, при $k = -1$ – центральная симметрия.

Свойства гомотетии

Если при гомотетии с коэффициентом k точки A и B переходят в точки A' и B', то

1) $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$;

2) отрезок переходит в отрезок, луч – в луч, прямая – в прямую;

3) если прямая AB проходит через центр подобия, то она переходит в себя; если же прямая AB не проходит через центр подобия, то она переходит в прямую, параллельную AB;

4) гомотетия сохраняет углы;

5) при гомотетии с коэффициентом k окружность с центром C радиуса r переходит в окружность с центром C' радиуса $|k| \cdot r$, где C' – точка, в которую переходит C.

Следствие. Пусть даны две касающиеся окружности и точка касания – центр гомотетии с коэффициентом $k = \frac{r_2}{r_1}$. Тогда касательная к меньшей окружности переходит в касательную к большей, параллельную ей с точкой касания в середине дуги.

1. Теорема Наполеона (рис. 3 – треуголка Наполеона). На сторонах треугольника извне построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника, центр которого находится в точке пересечения медиан исходного треугольника.

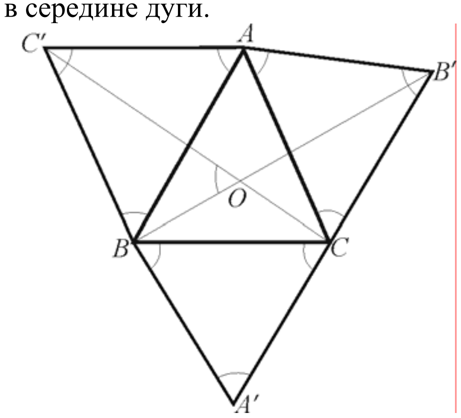


Рис. 3

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность w. Продолжения противоположных сторон этого четырех угольника пересекаются в точках K и N. Докажите, что окружность, описанная около треугольника AKN – w'', касается окружности w тогда и только тогда, когда окружность, описанная около треугольника CKN – w' касается окружности w.

3. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K. Окружность S' проходит через точку K и касается прямых AB и AD, S' вторично пересекает диагональ AC на отрезке AK. Окружность S'' проходит через точку K и касается прямых CB и CD, S'' вторично пересекает AC на отрезке KC. Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей S' и S'' будут параллельны между собой.

4. Даны две окружности, касающиеся друг друга внутренним образом в точке N. Хорды BA и BC внешней окружности касаются внутренней окружности в точках K и M соответственно. Пусть Q и P – середины дуг AB и BC, не содержащих точку N. Окружности, описанные около треугольников BQK и BPM, пересекаются второй раз в точке B'. Докажите, что $BPB'Q$ – параллелограмм.

5. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC, и прямая l касается окружностей, описанных около треугольников ADB и ADC в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков BD, DC, MN касается прямой l.

Занятие 25.
Задачи международных олимпиад 1976–1996 гг., алгебра – 1

1. Пусть p, q – натуральные числа такие, что $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. Докажите, что число p делится на 1979.

2. Указать какую-либо пару натуральных чисел (a, b) такую, что а) число $ab(a+b)$ не делится на 7; б) $(a+b)^7 - a^7 - b^7 \vdots 7^7$. Ответ обосновать.

3. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что $abc = 1$. Докажите, что $S = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}$.

4. Найдите все целые числа a, b, c такие, что $1 < a < b < c$ и число $(a-1)(b-1)(c-1)$ является делителем числа $abc - 1$.

5. Дано уравнение $P(x; y) = x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$. Докажите, что если натуральное число n таково, что данное уравнение имеет целочисленное решение, то оно имеет по меньшей мере три целочисленных решения.

Занятие 26.
Задачи международных олимпиад 1976–1996 гг., алгебра – 2

1. Найдите все вещественные числа a, для которых существуют вещественные неотрицательные числа $x_1, x_2, ..., x_5$, удовлетворяющие соотношениям $\sum_{k=1}^{5} k \cdot x_k = a$, $\sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2$, $\sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3$.

2. Пусть $\{a_k\}$, $k = 1, 2, ..., n$ – последовательность различных натуральных чисел. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3. Пусть m и n – натуральные числа такие, что $n > m \ge 1$. В десятичной записи группа из трех последних цифр числа 1978^m сов-

падает с группой из трех последних цифр числа 1978^n. Найдите m и n так, чтобы их сумма была наименьшей.

4. В конечной последовательности действительных чисел сумма любых семи идущих подряд членов отрицательна, а сумма любых одиннадцати идущих подряд членов положительна. Найдите наибольшее число членов такой последовательности.

Занятие 27.
Задачи по стереометрии из Санкт-Петербургских районных и региональных олимпиад

1. В основании пирамиды *SABC* лежит треугольник *ABC* такой, что $AB = 17$, $AC = 10$, $BC = 9$. Высота пирамиды имеет длину 30, а ее основание совпадает с серединой отрезка *BC*. Какова площадь плоского сечения пирамиды, проходящего через точку *A*, параллельного прямой *BC* и делящего высоту в отношении 4 : 1, считая от вершины *S*?

2. В треугольной пирамиде *ABCD* на ребрах *AC* и *AB* выбраны соответственно точки *L* и *K* так, что $KL \| BC$. Точки *M*, *N*, *P*, *R* – середины ребер *BC*, *AD*, *BD*, *CD* соответственно. Докажите, что объемы треугольных пирамид *BKPR* и *CLMN* равны.

3. В пространстве даны 4 точки: *A*, *B*, *C*, *D*. Известно, что скрещивающиеся прямые *AB* и *CD* перпендикулярны, скрещивающиеся прямые *BC* и *AD* – тоже перпендикулярны. Найдите длину отрезка *AB*, если $BC = 5$, $CD = 11$, $DA = 10$.

4. На ребрах AD, BC, CC_1, C_1D_1, A_1B_1, AA_1 куба выбраны точки *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *U* соответственно. Оказалось, что при этом $\angle PQB = \angle RQC$, $\angle RSC_1 = \angle TSD_1$, $\angle TUA_1 = \angle PUA$, $\angle QRC = \angle SRC_1$, $\angle STB_1 = \angle UTA_1$, $\angle UPA = \angle QPD$. Найдите длину замкнутой ломаной *PQRSTUP*, если длина ребра куба равна 1.

5. Две плоскости делят куб на четыре равновеликие части. Докажите, что его поверхность они тоже делят на четыре равновеликие части.

6. *ABCDS* – четырехугольная пирамида с вершиной *S*, у которой все ребра равны 1. Через ребро *AB* проведено такое сечение *AEFB*, что объем многогранника *ABCDEF* равен половине объема пирамиды. Найдите длину отрезка *EF*.

7. Диагонали шестиугольного сечения куба пересекаются в одной точке. Докажите, что сечение проходит через центр куба.

Занятие 28.

Задачи по стереометрии из Московских районных и региональных олимпиад

1. Высота правильного тетраэдра служит диаметром сферы, поверхность которой равна S. Вычислите площадь той части сферы, которая находится внутри данного тетраэдра.

2. Дана пирамида $MABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. В каком отношении делится объем пирамиды плоскостью, проходящей через вершины A, D и середину ребра MC?

3. Найдутся ли в пространстве 5 точек, расстояние между которыми попарно различны, таких, что периметры всех пространственных пятиугольников с вершинами в этих точках равны?

4. Проекции тела на две плоскости являются кругами. Докажите, что эти круги имеют одинаковые радиусы.

Занятие 29.

Задачи устного зачета – 1

1. В трех вершинах квадрата находятся три кузнечика, они играют в чехарду. При этом, если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается на той же прямой, на которой находились A и B до прыжка, и на том же расстоянии от B, но по другую сторону. Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвертую вершину исходного квадрата?

2. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC площади S взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что $\frac{AC_1}{AB} = \frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = \frac{1}{3}$. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми AA_1, BB_1, CC_1 (рис. 4).

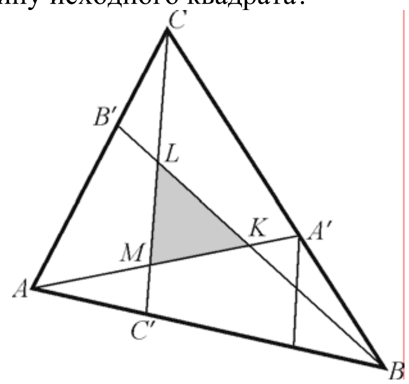


Рис. 4

3. Треугольник разрезан на несколько выпуклых многоугольников. Докажите, что среди

них либо есть треугольник, либо есть многоугольник с одинаковым числом сторон.

4. Дан выпуклый многогранник. В каждой его вершине сходится три грани. Каждая грань окрашена в один из цветов: красный, желтый, синий или зеленый, причем грани с общим ребром – разных цветов. Докажите, что число красных граней с нечетным числом сторон имеют ту же четность, что и число синих граней с нечетным числом сторон.

5. На прямой расположена колония из конечного числа бактерий. В моменты времени 1, 2, 3, … некоторые бактерии могут погибать. Погибают те, и только те бактерии, от которых слева на расстоянии 1 метр и справа на расстоянии $\sqrt{2}$ метра нет бактерий. Существует ли вечная такая колония?

6. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. Разрешается одновременно добавлять 1 или 2 к двум числам. Можно ли получить набор из степеней 10?

Занятие 30.

Задачи устного зачета – 2

1. Докажите неравенство $(a+b)^k \le 2^{k-1}(a^k + b^k)$, $a \ge 0$, $b \ge 0$, $k \in N$.

2. На клетчатой бумаге дан квадрат 100×100. Разрешается закрасить несколько клеток так, чтобы каждая закрашенная клетка была единственной закрашенной клеткой либо в своем столбце, либо в своей строке. Какое наибольшее число клеток можно закрасить?

3. В четырехугольнике $ABCD$ стороны $BC = CD$, $AB \ne AD$. Диагональ $AC = 8$ является биссектрисой угла $\angle BAD = 45^\circ$. Найдите $AB + AD$.

4. В треугольнике ABC точки X и Y – проекции вершины A на биссектрисы углов B и C. Найдите длину стороны BC, если $AC = b$, $AB = c$, $XY = l$.

5. Медианы треугольника имеют длину 9, 12, 15. Найдите площадь треугольника.

Занятие 31.

Задачи устного зачета – 3

1. В турнире, проходящем по олимпийской системе (с выбыва-

нием), участвуют 512 теннисистов. Перед началом турнира каждому участнику присвоен номер от 1 до 512 в соответствии с его рейтингом. Матч считается неинтересным, если разность присвоенных номеров двух спортсменов, участвующих в нем, больше 30. Докажите, что независимо от жеребьевки и результатов игр, будет сыгран хотя бы один неинтересный матч.

2. Докажите, что число 3 не является дискриминантом квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ ни при каких целых a, b, c.

3. Докажите неравенство: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\le a+b,\ \ a,b>0$.

4. Найдите все такие многочлены $f(x)$ степени n, что произведение $f(x)\cdot\left(x^2-1\right)$ имеет ровно два ненулевых коэффициента.

5. Найдите все функции, удовлетворяющие при любых значениях аргументов равенству: $x\cdot f(y)-y\cdot f(x)=(x-y)\cdot f(xy)$.

6. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AX и AY на биссектрисы внешних углов B и С. Докажите, что длина отрезка XY равна полупериметру треугольника ABC.

7. В круге радиуса 1 провели две перпендикулярные хорды AB и CD. Докажите, что $AC^2+BD^2=4$.

Занятие 32.
Задачи устного зачета – 4

1. Найдите НОД всех девятизначных чисел, записанных цифрами 1, 2, …, 9 без повторений.

2. Решите уравнение $\left(1+x+x^2\right)^2=\dfrac{7}{3}\left(1+x^2+x^4\right)$.

3. Решите уравнение $x^{x^3}=3$.

4. Найдите наименьшее натуральное число x, которое надо прибавить к выражению $(a+2)(a+5)(a+8)(a+11)$, чтобы полученная сумма была больше нуля при любом a.

5. Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки составляют прямой угол?

6. При каких значениях параметров a и b система уравнений $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ y=ax+b\end{cases}$ имеет единственное решение?

7. Сколько слагаемых суммы $1+2+3+\ldots$ надо взять, чтобы получить трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр?

8. Путешественник выходит на прогулку в горы из гостиницы в 3 часа дня и возвращается той же дорогой в 9 вечера того же дня. Найти расстояние, пройденное путешественником, если известно, что он спускается с любой горы со скоростью 6 км/ч, поднимается со скоростью 3 км/ч, идет по ровной дороге со скоростью 4 км/ч?

Приложение.
Резервные задачи для самостоятельной работы

Планиметрия

1. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D такая, что $DC=2AD$. Точка O – центр вписанной окружности треугольника DBC, E – точка касания этой окружности с прямой BD. Оказалось, что $BD=DC$. Докажите, что прямая AE параллельна прямой DO.

2. AH – высота остроугольного треугольника ABC, K и L – основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC. Докажите, что точки B, K, L и C лежат на одной окружности.

3. M – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. На основании BC выбрана точка P такая, что $\angle APM=\angle MPD$. Докажите, что расстояние от точки C до прямой AP равно расстоянию от точки B до прямой DP.

4. M – точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника, N – точка пересечения его средних линий, O – центр описанной окружности. Докажите, что $OM\ge ON$ (средней линией называется отрезок, соединяющий середины противоположных сторон).

5. BD – биссектриса угла B треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BDC пересекает отрезок AB в точке E, описанная окружность треугольника ABD пересекает отрезок BC в точке F. Докажите, что $AE=CF$.

6. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Внутри треугольника взята точка О такая, что $\angle AOB=\angle AOC=120°$. Точки D и E – середины сторон AB и AC. Докажите, что четырехугольник $ADOE$ – вписанный.

7. На сторонах AB и BC треугольника ABC отложены отрезки AE и CF равной длины. Окружность, проходящая через точки B, C, E, и

окружность, проходящая через точки A, B, F, пересекаются в точках B и D. Докажите, что прямая BD – биссектриса угла ABC.

8. В точках A и B, лежащих на разных сторонах угла, восстановлены перпендикуляры к сторонам, которые пересекают биссектрису угла в точках C и D. Докажите, что середина отрезка CD равноудалена от точек A и B.

9. Середины сторон выпуклого шестиугольника образуют шестиугольник, стороны которого параллельны. Докажите, что большие диагонали исходного шестиугольника пересекаются в одной точке.

10. В трапеции $ABCD$ на боковых сторонах AB и CD можно выбрать точки K и L так, что отрезок KL не параллелен основаниям и делится диагоналями на три равные части. Найдите отношение оснований трапеции.

11. Высоты AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H, а описанные окружности треугольников ABC и A_1BC_1 пересекаются в точке M, отличной от точки B. Докажите, что прямая MH делит сторону AC пополам.

12. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle D$. Срединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P, лежащей на стороне AD. Докажите, что диагонали AC и BD равны.

13. Окружность, построенная на стороне AC остроугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны треугольника AB и BC в точках K и L. Касательные к этой окружности, проведенные в точках K и L, пересекаются в точке M. Докажите, что прямая BM перпендикулярна AC.

14. Точки K и N – середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Отрезки BN и KC пересекаются в точке O. Точки пересечения прямых AO и DO со стороной BC делят отрезок BC на три равные части. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

15. Вписанную окружность спроецировали на стороны треугольника. Докажите, что шесть концов проекций принадлежат одной окружности.

16. В треугольнике ABC $\angle B = 60°$, AA_1, CC_1 – высоты. На прямой, проходящей через B перпендикулярно A_1C_1, выбрана точка $M \neq B$ такая, что $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $\angle AMB = 30°$.

17. AF –медиана треугольника ABC, D – середина отрезка AF, E – точка пересечения прямой CD со стороной AB. Оказалось, что $BD = BF = CF$. Докажите, что $AE = DE$.

18. Точки K и L на сторонах остроугольного треугольника ABC таковы, что $KL \parallel BC$. M – точка пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках K и L к отрезкам AB и AC. Докажите, что A, M и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.

19. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD равны. Кроме того, $\angle BAC = \angle ADB$, $\angle CAD + \angle ADC = \angle ABD$. Найдите $\angle BAD$.

20. Точка D – середина стороны AC треугольника ABC. На стороне BC выбрана такая точка E, что $\angle BEA = \angle CED$. Найдите отношение длин $AE : DE$.

21. Точка M – середина стороны AC треугольника ABC. На отрезке AM выбрали точку K, на отрезке BM – точку L, на отрезке BK – точку N. Оказалось, что $KL \parallel AB$, $MN \parallel BC$, $CL = 2KM$. Докажите, что CN – биссектриса угла ACL.

22. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, описанная вокруг треугольника ABO, пересекает сторону AD в точке E. Окружность, описанная вокруг треугольника DOE, пересекает отрезок BE в точке F. Докажите, что $\angle BCA = \angle FCD$.

23. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и N соответственно. M – середина стороны AC. Известно, что $\angle BKM = \angle BNM$. Докажите, что перпендикуляры к сторонам исходного треугольника в точках K, N, M пересекаются в одной точке.

24. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 60°$, точка K – точка пересечения медианы CM и высоты BN. Причем, $CK = 6$, $KM = 1$. Найдите углы треугольника.

25. AL и BM – биссектрисы треугольника ABC. Известно, что одна из точек пересечения описанных окружностей ACL и BCM лежит на отрезке AB. Докажите, что $\angle ACB = 60°$.

26. На сторонах AB и AC взяты точки D и E соответственно такие, что $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{BE}{EC} = 2$, $\angle ACB = 2\angle DEB$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

27. Диагональ AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ делится точкой пересечения диагоналей пополам. Известно, что угол ADB равен двум углам CBD. На диагонали BD нашлась такая точка K, что $CK = KD + AD$. Докажите, что угол BKC равен двум углам ABD.

28. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, кроме того отмечены середины K и L сторон AB и BC соответственно. Точка P – основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую CC_1, а точка Q – основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на прямую AA_1. Докажите, что прямые KP и LQ пересекаются на стороне AC.

29. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$, O – точка пересечения диагоналей. Точка O' симметрична O относительно AD и лежит на описанной окружности. Докажите, что $O'O$ – биссектриса угла $BO'C$.

Алгебра и свойства функций

1. Известно, что сумма нескольких данных положительных чисел равна сумме их квадратов. Что больше – сумма кубов или сумма четвертых степеней этих чисел?
2. Дано 15-значное число, записанное нулями и единицами, которое делится на 81, но не делится на 10. Докажите, что из него нельзя вычеркнуть один из нулей так, чтобы полученное число попрежнему делилось на 81.
3. Натуральные числа a, b, x и y таковы, что $ax+by$ делится на a^2+b^2. Докажите, что числа x^2+y^2 и a^2+b^2 имеют общий делитель, больший 1.
4. Вещественные числа a, b и c таковы, что числа $\dfrac{1+bc}{b-c}$, $\dfrac{1+ca}{c-a}$, $\dfrac{1+ab}{a-b}$ – целые. Докажите, что эти целые числа попарно взаимно просты.
5. Докажите, что для любых целых a и b разной четности найдется такое целое с, что $c+ab$, $c+a$, $c+b$ – точные квадраты.
6. Отрезок L полностью покрыт другими отрезками. Докажите, что можно выкинуть несколько из них так, чтобы не менее 2/3 длины отрезка осталось покрыто ровно 1 раз.
7. Найдите максимум при вещественных x, y, z следующей величины $\sin x\cos y+\sin y\cos 2z+\sin z\cos 4x$.
8. $a,b>0$, $a+b\le 2$ Докажите, что $\dfrac{a}{b+ab}+\dfrac{b}{a+ab}\ge 1$.

9. Целые числа m, n, k таковы, что $k^2-m^2-n^2=2(m-n)(k-m+n)$. Докажите, что число $2mn$ является точным квадратом.
10. Сумма чисел x, y, z равна нулю. Докажите, что $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+3\ge 6xyz$.
11. Существуют ли такие натуральные a, b и c, что $(a+b)(b+c)(c+a)=340$?
12. Существуют ли такие натуральные a, b и c, что $(a+b)(b+c)(c+a)=4242$?
13. В четырехзначном числе каждую цифру увеличили на 1 или на 5, в результате чего оно увеличилось в 4 раза. Каким могло быть исходное число?
14. Корень трехчлена ax^2+bx+b умножили на корень трехчлена ax^2+ax+b и получили в произведении 1. Найдите эти корни.
15. Числа x и y удовлетворяют уравнениям: $x^3-3x^2+5x-17=0$, $y^3-3y^2+5y+11=0$. Найдите значение выражения $x+y$.
16. Дано, что a и b –целые числа. Докажите, что $\left|\dfrac{a+b}{a-b}\right|^{ab}\ge 1$.
17. Найдите наименьшее положительное число x, удовлетворяющее неравенству: $[x]\cdot\{x\}\ge 3$. Как обычно, $[x]$ обозначает целую часть числа x, $\{x\}=x-[x]$ – дробная часть x.
18. Значения квадратного трехчлена $ax^2+2bx+c$ отрицательны при всех x. Докажите, что значения трехчлена $a^2x^2+2b^2x+c^2$ при всех x положительны.

Ответы и краткие решения

Занятие 1.

1. *Решение*. Легко видеть, что $[x]\ne 0$; $[y]\ne 0$. Рассмотрим два случая:

а) $x \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1000}{[x]}, \\ [y] = \dfrac{1996}{x}. \end{cases}$ Мы знаем: $[y] \le y$ и $x < x+1 \Rightarrow$

$\dfrac{1996}{[x]+1} < \dfrac{1000}{[x]} \Rightarrow 1 \le [x] < \dfrac{1000}{996} \Rightarrow [x]=1,\ y=1000,\ x=\dfrac{499}{250}$. б) $x<0$

$\Rightarrow \begin{cases}[x]=\dfrac{1000}{y},\\ x=\dfrac{1996}{[y]}.\end{cases}$ Мы знаем: $y<[y]+1$ и $[x]\le x$; а) если

$[y]\ne -1 \Rightarrow \dfrac{1000}{[y]+1} < \dfrac{1000}{y} =$ $[x] \le x = \dfrac{1996}{[y]} \Rightarrow$ $[y] > -\dfrac{1996}{996} > -3 \Rightarrow$

$[y]=-2 \Rightarrow x=[x]=-998$; $y=-\dfrac{1000}{998}=-\dfrac{500}{499}$; б) если $[y]=-1\Rightarrow$

$x=[x]=-1996 \Rightarrow y=-\dfrac{1000}{1996}=-\dfrac{250}{499}$.

Ответ: $\left(\dfrac{499}{250};1000\right);\left(-998;-\dfrac{500}{499}\right);\left(-1996;-\dfrac{250}{499}\right)$.

2. *Решение*. $1=a^2+b^2+c^2=a^2+\frac12 b^2+\frac12 b^2+c^2$. Мы знаем: $\dfrac{x+y}{2}\ge xy$, если $x>0$ и $y>0 \Rightarrow$ $a^2+\frac12 b^2 \ge 2\sqrt{\frac12 a^2b^2}=\sqrt2 ab$;

$c^2+\frac12 b^2\ge\sqrt2 bc \Rightarrow 1\ge \sqrt2 ab+\sqrt2 bc=\sqrt2 b(a+c)\Rightarrow b(a+c)\le\dfrac{\sqrt2}{2}$.

3. *Решение*. Пусть $1995=m_1+m_2+m_3+m_4$, где $m_1\le m_2\le m_3\le$ $\le m_4$ – натуральные числа.

Заметим, что $m_4>\dfrac{1995}{4}>498$. Если НОК $(m_1,m_2,m_3,m_4)\ne m_4\Rightarrow$ $\Rightarrow$ НОК $\ge 2m_4$, (НОК$\vdots m_4$) $\Rightarrow$ НОК $\ge 2\cdot499=998$. Если НОК $=$ $=m_4\Rightarrow$ то $m_1\le\dfrac{m_4}{2}$ ($m_4\vdots m_1\Rightarrow$ если $m_1=m_2=m_3=m_4\Rightarrow 1995=$

$=4m_4\Rightarrow 1995\vdots 4$ – противоречие) $\Rightarrow m_1\le\dfrac{m_4}{2}$, $m_2\le m_4$, $m_3\le m_4\Rightarrow$ $\dfrac{m_4}{2}+m_4+m_4+m_4\ge1995\Rightarrow m_4\ge570$. Следовательно, НОК ≥ 570.

Можно видеть: $1995=285+570+570+570\Rightarrow$ НОК $=570$.

Ответ: НОК $=570$.

4. *Решение.* Проведем еще два разреза, центрально-симметрично уже сделанным. Куски 1, 2, 6 и 9 достались Малышу, а симметричные им 7, 8, 4 и 3 – Карлсону, которому отошла и серединка 5 (рис. 5).

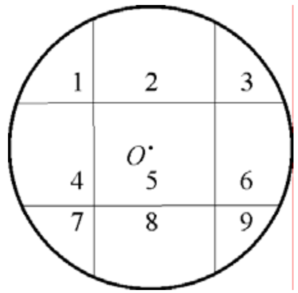


Рис. 5

5. *Решение*. Продолжим отрезки DA, CB до пересечения в точке E. Тогда $\dfrac{EA}{ED}=\dfrac{EB}{EC}$ и $EB^2=EA\cdot ED\Rightarrow\dfrac{EB^2}{ED^2}=$ $=\dfrac{EB}{EC}\Rightarrow ED^2=EB\cdot EC$. Это означает, что прямая ED (и также AD) является касательной к окружности, описанной около ΔBCD (рис. 6).

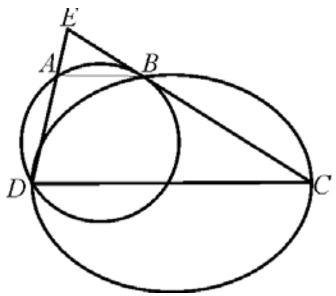


Рис. 6

6. *Решение*. Пусть рост Пети – a_{ij}, рост Вани – $a_{i_1j_1}$, где i,i_1 – номера колонн, а j,j_1 – номера шеренг, где стоят Петя и Ваня соответственно. Тогда из условия задачи следует, что $a_{ij}\ge a_{i_1j}\ge a_{i_1j_1}$.

7. *Решение*. 1) $n=3a\Rightarrow$ число 3 берется a раз; 2) $n=3a+1\Rightarrow$ если $n\ge8\Rightarrow n=3a+2\cdot5-3\cdot3$; 3) $n=3a+2\Rightarrow$ если $n\ge8\Rightarrow$ $n=3(a-1)+5$.

8. *Решение*. Пусть $a\in Q\Rightarrow\exists\, n\in N\Rightarrow a=0,(a_1,...a_n)$. В записи a есть последовательность из $2n$ девяток, и значит, $a_i=9$, $i=1,...n$. Противоречие.

9. *Решение*. Сумма цифр этого числа делится на 3, значит, и число в три раза меньшее делится тоже на 3. Поэтому исходное число

делится на 9, значит, и сумма цифр исходного числа делится на 9. Поэтому второе число тоже делится на 9, т. е. исходное делится на 27.

10. *Решение*. Разрезать плоскость на координатные квадратики 1×1 и сложить их стопкой.

Занятие 2.

1. *Решение*. Пусть AD – медиана, M – точка пересечения медиан, O – центр вписанной окружности. Нам достаточно доказать, что расстояние от точки M до прямой BC равно радиусу вписанной окружности (рис. 7)

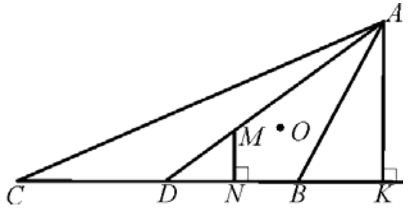


Рис. 7

$3MD = AD \Rightarrow \Delta DMN \sim \Delta DAK$; $S_{ABC} = p\cdot r$; где p – полупериметр треугольника ABC, а r – радиус вписанной окружности, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AK\cdot BC = \frac{3}{2}MN\cdot BC \Rightarrow\ pr = \frac{3}{2}BC\cdot MN \Rightarrow MN = r$, так как по условию задачи $p = \frac{3}{2}BC$.

2. *Решение*. Пусть LL' – средняя линия трапеции $KBB'K'$. Покажем, что $S_{LMN} = \frac{1}{2}\left(S_{KND} + S_{BCM}\right)$. Так как $DN = NM = MC \Rightarrow LL' =$

$= \frac{1}{2}\left(KK' + BB'\right) \Rightarrow S_{LMN} = \frac{1}{2}MN\cdot LL' =$

$= \frac{1}{2}MN\cdot\frac{1}{2}\left(KK' + BB'\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(S_{KND} + S_{BCM}\right)$. Аналогично доказывается, что $S_{KLN} = \frac{1}{2}\left(S_{AKD} + S_{LBM}\right)$.

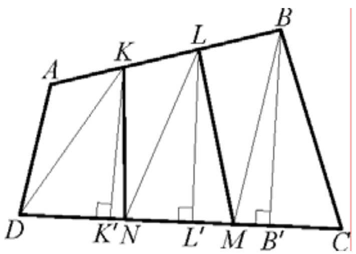


Рис. 8

Таким образом,

$$S_{KLMN} = S_{KLN} + S_{LMN} = \frac{1}{2}\left(S_{AKD} + S_{LBM} + S_{KND} + S_{BCM}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(S_{AKND} + S_{LBCM}\right) = \frac{1}{2}\left(S_{ABCD} - S_{KLMN}\right) \Rightarrow S_{KLMN} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$$ (рис. 8).

3. *Решение*. Пусть α – угол между сторонами a и b. Тогда для

площади выполняется соотношение $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha \le \frac{1}{2}ab \le 1$. Для $a = 1,\ b = 2,\ \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2 < c = \sqrt{5} < 3$ треугольник с такими сторонами удовлетворяет требованиям задачи и его площадь равна 1. Поэтому наибольшая площадь равна 1.

4. *Решение*. Строим треугольник ABC, точка C – произвольная. Точка O – точка пересечения диагоналей трапеции $ADEB$. Тогда прямая CO пересечет отрезок AB в середине (рис. 9).

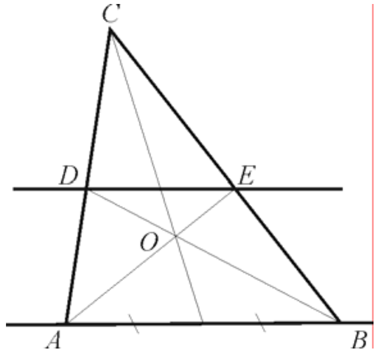


Рис. 9

5. *Решение*. В равносторонних треугольниках AOD и BOC медианы CF и DK являются высотами. В прямоугольном треугольнике CFD медиана FM равна половине гипотенузы, то есть $FM = \frac{1}{2}CD$. Аналогично, $KM = \frac{1}{2}CD$. Средняя линия треугольника AOB, отрезок $FK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD \Rightarrow \Delta KFM$ – равносторонний (рис. 10).

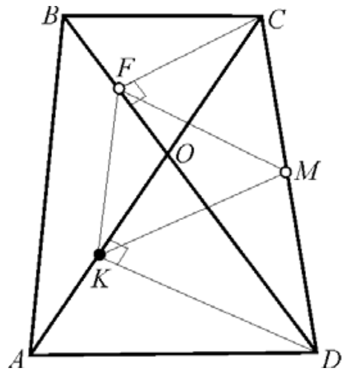


Рис. 10

6. *Доказательство*. Пусть во вписанном четырехугольнике $ABCD$: $\angle CAD > \angle BAC$. Отложим от стороны AD угол $\angle DAK = \angle BAC$ (рис. 11). $\angle BCA = \angle BDA \Rightarrow \Delta ABC \sim$

$$\sim \Delta AKD \Rightarrow \frac{KD}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \text{ (1): } KD = \frac{BC\cdot AD}{AC}; \qquad \angle ABD = \angle ACD;$$

$$\angle BAK = \angle CAD \Rightarrow\ \Delta ABK \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{BK}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow$$

$(2):\ BK=\dfrac{CD\cdot AB}{AC}\Rightarrow \qquad (1)+(2)\Rightarrow$

$KD+BK=BD=\dfrac{BC\cdot AD}{AC}+\dfrac{CD\cdot AB}{AC}\Rightarrow$

$BD\cdot AC=BC\cdot AD+AB\cdot CD.$

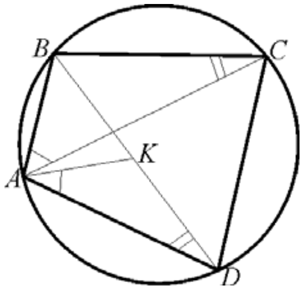


Рис. 11

7. *Решение*. BK – высота прямоугольного треугольника SBO, поэтому $SB^2=SO\cdot SK$. По свойству касательной и секущей $SB^2=SM\cdot SN\Rightarrow \dfrac{SK}{SN}=\dfrac{SM}{SO}\Rightarrow \Delta SKM\sim\Delta SNO\Rightarrow \angle SNO=$ $=\angle SKM\Rightarrow \quad \angle MKO+\angle ONM=\angle MKO+\angle SKM=180^\circ$. Следовательно, около четырехугольника $MKON$ можно описать окружность (рис. 12).

8. *Решение*. Заменим искомую сумму квадратов выражениями через скалярные квадраты векторов, тогда

$MA^2+MB^2+MC^2=$

$=\left(\overline{MO}+\overline{OA}\right)^2+\left(\overline{MO}+\overline{OB}\right)^2+$

$+\left(\overline{MO}+\overline{OC}\right)^2=3MO^2+OA^2+$

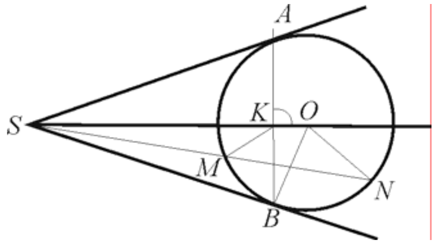


Рис. 12

$+OB^2+OC^2+2\overline{MO}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)=\ 3MO^2+OA^2+OB^2+OC^2=6R^2$

поскольку $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OD}=-\overline{OC}\Rightarrow\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0$ (рис. 13).

9. *Решение*. Надо найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC, образованного точками попарного касания данных окружностей. Центр этой окружности является пересечением серединных перпендикуляров к хордам AB, BC и AC, которые, в свою очередь, являются основаниями равнобедренных треугольников с вершинами в центрах окружностей. Поскольку высоты являются биссектрисами, то центр искомой окружности является пересечением биссектрис углов O',O'',O'''. Значит, искомая окружность

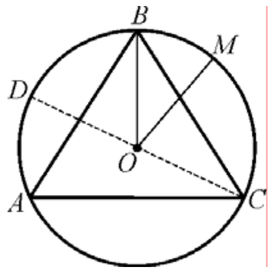


Рис. 13

будет вписана в треугольник $\Delta O'O''O'''$. Общие касательные к окружностям, проведенные через точки A, B и C пересекутся в одной точке O, отрезки касательных OA, OB, OC равны. Так как касательные пер пендикулярны линии центров, то точка O – центр окружности, вписанной в $\Delta O'O''O'''$, а он – прямоугольный треугольник.

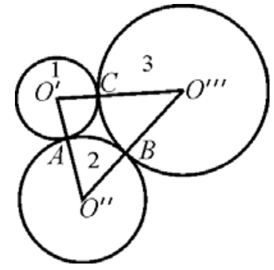


Рис. 14

Следовательно, $S=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4=6=\dfrac{1}{2}\cdot\left(3+4+5\right)\cdot r\Rightarrow r=1$ (рис. 14).

Занятие 3.

1. *Решение*. Нет. Пусть a и $b=2a$ – полученные числа, $S(a)$ и $S(b)$ – суммы их цифр. Тогда $a+b=3a\ \vdots\ 3\ \Rightarrow S=S(a)+S(b)\ \vdots\ 3$, что неверно, так как $S=44=2+3+...+9$.

2. *Решение*. Пусть $a^3+1=3^k$ и $a^3+1=(a+1)\times$ $\times(a^2-a+1)\Rightarrow a+1=3^m,\quad a^2-a+1=3^n,\quad m\in N,\ n\in N\Rightarrow$ следовательно, a не делится на 3. Далее, $3a=(a+1)^2-(a^2-a+1)=3^{2m}-3^n\Rightarrow a=3^{2m-1}-3^{n-1}$, что возможно только, если $n-1=0\Rightarrow a^2-a+1=3\Rightarrow a=2.$

3. *Решение*. Простое число $(a^n-1)\vdots(a-1)$ и $\left(a-1\right)$ – простое, поэтому $\left(a-1\right)=1$. Тогда $a=2$. Далее при нечетном $n\Rightarrow(2^n+1)\vdots3\Rightarrow n=2k\Rightarrow a^n-1=(2^k+1)(2^k-1)\Rightarrow2^k-1=1\Rightarrow$ $\Rightarrow k=1\Rightarrow n=2$.

4. *Ответ*: нельзя представить в указанном виде числа 1 и числа, на 2 большие степени двойки.

5. *Решение*. Пусть $p-q=n\Rightarrow p+q=n^3\Rightarrow q=\dfrac{n^3-n}{2}=$ $=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{2}\Rightarrow$ среди трех последовательных чисел одно обязательно делится на три, поэтому $q\vdots3\ \Rightarrow\ n=2\ \Rightarrow\ p=\dfrac{n^3+n}{2}=$ $=5\Rightarrow p=5,\ \ q=3$.

6. *Решение*. Обязательно. Допустим, что нашлось хорошее чис-

ло $n=\overline{c_1...c_k 8}$, где $c_1,...,c_k$ – цифры, причем $c_k \ne 9 \Rightarrow n+1=\overline{c_1...c_k 9}$, $n+3=\overline{c_1...c_k' 1}$. Числа $(n+1)$, $(n+3)$ нечетны, а суммы их цифр равны соответственно $c_1+c_2+...+c_k+9$ и $c_1+c_2+...+c_k+2$. Эти суммы отличаются на 7, поэтому одно из них четно. Но четное число не может быть делителем нечетного. Противоречие.

7. *Решение*. Существует. Например, $5\cdot 2^{2008}$ или $2\cdot 5^{2008}$. Покажем, что первое число подходит. Для этого выпишем все его делители, кратные 5: $5, 5\cdot 2, 5\cdot 2^2, ..., 5\cdot 2^{2008}$. Их произведение будет делиться на 5 в 2009 степени и не будет делиться на 5 в 20010 степени. Следовательно, произведение всех делителей числа $5\cdot 2^{2000}$ будет кратно 10 в 2009 степени и не кратно $5\cdot 10^{2010}$ степени, поэтому оно оканчивается ровно на 2009 ноль.

8. *Решение*. Можно. Пусть на доске написаны числа $a, b, c, d, 2009$. На месте чисел a, b напишем число $x=c+d-2009$. В новом наборе $x, x, c, d, 2009$ заменим числа c, d на число $2009+x-x=2009$. Вместо числа x в следующем наборе $x, x, 2009, 2009, 2009$ напишем число $2009+2009-2009=2009$. В результате получили требуемый набор.

9. *Решение*. Вычтем из первого трехчлена второй. Получим, что они оба имеют общий корень с трехчленом $ax^2+bx+c-$ $-((c-b)x^2+(c-a)x+a+b)=(a+b-c)(x^2+x-1) \Rightarrow a+b-c=0$, либо их общий корень совпадает с одним из корней трехчлена $C=x^2+x-1$. В первом случае имеем $a+b+2c=3c\vdots 3$. Во втором случае получаем, что если x_0 – общий корень трехчленов A и $C \Rightarrow ax_0^2+bx_0+c+c(x_0^2+x_0-1)=0 \Rightarrow \big((a+c)x_0+(b+c)\big)x_0=$

$$=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=-c \Rightarrow a+b+2c=0\vdots 3.$$

10. *Доказательство*. Из условия следует, что числа $10^{2000}/p$ и $\left(10^{1999}\cdot a\right)/b$ имеют одинаковые дробные части. Значит, число $\dfrac{10^{2000}}{p}-\dfrac{10^{1999}\cdot a}{b}=\dfrac{10^{2000}\cdot b-10^{1999}\cdot ap}{bp}$ – целое. Тогда $10^{2000}b-$ $-10^{1999}ap\vdots p \Rightarrow 10^{2000}b\vdots p \Rightarrow b\vdots p$, поскольку $\left(10^{2000},p\right)=1$, эти числа

взаимно просты.

11. *Решение*. Разобьем числа от n^2 до $(n+1)^2$ на две группы: $A_n=\left\{n^2, n^2+1, ..., n^2+n\right\}$ и $B_n=\left\{n^2+n+1, n^2+n+2, ..., n^2+2n\right\}$. Для чисел группы A_n ближайшим квадратом является n^2, для чисел группы B_n ближайшим квадратом является $(n+1)^2$ – квадрат другой четности. Но из равенства $S(B_n)-S(A_n)=$ $=\Big(\big(n^2+n+1\big)-\big(n^2+1\big)\Big)+\Big(\big(n^2+n+2\big)-\big(n^2+2\big)\Big)+...$ $+\Big(\big(n^2+2n\big)-\big(n^2+n\big)\Big)-n^2=n\cdot n-n^2=0 \Rightarrow$ Следует, что суммы чисел в группах A_n и B_n равны. Осталось заметить, что все множество чисел от 1 до 999 999 разбивается на непересекающиеся пары A_1 и B_1, A_2 и B_2,..., A_{999} и B_{999}.

12. *Решение*. Нет, не существует. Докажем методом от противного. Можем считать, что a – четное. Тогда b, c – тоже четные. Отсюда – $(b+1)$ и $(c+1)$ оба нечетные. Тогда по теореме Виета $\dfrac{b+1}{a+1}$ и $\dfrac{c+1}{a+1}$ – нечетные числа. Но сумма и произведение двух целых чисел не могут быть одновременно нечетными. Противоречие.

Занятие 4.

1. *Решение*. Опустим из точки A высоту на сторону BC (рис. 15). Поскольку $AM=MC$, $AN \parallel MH \Rightarrow NH=HC$. Из прямоугольных треугольников ΔANH и ΔPBH находим

$$\operatorname{tg}\angle NAH=\frac{NH}{AN}=\frac{1}{2}\frac{NC}{AN}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\angle NAC,$$

$$\operatorname{tg}\angle PBH=\frac{PH}{BH}=\frac{1}{2}\frac{MH}{BH}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\angle MBH.$$

Далее $\Delta ANC \sim \Delta BMC \Rightarrow \angle NAC=$ $=\angle MBH \Rightarrow \operatorname{tg}\angle NAH=\operatorname{tg}\angle PBH \Rightarrow$ Поскольку эти углы острые, то из равенства

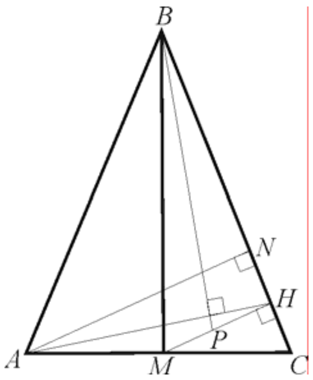


Рис. 15

тангенсов следует равенство углов. Тогда $\angle PBH+\angle AHB=$ $=\angle NAH+\angle AHB=90^\circ$.

2. *Решение*. Имеем два различных способа доказательства. а) Подобие (рис. 16). $\Delta AED \sim \Delta ABC \Rightarrow \angle FEB = \angle C$, $\angle GDC = \angle B \Rightarrow FE = BE \cdot \cos\angle FEB = BE \cdot \cos\angle C = BC \cdot \cos\angle B \cdot \cos\angle C$. Аналогично доказывается, что $DG = BC \cdot \cos\angle B \cdot \cos\angle C$. б) Окружность (рис. 17).

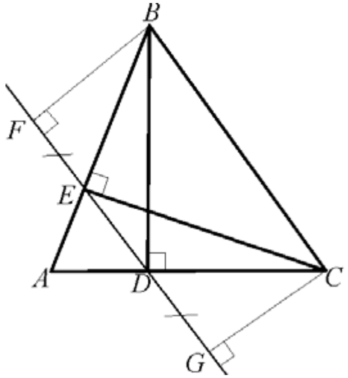


Рис. 16

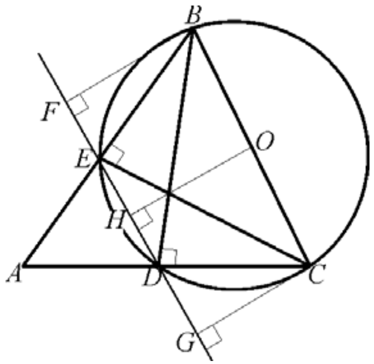


Рис. 17

Поскольку точки E и D лежат на окружности, центр которой, точка O, делит отрезок BC на две равные части, то если $OH \perp ED \Rightarrow EH = HD$. Поскольку $BO = OC$ и $BF \parallel OH \parallel CG \Rightarrow FH = HG \Rightarrow FE = DG$.

3. *Решение*. Возможны случаи а) и б). Рассмотрим случай а). Соединим точки A и M (рис. 18, 19). Основная трудность – обнаружить

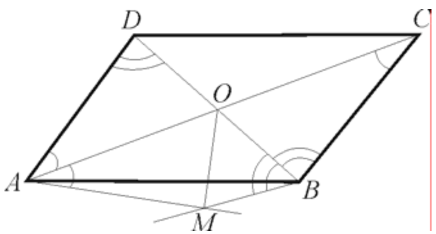


Рис. 18

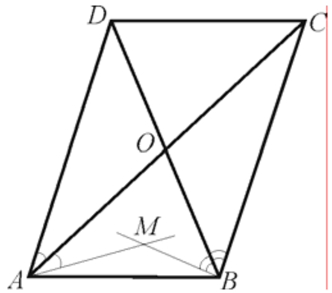


Рис. 19

и доказать подобие треугольников $\Delta AOD \sim \Delta AOM$ и $\Delta BOC \sim \sim \Delta BOM$. Для этого рассмотрим $\angle DAC = \alpha$; $\angle DBC = \beta \Rightarrow \angle AOB = \alpha + \beta$ как внешний угол треугольника OBC. $\angle AMB = 2\pi - \angle MAO - \angle AOB - \angle MBO = 2\pi - 2\alpha - 2\beta$. Точка O равноудалена от прямых AD и AM, BC и BM, AD и BC. Поэтому она равно-

удалена от прямых AM и BM, то есть прямая MO является биссектрисой угла AMB: $\angle AMO = \dfrac{1}{2}\angle AMB = \pi - \alpha - \beta = \angle AOD$. Аналогично, $\angle BMO = \angle BOC$.

Таким образом, подобие указанных треугольников доказано. Из подобия следует $\dfrac{AM}{AO} = \dfrac{AO}{AD}$; $\dfrac{BM}{BO} = \dfrac{BO}{BC} \Rightarrow \dfrac{AM}{BM} = \left(\dfrac{AO}{BO}\right)^2 = k^2$.

4. *Решение*. Треугольники $\Delta A'B'O \sim \Delta ABO$; $\Delta BOC \sim \sim \Delta C'OB'$ подобны по 2 признаку; из-за наличия общей пары сходственных сторон OB, OB' коэффициенты подобия равны. Следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

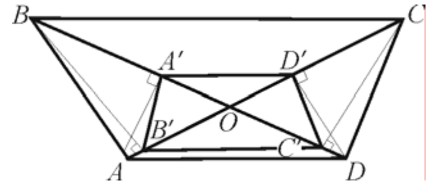


Рис. 20

Аналогично доказывается, что $\Delta BCD \sim \Delta B'C'D'$ (рис. 20).

Занятие 5.

Задача 1. *Решение*.

1. Частный пример (рис. 21).
2. Частный случай более общей конструкции, когда a, b, c, d – взаимно простые числа. Все произведения тогда равны $abcd$ (рис. 22).

2	3	35
5	7	6
21	10	1

Рис. 21

a	b	cd
c	d	ab
bd	ac	1

Рис. 22

3. Еще более симметричная конструкция, где a, b, c, d, e, f – различные взаимно простые числа (рис. 23).

ad	bc	cf
bf	cd	ae
ce	af	bd

Рис. 23

Задача 2. *Решение*. Будем грузить мешки на автомобиль, пока их общий вес не превысит 4 т. Тогда снимем последний мешок и отложим его в сторону. В следующей погрузке отложенный мешок не участвует. Так поступим 8 раз. Общий вес перевезенного груза и отложенных мешков больше, чем $8 \cdot 4 = 32$.Значит, осталось меньше 4 т, которые можно перевести за девятую поездку. Отложенные мешки перевезем за две оставшиеся поездки, по 4 мешка (их вес не больше 4 т, так как вес одного мешка меньше 1 т) за один раз.

Задача 3. *Решение*. Не может. Закрасим в каждом квадратике 4×4, 2×2, 1×1 по одной клетке. Заметим, что общее число незакрашенных клеток (в каждом квадратике, а, значит, и на всей доске) кратно 3. Поэтому количество закрашенных клеток при делении на 3 дает тот же остаток, что и 2009^2, то есть 1. Следовательно, суммарное число квадратиков 4×4, 2×2, 1×1 не может равняться 2009.

Задача 4. *Решение*. Во-первых, заметим, что в каждой строчке и в каждом столбце стоит ровно по одной ладье. Поэтому, если вычесть из всех чисел второй строки по 8, из всех чисел третьей строки – по 16, … , из всех чисел восьмой строки – по 56, то сумма номеров клеток, на которых стоят ладьи, уменьшится на $8(1+2+3+4+5+6+7) = 224$ (рис. 24).

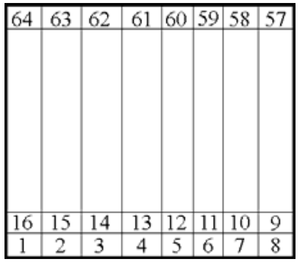


Рис. 24

Понятно, что сумма будет минимальной, когда ладьи стоят на полях с минимальными числами. Но на полях с 1 не может быть больше двух ладьей, так как они стоят только в двух столбцах, на полях с 2, 3, 4 – аналогично. Поэтому минимальная сумма будет равна $2(1+2+3+4)+224=244$. Заметим, что точно так же решается задача, когда надо узнать максимальную сумму: $2(5+6+7+8)+$ $+224=276$.

Задача 5. *Решение*. Разобьем таблицу 10×10 на 25 квадратов 2×2. Заметим, что в каждом квадрате расположено не более одного четного числа и не более одного числа, делящегося на три. Следовательно, по крайней мере, по два числа в каждом квадрате равны 1, 5 или 7. Таким образом, в таблице расположено как минимум 50 чисел 1, 5 или 7. Поэтому в таблице найдется, по крайней мере, 17 одинаковых чисел.

Задача 6. *Решение*. Посмотрим, как меняется сумма цифр числа при применении операции. Если число оканчивалось на k девяток, где $k\ge1$, то при прибавлении единицы эти все k девяток заменяются на нули, а стоящая перед ними цифра увеличивается на 1. Значит, к сумме цифр прибавляется $(1-9k)$. Если $k=0$, то есть число не оканчивается на 9, то последняя цифра увеличивается на 1, а сумма цифр тоже увеличивается на 1: $1-9k=1$. Таким образом, к сумме цифр каждые раз прибавляется 1 и вычитается $9k$, где k – количество девяток, которые превращаются в нули. В начале сумма

цифр равна 15, а в конце – 1. Так как $1=15+400-414=$ $=15+400-9*46$, получаем, что в процессе вычислений 46 девяток превратились в нули. В конце в числе осталось 5 нулей, поэтому количество исчезнувших (превратившихся в 1) нулей равно $46-5=41$. Моменты, когда цифра 0 превращается в 1 – это в точности те моменты, когда число в компьютере оканчивается на 0. Значит, не считая самого последнего момента, числа, оканчивающиеся на 0, появлялись в компьютере 41 раз. С учетом последнего числа искомое количество равно 42 раза.

Задача 7. *Решение*. Сможет. Он должен разбивать избирателей на группы так, чтобы в каждом туре в группах, где победит оппозиция, не было его сторонников, а в группах, где победит он, его сторонники составляли минимальное большинство. В данном случае, имея $3^{11}<200\,000$ сторонников, он может устроить 10 – степенные выборы: в самой маленьких группах – 16 человек, в следующих: во второй – 4 выборщика, в третьей – 4, …, в десятой – 5 выборщиков. Мирафлорес должен распределить своих сторонников так: в 3^9 маленьких групп по 9 своих сторонников, в другие – ни одного и так далее в соответствии с принципом, сформулированном в начале решения.

Задача 8. *Решение*. Легко проверить, что тройка чисел $x=6a^3+1$, $y=-6a^3+1$, $z=-6a^2$ является решением нашего уравнения при всех целых a: $\left(1+6a^3\right)^3+\left(1-6a^3\right)^3+\left(-6a^2\right)^3=$ $=1+3\cdot6a^3+3\cdot6^2a^6+6^3a^9+1-3\cdot6a^3+3\cdot6^2a^6-6^3a^9-6^3a^6=2.$

Задача 9. *Решение*. Пробуем расставить в серединах сторон числа из арифметической прогрессии с шагом 1. Далее строим последовательность чисел следующим образом, точки соответствуют вершинам 13-угольника, в которые вписываются числа данной последовательности:

26 19 25 18 24 17 23 16 22 15 21 14 20 26

$\underbrace{\bullet\ 2\ \bullet}_{47}\underbrace{\ 3\ \bullet}_{47}\underbrace{\ 4\ \bullet}_{47}\qquad\qquad\underbrace{\bullet\ 13\ \bullet}_{47}\underbrace{\ 1\ \bullet}_{47}.$

Занятие 6.

1. *Решение*. Дуги KD и DM равны. Покажем, что хорды KN и DE равны: $\angle DEA = 90^\circ \Rightarrow DE \parallel MN \Rightarrow$ следующие дуги равны $DM = NE$; $KD = NE$; $KDN = DNE \Rightarrow KN = DE \Rightarrow$ $\Rightarrow DE = MC + NC$, поскольку трапеция $DNME$ – равнобедренная (рис. 25).

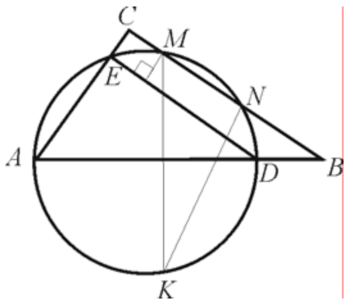


Рис. 25

2. *Решение*. $A'C'$ – средняя линия треугольника, M – ее середина. Восстановим перпендикуляр из точки M до пересечения с основанием AC треугольника. MB' – высота и медиана, значит, треугольник $A'B'C'$ – равнобедренный. Точка Q симметрична B' относительно A', точка P – симметрична B' относительно C'. Легко показать, что треугольник PQB' равнобедренный (рис. 26).

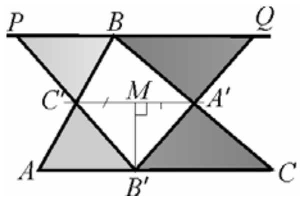


Рис. 26

3. *Решение*. Точка Q' – пересечение биссектрисы угла A с описанной окружностью. Тогда $\angle ABA' =$ $= \angle AB'A' = \angle AQ'C \Rightarrow \angle A'B'C +$ $+ \angle A'Q'C = \pi \Rightarrow B'A'Q'C$ – вписанный четырехугольник. Поскольку четырехугольник $B'A'QC$ – вписанный тоже, то точки Q и Q' совпадают. Тогда

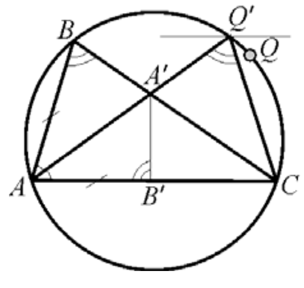


Рис. 27

$Q' = Q \Rightarrow QB = QC = QB'$, поскольку точки B, B' симметричны относительно биссектрисы угла A. Тогда треугольник $B'QC$ – равнобедренный, касательная к описанной окружности, проведенная в его вершине, параллельна основанию (рис. 27).

4. *Решение*. Пусть P – середина общей хорды BM данных окружностей, а точка K – симметрична точке C относительно точки P.

Тогда, очевидно, K принадлежит окружности с центром в точке O', причем $KMDA$ – параллелограмм. Треугольник AMK вписан в окружность радиуса R с центром в O'. Так как треугольники AMK и AMD равны, то равны и радиусы описанных вокруг них окружностей (рис. 28).

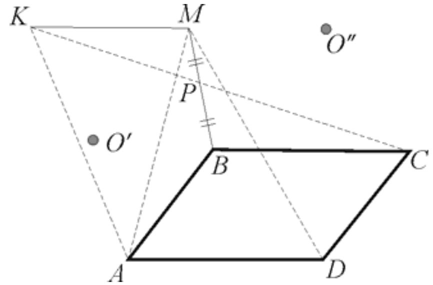


Рис. 28

Занятие 7.

1. *Решение*. После каждой операции сумма чисел должна быть нечетной, так как четность не меняется в процессе предложенного действия. После 10 операций оставшееся число должно быть нечетным, то есть 1.

2. *Решение*. Инвариантом будет сумма расстояний от первой елки до чижей. В начале она равна $(0+1+2+3+4+5)\cdot 10 = 15\cdot 10 =$ $= 150$ м. Пусть чижи могут собраться на одной елке. Тогда сумма расстояний равна $6x$, где x – расстояние до данной елки: $6x = 15$. Получаем противоречие. Если елок 7, то такая ситуация возможна.

3. *Решение*. Нет, нельзя. Инвариантом будет четность суммы написанных чисел: $\sum_0 n = \dfrac{1+2009}{2}\cdot 2009$ – нечетное число. При заданной операции четность суммы сохраняется, а сумма конечная должна стать 0, то есть числом четным.

4. *Решение*. Занумеруем сектора по кругу числами от 1 до 6. И для любой расстановки фишек рассмотрим следующую величину S – сумму номеров секторов, в которых стоят данные нам фишки (с учетом кратности). $S_0 = 1+2+...+6 = 21$. Очевидно, что при сдвиге фишки в соседний сектор соответствующее ей слагаемое в сумме S меняет четность, значит, если сдвигаются одновременно две фишки, то четность величины S не меняется, она инвариантна. Если все фишки будут стоять в одном секторе, тогда $S = 6a$ – число четное. Получаем, что четности начальной и конечной сумм не совпадают, - противоречие. Нельзя собрать все фишки в одном секторе.

5. *Решение*. Для любого набора из n чисел на доске рассмотрим следующую величину X: сумму всех чисел, уменьшенную на n. Допустим, что с набором произведено описанное в условии преобразо-

вание. Как может меняться введенная величина X? Если сумма всех чисел набора, кроме a и b, равна S, то до преобразования величина X равнялась $X = S + a + b - n$, а после преобразования – $X = S + (a + b - 1) - (n - 1) = S + a + b - n$. Итак, X – инвариант. Исходно, $X = (1 + 2 + ... + 20) - 20 = 190$. Значит, после 19 операций эта величина должна остаться такой же. Но с другой стороны, по своему определению, $X = p - 1 = 190 \Rightarrow p = 191$.

6. *Решение*. В качестве инварианта рассмотрим следующую величину: произведение всех чисел на доске, предварительно увеличенных на 1. Тогда эта величина до и после операций равна соответственно: $X_0 = \prod (a+1)(b+1)$ и $X = \prod (ab + a + b + 1)$. Поскольку $(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1$, то данная величина является инвариантом. Тогда $X_0 = X = 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 21 = 21! = p + 1 \Rightarrow p = 21! - 1$.

7. *Решение*. Инвариант – количество кусков минус количество сделанных разломов. Ответ: 23.

8. *Решение*. При перекрашивании строки или столбца количество клеток одного цвета изменяется на четное число. Первоначально было 63 белых клетки, тогда 64 белых клетки появиться не могут.

Занятие 8.

1. *Решение*. Рассмотрим только угловые клетки. При любом перекрашивании строки или столбца меняется цвет у четного их числа. Нечетность черных угловых клеток – инвариант.

2. *Решение*. Нет. Надо рассмотреть в качестве инварианта остаток от деления на 11 разности между количеством рублей и долларов.

3. *Решение*. Нет. Рассмотрим систему координат с началом в точке, где расположена фишка. Определим сумму $(i + j)$ – сумму координат фишки по x, y. Эта величина может либо увеличиваться на 1, либо уменьшаться на 2. Если рассмотреть изменение этой величины по модулю 3, то оно равно всегда 1. За инвариант возьмем $I_0 = i + j - n$, n – количество сделанных ходов. Пусть I – остаток от деления I_0 на 3, этот инвариант равен 0. Количество сделанных ходов равно $(c^2 - 1)$, где c – длина стороны квадрата. Должно быть: $1 - (c^2 - 1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3) \Leftrightarrow 2 - c^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$. Отдельно можем показать, что $c^2 - 2$ не делится на 3 ни при каком натуральном значении c.

4. *Решение*. Ответ: нет, не может. Пусть a, b и c – количества серых, бурых и малиновых хамелеонов. Тогда возможны превраще-

ния вида: $(a-1,\ b-1,\ c+2)$ или $(a-1,\ b+2,\ c-1)$ или $(a+2,\ b-1,\ c-1)$. Видно, что разности между числами набора либо не меняются, либо делятся на 3. Значит, остатки при делении на 3 не меняются, они инвариантны. Но в начале процесса $a - b = 13 - 15 = -2$, а в случае, если все хамелеоны малиновые, $a - b = 0 - 0 = 0$. Противоречие.

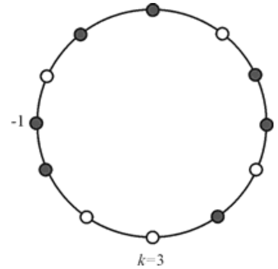


Рис. 29

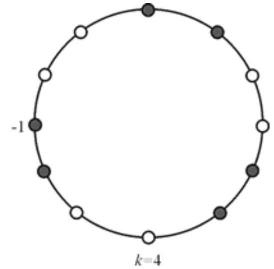


Рис. 30

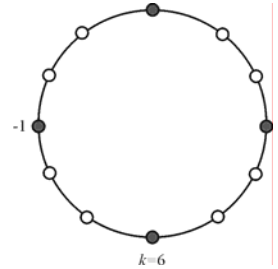


Рис. 31

5. *Ответ*: нет. Доказательство проходит по единой схеме: отметим некоторое число вершин, обладающих тем свойством, что любой набор из k вершин подряд содержит четное число отмеченных вершин (рис. 29–31).

В качестве инварианта рассмотрим произведение всех чисел в отмеченных вершинах. Вначале оно равно (–1), затем, когда число сместилось в соседнюю слева неотмеченную вершину, равно 1. Инвариантность введенной величины следует из описанного выше свойства множества отмеченных вершин.

6. *Решение*. Пусть $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ – произвольная перестановка из чисел $1, 2, 3, ..., n$. Будем говорить, что числа a_i и a_j образуют в этой перестановке инверсию, если для $i < j$ $a_i > a_j$, т. е. большее число предшествует меньшему. Поменяв местами два соседних числа в перестановке, мы увеличим или уменьшим число инверсий на 1. Проделав же нечетное число таких операций, мы изменим четность числа инверсий, а значит, изменим и перестановку.

7. *Решение*. Каждый раз число кусочков увеличивается на 9, то есть $2009 = 1 + 9k \Rightarrow k = \dfrac{2008}{9} \notin N$. Ответ: не мог.

8. *Ответ*. Нет, не могут. В качестве инварианта рассмотрим разность между наибольшим и наименьшим из чисел.

Занятие 9.

1. *Решение*. Посмотрим, что происходит с суммой всех чисел в таблице при заданной операции. Она увеличивается, если сумма чисел на изменяемой линии отрицательна, уменьшается, если эта сумма положительна, и остается неизменной, если сумма равна 0. Значит, если в таблице есть линия с отрицательной суммой чисел, то при помощи этой операции мы увеличим сумму всех чисел в таблице. Но может ли сумма всех чисел таблицы увеличиваться при таких операциях бесконечное число раз? Конечно нет, ведь этими операциями можно получить лишь конечное число различных таблиц. Действительно, число, стоящее в данной клетке, либо совпадает с исходным числом, либо отличается от него знаком. Поэтому количество таблиц заведомо $\le 2^{m\times n}$, и, значит, сумма всех чисел таблицы может принимать лишь конечное число различных значений. Рассмотрим теперь исходную таблицу. Выберем в ней линию с отрицательной суммой чисел (если таких нет, то задача решена). Применим нашу операцию к этой линии. В полученной таблице опять найдем линию с отрицательной суммой чисел, применим нашу операцию, получим следующую таблицу и так далее.

2. *Решение*. Проведем n отрезков с концами в данных точках. Если никакие два из них не пересекаются, то задача решена. В противном случае рассмотрим пару пересекающихся отрезков AB и CD. В качестве искомой операции уместно рассмотреть замену пересекающихся отрезков AB и CD на непересекающиеся отрезки AC и BD. Осталось найти полуинвариант – величину, которая при этой операции ведет себя монотонно. Так как сумма длин диагоналей AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ больше, чем сумма длин противоположных сторон AC и BD, в качестве полуинварианта можно взять сумму длин всех n отрезков. Ясно, что сумма может принимать лишь конечное число значений. Рассуждая аналогично предыдущей задаче, в конце концов, получаем набор из n отрезков с минимальной суммой длин. Нетрудно понять, что в нем никакие два отрезка не пересекаются (рис. 32).

Рис. 32

3. *Решение*. Разобьем парламент на палаты произвольным образом. Если у каждого парламентария при этом в одной с ним палате не более одного врага, то требование задачи выполнено. В противном случае рассмотрим парламентария A, у которого в одной с ним палате не менее двух врагов. В качестве полуинварианта рассмотрим число пар врагов, находящихся в одной палате. Понятно, что перемещая A в другую палату, мы уменьшаем это число. И мы знаем, что инвариант принимает лишь конечное число значений.

4. *Решение*. Рассадим рыцарей за круглым столом произвольным образом. Если при этом получится, что никакие два врага не сидят рядом, то задача решена. В противном случае рассмотрим рыцаря A, сидящего слева от своего врага B. Как и в предыдущей задаче в качестве полуинварианта рассмотрим число пар врагов-соседей. Нужно придумать операцию, уменьшающую это число. Это и есть самая сложная часть решения. Среди друзей рыцаря A обязательно найдется такой рыцарь C, что его правый сосед D – друг рыцаря B (иначе у рыцаря B врагов более $N-1$). Теперь «развернем» весь участок стола от B до C в обратную сторону. При этом рыцарь B станет соседом рыцаря D, рыцарь C – соседом рыцаря A. Остальные пары соседей не изменяются. Следовательно, полуинвариант уменьшится (рис. 33–35).

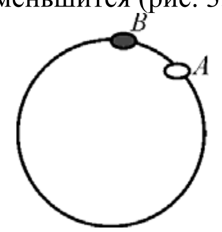


Рис. 33

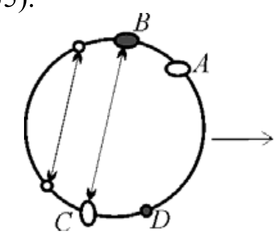


Рис. 34

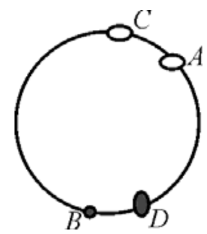


Рис. 35

5. *Решение*. Обозначим через S_m сумму чисел, записанных на окружности после m-го шага. Покажем, что в результате каждого шага сумма утраивается. В самом деле, если число а входит в некоторую сумму S_m, то в сумму S_{m+1} будут входить наряду с а также $(a+b)$ и $(a+c)$, где b и c – соседние с a числа. Таким образом, $S_{m+1}=3S_m=3^m\cdot S_1,\ S_1=6\Rightarrow S_{m+1}=2\cdot 3^{m+1}\Rightarrow S_n=2\cdot 3^n$.

6. *Решение*. Нет. Посмотрим, как меняется при этой операции остаток от деления числа на 7. Пусть b – последняя цифра числа. Тогда оно имеет вид $10a+b$, а в результате применения операции получается $a+5b$. Поскольку $5(10a+b)-(a+5b)=49a\vdots 7$, то оста-

ток умножается на 5, то есть если исходное число делилось на 7, то все числа, появляющиеся на доске, тоже будут делиться на 7. Следовательно, 2008^7 никогда не будет получено.

Занятие 10.

1. *Решение*. Знаем, что OB, радиус описанной около треугольника ABC окружности, будет в 2 раза меньше HA', радиуса описанной около треугольника $A'B'C'$ окружности. $AG:GK=2:1$; $\angle 1=\angle 2 \Rightarrow AH:OK=2:1 \Rightarrow \Delta AHG\sim\Delta GOK \Rightarrow \angle HGA=\angle KGO$; $\angle AHG=\angle GOK \Rightarrow \Delta AHG\sim\Delta GOK \Rightarrow \angle HGA=\angle KGO$; $\angle AHG= =\angle GOK \Rightarrow$ равные углы обязывают точку G лежать на отрезке HO (рис. 36).

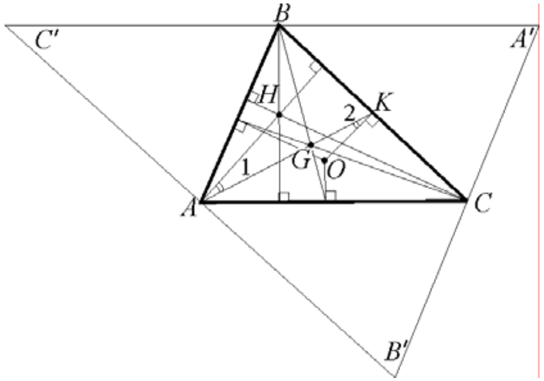


Рис. 36

2. *Решение*. Пусть $l=EF\parallel AC\Rightarrow\Delta AEB$ и ΔBFC – равнобедренные, и в них срединные перпендикуляры треугольника ABC являются одновременно биссектрисами, поэтому точка O – центр вписанной в треугольник EFK окружности. Поскольку EO, FO – биссектрисы, значит, KO – тоже биссектриса угла AKC. Осталось доказать, что BK – биссектриса угла AKC. Для этого рассмотрим треугольник ACK и заметим, что точка B – центр вневписанной в этот треугольник окружности. Так как AB и BC – биссектрисы углов EAC и ACF соответственно, то BK – биссектриса угла AKC. Значит, точки B, O, K лежат на одной прямой (рис. 37).

3. *Решение*. Углы $\angle KCF=\angle EAK$ равны, поскольку состоят оба из прямых углов и равных углов OAK и KCO. Если бы BK была биссектрисой, то в ΔEFK: $EB:BF=EK:KF=EA:FC$, так как отрезки касательных равны. Если бы BK была и биссектрисой и высотой, то $\Delta EAK\sim\Delta KFC$. Тогда пойдем с конца: на AC отложим точку K так, чтобы $AK:KC=EA:FC\Rightarrow\Delta EAK\sim\Delta KFC\Rightarrow$ $EK:KF=EB:BF\Rightarrow BK$ – биссектриса угла ΔEFK (рис. 38). И имеем из подобия треугольников $\Delta EAK\sim\Delta KFC$, что

$\angle EKA=\angle FKC\Rightarrow \angle AKB=\angle BKC=90^0\Rightarrow BK$ – высота. Что и требовалось доказать.

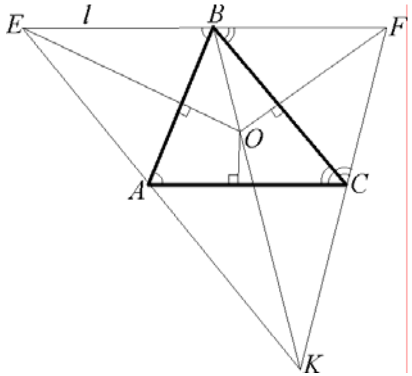


Рис. 37

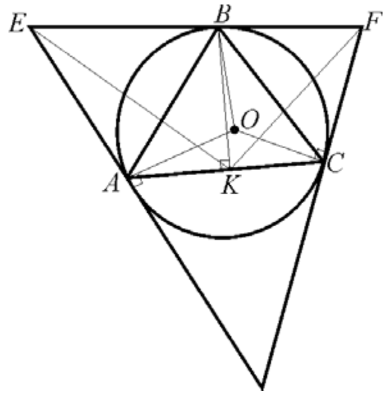


Рис. 38

Занятие 11.

1. *Решение*. Предположим, что это возможно. Рассмотрим тогда соответствующий граф. В этом графе 15 вершин, степень каждого из которых равна 5. Подсчитаем количество ребер в этом графе: $\frac{15\cdot 5}{2}$. Противоречие с тем, что это число должно быть целым.

2. *Решение*. Если бы это было возможно, то можно было бы нарисовать граф с 30 вершинами, 9 из которых имели бы степень 3, 11 – степень 4, 10 – степень 3. Тогда у такого графа было бы 19 нечетных вершин, что невозможно.

3. *Ответ*: нет, так как $\frac{n\cdot 3}{2}\neq 100$.

4. *Решение*. Предположим, что есть 2 произвольных города A и B, которые не соединены друг с другом. По условию выходит такая картинка. Получается, что в стране $2\cdot 8=16$ городов. Противоречие (рис. 39).

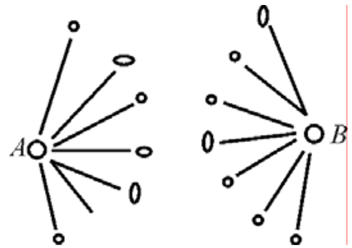


Рис. 39

5. *Решение*. Рассмотрим компоненту связности графа ковролиний, содержащую столицу. Нам нужно доказать, что она содержит также и дальний. Предположим противное. Тогда в этой компоненте

связности из одной вершины выходит 21 ребро, а из всех остальных – по 20 ребер. Таким образом, в этом графе только одна нечетная вершина. Противоречие.

5. *Решение*. Из условия задачи следует, что граф дорог в этой задаче – дерево. У этого дерева есть висячая вершина, удалим ее вместе с ребром, которое из нее выходит. Оставшийся граф также является деревом. Поэтому у него также есть висячая вершина, которую мы удалим вместе с ребром, которое из нее выходит. Проделав эту операцию 100 раз, мы получим граф, состоящий из одной вершины, в котором, конечно, нет ребер. Поскольку мы каждый раз удаляли ровно одно ребро, то изначально у графа было 100 ребер. Итак, в стране 100 дорог.

6. *Решение*. В графе-сетке надо удалить как можно больше ребер так, чтобы он остался связным. Будем убирать ребра до тех пор, пока это возможно. Заметим, что если в графе есть цикл, то возможно удаление любого ребра этого цикла. Связный граф, не имеющий циклов, является деревом. Поэтому только после получения дерева мы не сможем больше убрать ни одного ребра. Подсчитаем число ребер в нашем графе в этот конечный момент. Количество вершин осталось прежним: $51 \cdot 601 = 30651$. Число ребер в дереве на 1 меньше числа вершин, следовательно, в нашем дереве будет 30650 ребер. Сначала же их было $601 \cdot 50 + 600 \cdot 51 = 60650$. Таким образом, можно удалить 30000 ребер, то есть у волейбольной сетки можно перерезать 30000 веревочек, но не более, чтобы она не распалась.

7. *Решение*. Напишем цифры на листке, соединим стрелками те, которые могут следовать друг за другом (рис. 40). Теперь ясно, что первой идет 7, затем 8 и 4. Поскольку 8 уже использовано, то стрелки, идущие в нее, надо убрать. После 4 идет 9, так как к 9-ке другого пути нет. Дальше идет 1 и т. д. Ответ: 784913526.

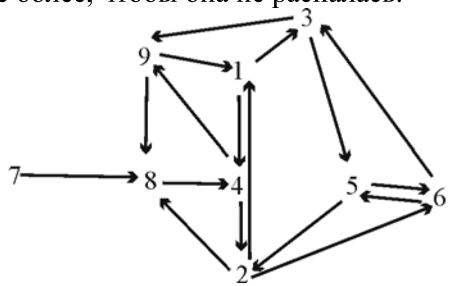


Рис. 40

Занятие 12.

1. *Решение*. Строим граф, вершины которого – люди, а ребра – знакомства между ними (рис. 41). Метод от противного. Предположим, что каждая вершина X соединена с каждой из 16 оставшихся вершин либо ребром, либо через какую-нибудь третью вершину. Так как вершина соединена ребрами ровно с четырьмя вершинами, каждая из которых соединена ребрами ровно с тремя вершинами, то больше в графе никаких вершин нет и все упомянутые 17 вершин различны. При этом все остальные ребра графа, их количество равно $(17 \cdot 4)/2 - 16 = 18$, могут соединять только крайние вершины. Каждое из этих 18 ребер задает цикл, состоящий из 5 ребер и проходящий через вершину X. В силу произвольности выбора вершины X графа через каждую из 16 оставшихся его вершин также проходит ровно по 18 таких циклов. Каждый цикл проходит через 5 его вершин, поэтому общее число циклов равно $(18 \cdot 17)/5$, что невозможно, так как полученная дробь не является целым числом.

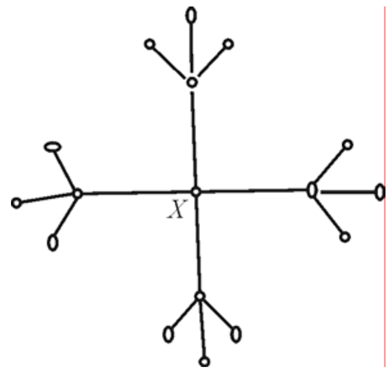


Рис. 41

2. *Решение*. Предположим, что турист вышел на некоторую площадь, отличную от вокзальной, на которой он уже до этого k раз бывал. Тогда общее число его приходов на эту площадь и уходов с нее равно $(2k+1)$, то есть нечетно. Поэтому по некоторой улице, выходящей на эту площадь, он шел нечетное число раз. Если он будет с каждой площади уходить по улице, по которой он шел до этого нечетное число раз, то общее число таких улиц будет все время уменьшаться, пока не станет равным нулю. В этот момент он окажется вновь на привокзальной площади.

3. *Решение*. Рассмотрим граф, вершины которого – станции метро. Граф связный. Если в нем есть циклы (а иначе он – дерево), будем удалять по одному ребру из каждого цикла, при этом связность не нарушится: Удаляем, пока циклы не исчезнут. В результате останется дерево. А в дереве есть висячие вершины. Удаление висячей

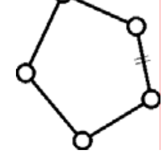


Рис. 42

вершины не влияет на проезд по всем остальным станциям. Тогда, вернувшись к начальному графу, восстановив ребра (удалив висячую вершину вначале), получим, что ко всем станциям можно проехать (рис. 42).

4. *Решение*. Нарисуем для данного пятиугольника граф, состоящий из соответствующих хорд (рис. 43,*а*). Видим, что если фишки ходят только по диагоналям на свободные позиции, то

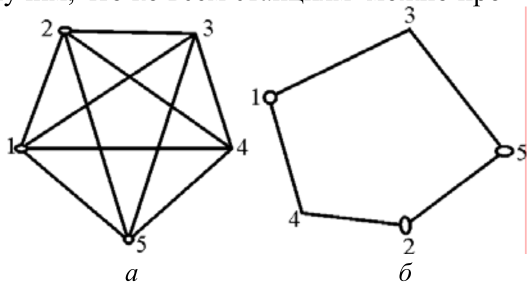


Рис. 43

движемся тогда в строгом порядке (рис. 43,*б*), две фишки поменяться местами не могут.

5. *Решение*. Нарисуем схему – граф возможных полетов: Теперь видно, что долететь от Земли до Марса нельзя (рис. 44).

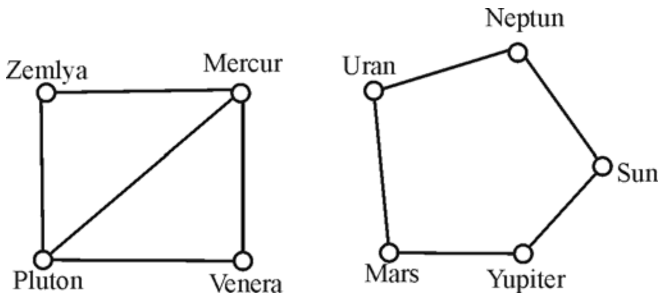


Рис. 44

6. *Решение*. Занумеруем клетки числами, например, сверху вниз и с левого столбика направо. Каждой клетке сопоставим точку на плоскости, и если из одной клетки можно попасть в другую ходом коня, то соединим соответствующие точки линиями. Получаем две диаграммы – графа: исходная и требуемая расстановка коней. Порядок следования коней по окружности не может измениться, поэтому переставить коней требуемым образом невозможно (рис. 45, 46).

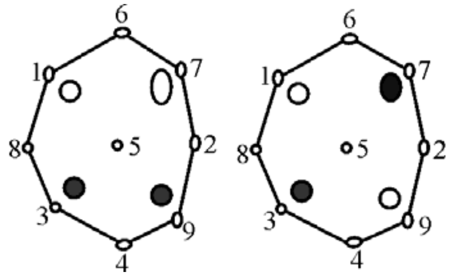


Рис. 45

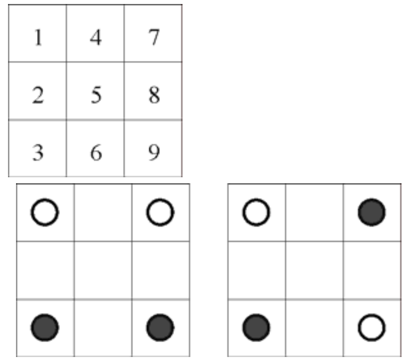


Рис. 46

Занятие 13.

1. *Решение*. Перпендикуляры к сторонам угла, восстановленные в точках *B* и *C*, пересекаются в точке M', диаметрально противоположной точке *M* относительно точки *O*. Из равенства углов падения и отражения следует, что точка M' – точка пересечения биссектрис треугольника *ABC*. С другой стороны, точка *M* лежит на пересечении биссектрис углов BCC' и CBB', поэтому точка *M*, как и точка M', лежит на биссектрисе угла *BAC*. Отсюда следует, что весь диаметр MM' лежит на биссектрисе угла *BAC* (рис. 47).

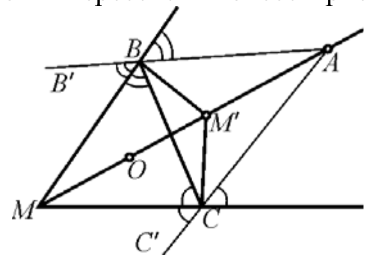


Рис. 47

2. *Решение*. Угол $AO'O''$ – внешний для треугольника AOO', поэтому
$\angle AO'O'' = \angle AOO' + \angle OAO' =$
$= \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle OAB = 90^0 -$
$-\frac{1}{2}\angle OBA = \frac{1}{2}\angle ABC$ внешний к треугольнику *OAB*. Угол MAO'' – внешний для OAO'', поэтому $\angle AO''O' = \angle MAO'' - \angle AOO'' =$
$= \frac{1}{2}\angle MAC - \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\angle ACO$.

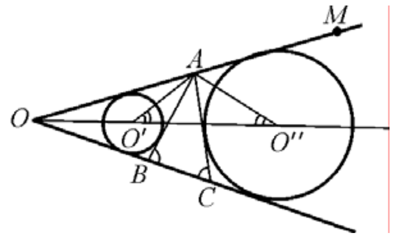


Рис. 48

Таким образом, из равенства $O'A = O''A \Rightarrow \angle AO'O'' = \angle AO''O' \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACO \Rightarrow AB = AC \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta ABC$ – равнобедренный (рис. 48).

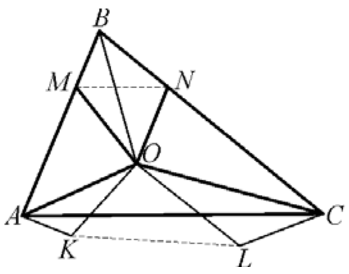


Рис. 49

3. *Решение*. Построим такие точки K и L, лежащие внутри угла AOC, что треугольники AKO и BMO, и треугольники CLO; BNO соответственно равны. Тогда $KO = OM$; $LO = ON$; $\angle KOL = \angle AOC - (\angle MOB + \angle BOD) =$ $= \angle MON \Rightarrow$ $\Delta MNO = \Delta KOL \Rightarrow KL = MN \Rightarrow$ периметр треугольника BMN равен $BM + MN + NB = = AK + KL + LC \geq AC$ (рис. 49).

4. *Решение*. Пусть X – середина BK. Тогда $\angle KMX =$ $= \frac{1}{2}\angle KMB = \angle KAB = \angle KDC$ если $MX \perp KD \Rightarrow MK \perp CD$ если $ON \perp CD$; $ON \parallel KM$. Аналогично, $OM \parallel KN$. Если точки O, K, M, N не лежат на одной прямой, то получаем параллелограмм $OMNK \Rightarrow OM = KN$. В противном случае рассмотрим ортогональные проекции отрезков OM, KN на AC. Поскольку точки O, M, N проектируются соответственно в середины отрезков AC, AK, KC, то проекции обоих параллельных отрезков равны $KC/2$. Следовательно, равны и длины самих отрезков (рис. 50).

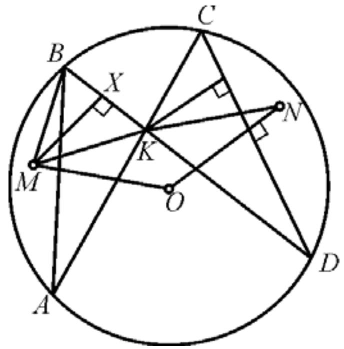


Рис. 50

Занятие 14.

1. *Решение*: $\varphi(x) = \dfrac{x}{x+1} \Rightarrow f(\varphi(x)) = x^2, \quad x \neq -1 \Rightarrow \varphi^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-1},$ $x \neq 1$, если $z = \dfrac{x}{x+1} \Rightarrow \ f(z) = \left(\dfrac{z}{1-z}\right)^2 \ \Leftrightarrow f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2, \quad x \neq 1.$

2. *Решение*: $\varphi(x) = 1/x, \quad \varphi(\varphi(x)) = 1/(1/x) = x \Rightarrow \varphi^{-1}(x) = \varphi(x)$. Заменяя $x \to 1/x$ из исходного уравнения получаем $f(1/x) - 2f(x) = 2^{1/x} \Rightarrow$. В совокупности с исходным уравнением

имеем систему уравнений $\begin{cases} f(x) - 2f(1/x) = 2^x \\ f(1/x) - 2f(x) = 2^{1/x} \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\left(2^x + 2^{\frac{1}{x}+1}\right).$$

3. *Решение*. $\varphi(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $\varphi(\varphi(x)) = \dfrac{x-1}{x}$; $\varphi(\varphi(\varphi(x))) = x$. Заменяя в заданном уравнении $x \to 1/(1-x)$ и во вновь полученном уравнении снова делая ту же самую замену $x \to 1/(1-x)$, получаем систему

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = x, \\ f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) + f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = \dfrac{1}{1-x}, \\ f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + f(x) = \dfrac{x-1}{x}, \end{cases}$$

из трех уравнений относительно трех значений функций $f(x)$, $f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$, $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$, решая которую находим искомую функцию: $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1-x}\right).$

4. *Решение*. Прологарифмируем исходное уравнение и выразим искомую функцию: $(f(n)-1)\lg n = f(n-1)\lg(n-1) \Rightarrow f(n) =$ $= 1 + \dfrac{\lg(n-1)}{\lg n} \cdot f(n-1)$. Полагая в последнем равенстве значения n последовательно равными 2, 3, 4, …, получим: $f(2) = 1$, $f(3) =$ $= 1 + \dfrac{\lg 2}{\lg 3} = \dfrac{\lg(3!)}{\lg 3}, \quad f(4) = 1 + \dfrac{\lg 3}{\lg 4} \cdot \dfrac{\lg(3!)}{\lg 3} = \dfrac{\lg(4!)}{\lg 4}$. Применяя метод математической индукции нетрудно показать, что $f(n) = \dfrac{\lg(n!)}{\lg n}$.

5. *Решение*. Полагая $x = 1 \Rightarrow f(y) = y^k \cdot f(1), \quad f(1) = \text{const} = c \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=c\cdot x^k$.

6. *Решение*. Подставляя $x=0$ и заменяя y на $(-y)$ получаем систему из двух уравнений, которую можно решить: $\begin{cases} f(y)-2f(-y)+f(0)-2f(y)=y-2 \\ f(-y)-2f(y)+f(0)-2f(-y)=-y-2 \end{cases} \Rightarrow$

если $x=y=0 \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow \quad f(y)=y+\frac{1}{3}\left(f(0)+2\right)\Rightarrow f(y)=y+1$.

7. *Решение*: $x=e^z \Rightarrow f\left(e^{z\cdot y}\right)=y\cdot f\left(e^z\right)$ для $z=1 \Rightarrow f\left(e^y\right)=$ $=y\cdot f(e)=c\cdot y \Rightarrow \; x=e^y \Rightarrow y=\ln x \Rightarrow f(x)=c\ln x$.

8. *Решение*. Заменим x на $(x+y)$, а y на 0:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x+y)+f(0)}{2}=\frac{f(x)+f(y)}{2}\Rightarrow f(x+y)=f(x)+$$

$+f(y)-c.$ Если $\varphi(x)=f(x)-c \Rightarrow \varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$. Это есть уравнение Коши, оно имеет решение вида $\varphi(x)=ax \Rightarrow f(x)=ax+c$.

9. *Решение*: $m=0,\;\; n=0 \Rightarrow f(0+f(0))=f(f(0))+f(0)\Rightarrow$ $\Rightarrow f(f(0))=f(f(0))+f(0)\Rightarrow f(0)=0;\;\; n=0\Rightarrow f(m+f(0))=$ $=f(f(m))+f(0)\Rightarrow f(m)=f(f(m))\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(m)=m \;\text{ или} \\ f(m)=0. \end{array}\right.$

10. *Решение*. Подставляя вместо x величину $(1-x)$ в исходное уравнение и рассматривая теперь систему из двух уравнений, можем найти вид функции:

$$\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=x^2 \\ 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right).$$

Занятие 15.

1. *Решение*. Строгая монотонность функции $30+x+\sqrt[5]{x}=$ $=32\Rightarrow x+\sqrt[5]{x}=2\Rightarrow$ если $x<1 \Rightarrow x+\sqrt[5]{x}<2;$ если $x>1\Rightarrow x+$ $+\sqrt[5]{x}>2\Rightarrow x=1$.

2. *Решение*. Если $0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\sin x<x$. Поскольку косинус является убывающей функцией на данном промежутке, то $\cos x<\cos(\sin x)$. Поскольку синус является возрастающей функци-

ей там же, то для $t=\cos x\in[0,1]\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \sin t<t\Rightarrow \sin(\cos x)<$ $<\cos x<\cos(\sin x)$.

3. *Решение*: $f(x+2\cdot k)=\dfrac{1+f(x+k)}{1-f(x+k)}=\left(1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right):$ $:\left(1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)=-\dfrac{1}{f(x)}\Rightarrow f(x+4\cdot k)=-\dfrac{1}{f(x+2k)}=f(x)\Rightarrow T=4k.$

4. *Решение*. Пусть $T-$ искомый период, тогда $\operatorname{tg}(\sin x)=$ $=\operatorname{tg}(\sin(x+T)\Rightarrow(*)\qquad \sin(x+T)=k\pi+\sin x\Rightarrow 2\sin\dfrac{T}{2}\cos\left(\dfrac{x+T}{2}\right)=$ $=\pi k$. Поскольку это равенство верно для любого x, возьмем $x=0$: $\sin T=\pi k\Rightarrow\left[k=0\Rightarrow \sin T=0\Rightarrow T=n\pi,\;\; n=1\right.$ или $n=2$. Проверкой убеждаемся, что подходит только последнее значение, или из соотношения (*) при $k=0$ следует, что $\sin x=\sin(x+T)\Rightarrow T=2\pi$.

Занятие 16.

1. *Решение*. Достаточно доказать, что каждый столбец можно сделать нулевым. Действительно, вычитание 1 из всех чисел одного столбца не влияет на другие столбцы, а удвоение чисел одной строки не влияет на нулевые столбцы и оставляет натуральными числа в остальных столбцах. Пусть есть некоторый столбец из натуральных чисел. Будем вычитать по 1 из всех его чисел, пока не появятся единицы. При этом сумма чисел столбца уменьшится. Если не все числа столбца равны 1, то удвоим те строки, в пересечении которых с нашим столбцом стоят 1, а затем вычтем из всех чисел столбца по 1. Эта операция, очевидно, равносильна вычитанию 1 из всех чисел столбца, больших 1. Проделав ее несколько раз, получим столбец, состоящий из одних 1. Вычитая из чисел этого столбца 1, получим столбец из одних нулей. Далее можно операцию повторить для всех остальных столбцов.

2. *Решение*. Выберем произвольно $(3n-2)$ участника анкеты и разобьем их на $(3n-2)$ группы по одному человеку в каждой. Оставшихся будем последовательно помещать каждого в группу, все люди которой имеют с ним различные вкусы. Такая группа всегда существует, так как у каждого человека общий любимый композитор с $(n-1)$ человеком, художник – с $(n-1)$ человеком и писа-

тель – с $(n-1)$ человеком, то есть общие хоть в чем-то вкусы не более, чем с $3(n-1)=3n-3$ людьми, а групп $(3n-2)$. Следовательно, всегда существует группа, в которой нет людей, вкусы которых пересекаются со вкусами этого человека, и куда его можно поместить, не нарушая требований условия задачи. Таким образом, мы можем разместить всех участников по $(3n-2)$ группам в соответствии с требованиями задачи.

3. *Решение*: а) если все прямые параллельны друг другу, то они делят плоскость на $(n+1)$ областей. При этом все области не могут быть окрашены, тем самым число окрашенных областей не превосходит n. Утверждение верно, так как $\frac{n^2+n}{3}=n\cdot\frac{n+1}{3}\geq n\cdot\frac{2+1}{3}=n$;

б) пусть теперь не все прямые параллельны друг другу. Граница каждой области состоит из нескольких отрезков и лучей, принадлежащих разным прямым. Эти отрезки и лучи назовем сторонами области. Каждая область имеет не менее двух сторон. Через m_2 обозначим число окрашенных областей, имеющих две стороны, через m_3 обозначим число окрашенных областей, имеющих три стороны, и так далее. Наконец, через m_k обозначим число окрашенных областей, имеющих максимальное число сторон. Покажем, что $m_k \leq n$. Граница любой области с двумя сторонами состоит из двух лучей, причем каждый луч может лежать на границе только одной из окрашенных областей. Число всех таких областей не превосходит $2n$, не более двух на каждой прямой. Следовательно, общее число сторон окрашенных областей с двумя сторонами не превосходит $2n$ или $m_2 \leq n$. Каждая из n прямых разбивается остальными не более, чем на n частей, отрезков или лучей. Поэтому общее число всех частей не превосходит n^2. Каждая из частей является стороной не более одной из окрашенных областей. Следовательно, общее число сторон таких областей не превосходит $n^2 \Rightarrow 2m_2+3m_3+\ldots+km_k \leq n^2$. Число окрашенных областей равно $m_2+m_3+\ldots+m_k$. Используя доказанные выше неравенства, находим, что

$$m_2+m_3+\ldots+m_k \leq \frac{m_2}{3}+\frac{2m_2+3m_3+\ldots+km_k}{3} \leq \frac{n}{3}+\frac{n^2}{3}=\frac{n+n^2}{3}.$$

4. *Решение*. Утверждение задачи следует из двух замечаний.

1. Если внутренний узел квадрата переходит в граничный узел прямоугольника, то его четыре соседа (по горизонтали и вертикали) также переходят в граничные узлы прямоугольника, причем на той же стороне (исходный узел не мог перейти в угол). Это сразу следует из того, что взятый узел и его соседи – это центр и вершины квадрата со стороной $\sqrt{2}$ и площадью 2.

2. Если $a \neq b$, то у квадрата внутренних узлов больше, чем у прямоугольника. Действительно, у квадрата их $(n-2)^2$, у прямоугольника $(a-2)(b-2) \Rightarrow (n-2)^2-(a-2)(b-2)=2(a+b-2n)$, $a+b>2n$, так как при постоянном произведении $ab=n^2$ сумма минимальна, когда сомножители равны. Итак, если $a \neq b$, то существует внутренний узел квадрата, которому соответствует граничный узел прямоугольника, а тогда, применяя много раз случай 1), получим, что все узлы квадрата перешли в узлы одной стороны прямоугольника, что невозможно. Поэтому, $a=b$.

5. *Решение*. Легко проверить, что множество $\{1,2,3,5,10,20,25,50,100\}$ из 9 элементов удовлетворяет условию задачи. Покажем, что меньшим числом элементов обойтись нельзя. Расположим элементы произвольного множества, удовлетворяющего условиям задачи, в монотонном порядке: $1=a_1<a_2<\ldots<a_n=100$. По условию при любом $k>1$ справедливо равенство $a_k=a_p+a_q$; $p,q<k \Rightarrow$ $\Rightarrow a_k \leq 2a_{k-1}$. Но для всех значений k равенства $a_k=2a_{k-1}$ не могут быть выполнены, так как 100 не является степенью двойки. Таким образом, хотя бы для одного $k \leq n$ выполнены неравенства $a_k \leq a_{k-1}+a_{k-2} \leq 3a_{k-2}$. Теперь запишем $100=a_n \leq 2a_{n-1} \leq 2^2\cdot a_{n-2} \leq \ldots$ $\leq 2^{n-k}\cdot a_k \leq 3\cdot 2^{n-k}\cdot a_{k-2} \leq 3\cdot 2^{n-k+1}\cdot a_{k-3} \leq ..$ $\leq 3\cdot 2^{n-3}\cdot a_1 \Rightarrow$ $2^{n-3} \geq$ $\geq \frac{100}{3}$ $(2^6=64) \Rightarrow n-3 \geq 6 \Rightarrow n \geq 9$. Существует много других примеров нужных множеств. Таковыми являются, например, множества $\{1,2,4,6,10,20,30,50,100\}$; $\{1,2,4,8,16,32,64,100\}$.

Занятие 17.

1. *Решение*. Можно рассмотреть две концентрические окружности S_2, S_3 с центром в точке P и радиусами 2 и 3 соответственно. Точка A будет лежать на S_3, и ее положение можно, без ограничения общности, зафиксировать. Точка B будет лежать на окружности S_2, ее положение можно сделать переменным, т. е. заставить точку B «обежать» окружность S_2. Можно доказать, например, при помощи векторов, что при обегании точкой B окружности S_2 точка C будет перемещаться по окружности радиусом 2 с центром в фиксированной точке O, удаленной от точки P на расстояние 3. Из этого факта будет следовать оценка $PC \le 5$ (рис. 51, 52).

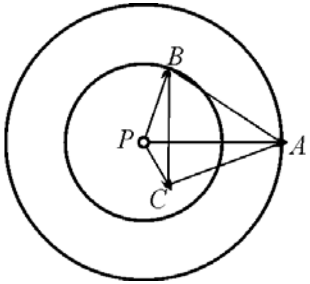


Рис. 51

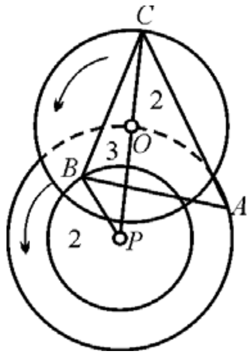


Рис. 52

2. *Решение*. Покажем, что это число равно 5. На 5 тетраэдров куб разбить легко. Можно, например, отсечь от куба $ABCDA'B'C'D'$ четыре угловых тетраэдра $A'AB'D'$, $C'CB'D'$, $BB'AC$, $DD'AC$. Труднее показать, что куб нельзя разбить на меньшее число тетраэдров. Пусть куб разбит на тетраэдры. Тогда имеется по крайней мере два из них, основания которых должны лежать на основании $ABCD$ куба, так как грань куба – квадрат и не может быть целиком гранью одного тетраэдра. Аналогично имеются, по крайней мере, два тетраэдра, основания которых лежат на верхней грани куба. Эти тетраэдры отличны от первых двух, так как тетраэдр не может иметь двух параллельных граней. Сумма объемов этих тетраэдров не превосходит $\frac{2}{3}a^3$, следовательно, они не могут заполнять весь куб. Таким образом, наименьшее число тетраэдров равно 5.

3. *Решение*. Пусть x – длина искомого отрезка, a – длина основания треугольника. В силу того, что отрезки касательных равны, периметр маленького треугольника, отсекаемого касательной, равен

$2(p-a)$, и в силу подобия треугольников получаем $\frac{x}{a} = \frac{p-a}{p} \Rightarrow \quad x = \frac{a(p-a)}{p}$. Величина a может принимать все значения между 0 и p, максимум этого квадратного трехчлена достигается при $a = p/2$, величина отрезка при этом равна $p/4$ (рис. 53).

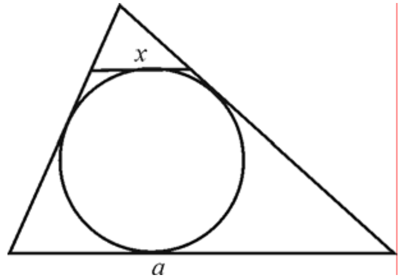


Рис. 53

4. *Решение*. Допустим, что прямоугольник, изображенный на рис. 54, удовлетворяет условию задачи, т. е. $S_1 \ge 1$, $S_2 \ge 1$, $S_3 \ge 2$, $S_4 \ge 1$. В силу того, что $S_1 \cdot S_4 = = S_2 \cdot S_3 \ge 2 \Rightarrow S_1 + S_4 \ge 2\sqrt{S_1 \cdot S_4} \ge \ge 2\sqrt{2} \Rightarrow \quad S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \ge 1 + 2 + +2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$. Поэтому длины незаданных сторон прямоугольника не меньше, чем $3 + 2\sqrt{2}$. С другой стороны, прямоугольник со сторонами 1 и $3 + 2\sqrt{2}$ удовлетворяет условию задачи, так как обладает необходимым для этого разбиением на прямоугольники. Для этого прямоугольник, площадь которого равна S_1, надо взять со сторонами $a = 2 - \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2} + 1$. Тогда размеры остальных сторон прямоугольника однозначно определяются. Имеем $S_1 = S_4 = \sqrt{2}$; $S_2 = 1$; $S_3 = 2$. Следовательно, искомая длина равна $3 + 2\sqrt{2}$.

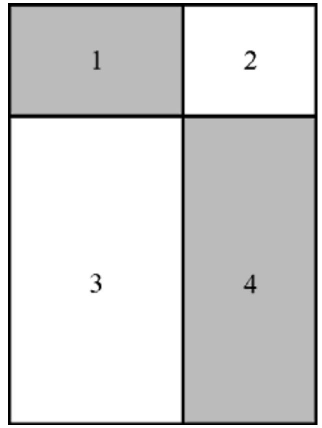


Рис. 54

Занятие 18.

1. *Решение*. По теореме синусов в треугольнике AMB $\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R$, где R – радиус круга, описанного около треугольника AMB (рис. 55). Поскольку отрезок AB задан, то требование того, чтобы угол был наибольшим, сводится к требованию того, чтобы радиус был наименьшим. Центр описанной окружности, точка O лежит на перпен-

дикуляре к середине отрезка *AB*, этот перпендикуляр параллелен заданным прямым. Радиус равен отрезку *OM*, он будет наименьшим, если *OM* перпендикулярен третьей прямой, причем $OM = OB = OA$. Тогда получаем

$$R = H - \frac{h}{2} \Rightarrow \sin\alpha =$$

$$= \frac{AB}{2R} = \frac{h}{2H - h}.$$

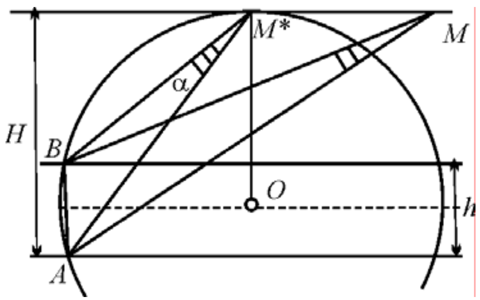


Рис. 55

2. *Решение*. Пусть $KLMN$ – указанный прямоугольник (рис. 56). Положим $OA = OB = R$; $\angle AOK = \varphi \Rightarrow KL = MN = R\sin\varphi$; $OL =$
$= R\cos\varphi \Rightarrow OM = MN\operatorname{ctg}\alpha = R\sin\varphi\operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow$
$ML = NK = OL - OM = R(\cos\varphi - \sin\varphi\cdot\operatorname{ctg}\alpha) \Rightarrow$
$S_{KLMN} = R^2\sin\varphi\cdot(\cos\varphi - \sin\varphi\cdot\operatorname{ctg}\alpha) = R^2\cdot A$.

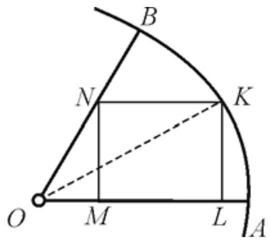


Рис. 56

Здесь исследованию подлежит выражение *A*.

Преобразуем его: $A = \sin\varphi\cdot\dfrac{\cos\varphi\cdot\sin\alpha - \sin\varphi\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$= \dfrac{\sin\varphi\cdot\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha} = \dfrac{\cos(\alpha - 2\varphi) - \cos\alpha}{2\sin\alpha}$. Выражение принимает наибольшее значение, когда $\cos(\alpha - 2\varphi)$ наибольший. Поскольку $-\dfrac{\pi}{2} <$

$< -\varphi < \alpha - 2\varphi < \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\alpha - 2\varphi)$ максимальный, когда $\alpha - 2\varphi =$

$= 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\alpha}{2}$.

3. *Решение*. Пусть *M* – произвольная точка окружности. По теореме синусов для треугольника *OMB*: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{a}{R}\sin\beta$, $\sin\beta \le 1$. Поэтому $\sin\alpha \le 1$, равенство достигается, когда $\sin\beta = 1 \Leftrightarrow$ $\beta = \beta^* = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{a}{R}$. При этом получаем две точки *M* такие, что

хорда, их соединяющая, перпендикулярна *OB* (рис. 57).

4. *Решение*. Имеется 2 решения.

1 решение. Метод площадей:

$$S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = S_{ABC}; \quad AB = \frac{h}{\sin\varphi};$$

$$BC = \frac{h}{\cos\varphi}; \qquad AC = \frac{h}{\sin\varphi\cdot\cos\varphi} \Rightarrow$$

$$\frac{rh}{\sin\varphi} + \frac{rh}{\cos\varphi} + \frac{rh}{\sin\varphi\cdot\cos\varphi} =$$

$$= \frac{h^2}{\sin\varphi\cdot\cos\varphi} \Rightarrow r = \frac{h}{1 + \sin\varphi + \cos\varphi} =$$

$$= \frac{h}{1 + \sqrt{2}\sin(\varphi + \pi/4)}.$$

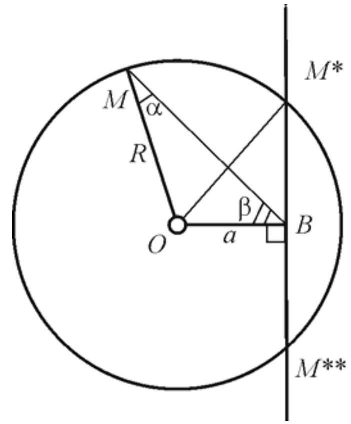


Рис. 57

Последняя дробь принимает наименьшее значение, когда $\sin(\varphi + \pi/4) = 1 \Rightarrow \varphi = \pi/4$.

2 решение. Четырехугольник *BKOF* – квадрат, поэтому $BO = r\sqrt{2}$. Ломаная *BOE* состоит из двух звеньев: *BO* и *OE*, ее длина равна $r\sqrt{2} + r = r(\sqrt{2} + 1) \Rightarrow BG \le BO$; $GD = OE \Rightarrow BD \le BO +$ $+OE \Rightarrow h \le r(\sqrt{2} + 1) \Leftrightarrow r \ge \dfrac{h}{\sqrt{2} + 1}$. Минимальным значение будет, когда высота *BD* совпадает с биссектрисой *BO*, при этом $\varphi = \pi/4$ (рис. 58).

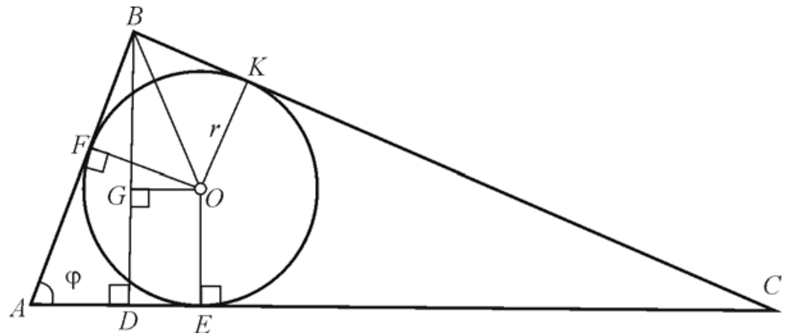


Рис. 58

Занятие 19.

1. *Решение*. Предположим, что последние трехчлены не имеют корней. Тогда их дискриминанты отрицательны: $(p-2)^2-4=$ $=p^2-4p<0$ и $q^2-4q<0$. Сложив эти неравенства, получаем: $p^2+q^2-4p-4q<0$. С другой стороны, дискриминанты первых заданных многочленов должны быть неотрицательны, то есть $p^2-4q\ge 0\ \&\ q^2-4p\ge 0 \Rightarrow p^2+q^2-4p-4q\ge 0$. Получаем противоречие.

2. *Решение*. Тройка чисел (3; 4; 5) является решением системы

$$\begin{cases} x-y+1=0, \\ y-z+1=0, \\ z-2x+1=0. \end{cases}$$

Если бы многочлены P, Q, R существовали, то при подстановке указанных значений переменных в данное тождество мы бы получили неверное равенство: $0=1$.

3. *Решение*. Так как уравнение $f(x)=x$ не имеет корней, это означает, что график функции $y=f(x)$, парабола, лежит либо выше, либо ниже прямой $y=x$. Покажем, что в этом случае график функции $y=f(f(x))$ также лежит либо выше, либо ниже прямой $y=x$. Пусть $f(x)>x$ при любом x. Подставляя в это неравенство вместо x величину $f(x)$, получаем $f(f(x)>f(x)>x\Rightarrow f(f(x))>x$. Это означает, что график функции $y=f(f(x))$ лежит выше прямой $y=x$. Аналогично можно показать второе неравенство.

4. *Решение*. Подставив в данное равенство $x=1/2$, получим $-\left(\frac{1}{2}a+b\right)^{20}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}p+q\right)^{10}\ge 0\Rightarrow \frac{1}{2}a+b=0.$ Равенство теперь можно переписать в виде: $\left(x^2+px+q\right)^{10}=(2x-1)^{20}-(2bx-b)^{20}=$ $=(2x-1)^{20}\left(1-b^{20}\right)$. Приравнивая в получившемся равенстве коэффициенты при x^{20}, найдем $1=\left(1-b^{20}\right)\cdot 2^{20}\Rightarrow b=\pm\sqrt[20]{2^{20}-1}$. Теперь равенство принимает вид:

$\left(x^2+px+q\right)^{10}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^{20}\Rightarrow x^2+px+q=\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}=x^2-x+\frac{1}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow p=-1;\ q=0\Rightarrow \left[a=\pm\sqrt[20]{2^{20}-1};\ b=\mp\sqrt[20]{2^{20}-1};\ p=-1;\ q=0\right.$.

5. *Решение*. Индукцией по n докажем, что для любого n сумма $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ представима в виде $\frac{1}{2}b_n(b_n+1)$, $b_n\in Z$. База индукции: $a_1^3=a_1^2\Rightarrow S_1=a_1=0=\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1$ или $S_1=a_1=1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$. Индуктивный переход:

$S_{n+1}^2=\left(a_1+...+a_n+a_{n+1}\right)^2=\left(S_n+a_{n+1}\right)^2=S_n^2+\left(2S_n\cdot a_{n+1}+a_{n+1}^2\right)$ и

$S_{n+1}=a_1^3+...+a_n^3+a_{n+1}^3=\left(a_1+...+a_n\right)^2+a_{n+1}^3=S_n^2+a_{n+1}^3\Rightarrow 2S_n\cdot a_{n+1}+$ $+a_{n+1}^2=a_{n+1}^3\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} a_{n+1}=0\Rightarrow S_{n+1}=S_n=\dfrac{b_n(b_n+1)}{2}, \\ 2S_n+a_{n+1}=a_{n+1}^2\Rightarrow b_n(b_n+1)+a_{n+1}-a_{n+1}^2=0\Rightarrow \\ a_{n+1}=b_n+1\ \Rightarrow S_{n+1}=\dfrac{1}{2}(b_n+1)(b_n+2), \\ \text{или}\ \ a_{n+1}=-b_n\Rightarrow S_{n+1}=\dfrac{1}{2}(b_n-1)b_n. \end{array}\right.$$

Ясно теперь, что все члены последовательности – целые числа.

6. *Решение*. Из определения дробной части следует, что $0\le x^3<1\Rightarrow 0\le x<1$. Кроме того, равенство $\{a+b\}=a$ выполняется только когда $b-$ целое число. Поэтому из равенства $\left\{x^3+3x^2+3x+1\right\}=x^3\Rightarrow\left(3x^2+3x\right)\in Z\Leftrightarrow y(x)=\left(3x^2+3x\right)=n.$

Функция $y(x)=3x^2+3x$ возрастает на отрезке $[0;1]$, $y(0)=0;$ $y(1)=b\Rightarrow 0\le n<6\Rightarrow 3x^2+3x-n=0\Rightarrow x=\frac{-3+\sqrt{9+12n}}{6}$, $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$, $x=0$, $n=0$.

7. *Решение*. Пусть x_0 – общий корень. Тогда $f(x_0)=0$ и $f(f(x_0))=0$. Подставив первое равенство во второе, получаем

$f(0)=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow f(x)=x^2+ax \Rightarrow \quad f(f(x))=0 \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$.

Тогда условие выполняется, если либо $a=0$, либо $a\neq 0$ и $f(x)=-a$ не имеет корней. Получаем, что в первом случае $a=0$, во втором – $0<a<4$. Ответ: $b=0;\ 0\le a<4$.

Занятие 20.

1. *Решение*. Умножим обе части уравнения на $2=(x+1)-(x-1)$, получаем $(x+1)^{64}-(x-1)^{64}=0 \Leftrightarrow |x+1|=|x-1| \Rightarrow x=0$.

2. *Решение*. Заметим, что $f(x)=(x+6)^2-6 \Rightarrow f(f(x))=$ $=(x+6)^4-6$ $\quad f(f(f(x)))=(x+6)^8-6 \Rightarrow \quad f(f(f(f(f(x)))))=$ $=(x+6)^{32}-6=0 \Rightarrow x=-6\pm\sqrt[32]{6}$.

3. *Решение*. Если $x=\sqrt[3]{2}-1 \Rightarrow (x+1)^3=2 \Rightarrow \quad x^3+3x^2+3x-1=0$. Используя последнее равенство, свернем выражение для функции

$$f(x)=\left(x^{1999}+3x^{1998}+3x^{1997}-x^{1996}\right)+x^{1997}+3x^{1996}+4x^{1995}+2x^{1994}+\ldots$$

$$+1=x^{1996}\left(x^3+3x^2+3x-1\right)+x^{1995}+3x^{1994}+4x^{1995}+\ldots+1=$$

$$=x^{1994}\left(x^3+3x^2+3x-1\right)+x^{1995}+3x^{1994}+\ldots+1=x^3+3x^2+3x-1+2=2.$$

4. *Решение*. Поскольку нулевым решение быть не может, пусть x будет одним из корней уравнения, тогда другой будет $1/x$. Получаем систему уравнений, которая может быть решена следующим образом:

$$\begin{cases} 5x^6-16x^4-33x^3-40x^2+8=0 \\ 5\cdot\dfrac{1}{x^6}-16\cdot\dfrac{1}{x^4}-33\cdot\dfrac{1}{x^3}-40\cdot\dfrac{1}{x^2}+8=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5x^6-16x^4-33x^3-40x^2+8=0 \\ 8x^6-40x^4-33x^3-16x^2+5=0 \end{cases} \Rightarrow$$

Вычтем из первого уравнения второе $3x^6-24x^4+24x^2-3=0$ и поделим на x^3, получим: $t=x-\dfrac{1}{x} \Rightarrow t(t^2-5)=0 \Rightarrow t_1=0;\ t_{2,3}=\pm\sqrt{5} \Rightarrow$

Вычисляя значения x и делая проверку, получаем ответ: $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

5. *Решение*:

$$\cos\frac{x}{2007}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2007}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}=P\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2007}\right)\right)=$$

$$=\sin\left(2007\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2007}\right)\right)=\sin\left(\frac{2008-1}{2}\pi-x\right)=$$

$$=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x \Rightarrow x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k,\quad k\in Z.$$

6. *Решение*. В левой части уравнения 2011 слагаемых, среднее из них равно $(x+1005)^5$. После замены переменной $t=x+1005$ уравнение примет вид: $(t-1005)^5+\ldots+(t-1)^5+t^5+(t+1)^5+$ $\ldots+(t+1005)^5=0$. Сумма равноудаленных от среднего слагаемого t^5 слагаемых равна $f_k(t)=(t-k)^5+(t+k)^5$, $k=1,2,\ldots,1005$. Ясно, что $f_k(t)>0$ $t>0$ и $f_k(t)<0$ для $t<0$ и $f_k(t)=0$ если $t=0$. Значит единственный корень уравнения $t=0 \Rightarrow x=-1005$.

Занятие 21.

1. *Доказательство*. Дважды применим неравенство (2): $a^4+b^4+c^4 \ge a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \ge a^2bc+ab^2c+abc^2=abc(a+b+c)$.

2. *Доказательство*. Используя несколько раз неравенство $\dfrac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz}$, получаем:

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\left(ab+bc+ac+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\right)}{abc} \ge$$

$$\ge \frac{\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\cdot\left(3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^4b^4c^4}}\right)}{abc}=3(1+\sqrt{3}).$$

3. *Доказательство*. Докажем равносильное неравенство: $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n \ge 1+\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^n$. Из тождеств (бином Ньютона) $(1\pm x)^n=$ $=1\pm nx+a_2x^2\pm a_3x^3+\ldots,a_i\ge 0,$ если $x=\dfrac{1}{2n}$ следует, что $(1+x)^n-$

$-(1-x)^n - 2nx = 2a_3x^3 + 2a_5x^5 + ... \ge 0 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \ge 1 + \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$.

4. *Доказательство*. Поскольку выражение $S = a^3 + b^3 + c^3 + +3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ac(a+c)$ симметрично относительно всех переменных, без ограничения общности можно считать, что $a \ge b \ge c > 0$. Так как $\left(a^3 + b^3 - ab(a+b)\right) = (a+b)(a-b)^2$ & $c^3 + +3abc - bc(b+c) - ac(a+c) = c(a-c)(b-c) - c(a-b)^2$, то исходное выражение равно $S = (a+b)(a-b)^2 + c(a-c)(b-c) - c(a-b)^2 = = (a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \ge 0$.

5. *Доказательство*. Приводим выражение к общему знаменателю и преобразовываем: $4\left(a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c\right) \ge$ $\ge 3\left(2abc + a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c\right) \Leftrightarrow$ $b(a-c)^2 + a(b-c)^2 + +c(b-a)^2 \ge 0$.

6. *Доказательство*:

$P(x^2+y^2) - P(2xy) = \left(x^2+y^2\right)^2 - 4(x^2+y^2) - 4x^2y^2 + 8xy =$

$= \left(x^2-y^2\right)^2 - 4(x-y)^2 = (x-y)^2\left((x+y)^2 - 4\right) \ge 0$ для $(x+y) \ge 2$.

7. *Доказательство*. Пусть $a = \frac{1+xy}{1+x^2}$, $b = \frac{1+xy}{1+y^2}$. Тогда исходное неравенство равносильно следующему: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \le 2$. Его справедливость следует из того, что $a + b \le 2$. Действительно, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \le \ \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{a+b} \le 2$.

8. *Решение*. Не существует. От противного, пусть такая функция существует. Положив $x = y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |f(\pi) + 2| < 2 \Rightarrow f(\pi) < 0$. В то же время, если взять $x = \frac{3}{2}\pi$, $y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |f(\pi) - 2| < 2 \Rightarrow f(\pi) > 0$. Получаем противоречие.

Занятие 22.

1. *Решение*. Замена переменных позволяет заметить следующее: $x = \frac{1}{3} + a$; $y = \frac{1}{3} + b$; $z = \frac{1}{3} + c \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot \frac{1}{9} + +\frac{2}{3}(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}$.

2. *Решение*. Замена переменных $x = a+b$; $y = b+c$; $z = a+c \Rightarrow$

$S = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 3\right) \ge \frac{1}{2}(6-3) = \frac{3}{2}$.

3. *Доказательство*: 2 способа: а) Если положить замену $x = -\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \Rightarrow \left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2 \le$

$\le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \Leftrightarrow \left(xa_1 + b_1\right)^2 + ... + \left(xa_n + b_n\right)^2 \ge 0$.

б) Введем векторы $\overline{a} = \{a_1, ... a_n\}$ и $\overline{b} = \{b_1, ... b_n\} \Rightarrow \forall t \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\overline{a} - t\overline{b}, \overline{a} - t\overline{b}\right) = \left|\overline{a} - t\overline{b}\right|^2 \ge 0 \Rightarrow \left(\overline{a} - t\overline{b}, \overline{a} - t\overline{b}\right) = \left(\overline{a}, \overline{a}\right) - 2t\left(\overline{a}, \overline{b}\right) +$

$+t^2\left(\overline{b}, \overline{b}\right) \ge 0 \Leftrightarrow D = \left(\overline{a}, \overline{b}\right)^2 - \left(\overline{a}, \overline{a}\right)\left(\overline{b}, \overline{b}\right) \le 0 \Rightarrow \left(\overline{a}, \overline{b}\right) \le \left(\overline{a}, \overline{a}\right)\left(\overline{b}, \overline{b}\right)$.

Это и есть требуемое неравенство.

4. *Доказательство*: $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a, b > 0$

$\Leftrightarrow a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \ge \ \ge \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\sqrt{a}\sqrt{b} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \ge 0.$

5. *Доказательство*. Замена переменных: $x = b + c - a$; $y = c + a - b$; $z = a + b - c \Rightarrow a = \frac{x+z}{2}$; $b = \frac{x+z}{2}$; $c = \frac{x+y}{2} \Rightarrow$

$S = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \ge \frac{1}{2}(2+2+2) = 3$.

6. *Доказательство*: $\exists\ x, y, z \ \vdots\ 0 \le x, y, z \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \sin^2 x$, $b = \sin^2 y$, $c = \sin^2 z$; так как $\sqrt{\cos^2\alpha} = \cos\alpha > 0$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-a)(1-c)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} \le 1 + \sqrt{abc} \Leftrightarrow$

$\sin x \cdot \cos y \cdot \cos z + \sin y \cdot \cos x \cdot \cos z + \sin z \cdot \cos x \cdot \cos y < 1 + +\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ Докажем последнее неравенство. Так как

$\sin(x+y+z) \le 1 \Rightarrow \sin\left((x+y)+z\right) = \sin z\cos(x+y) + \cos z\sin(x+y) =$.

$= \sin z(\cos x\cos y - \sin x\sin y) + \cos z(\sin x\cos y + \sin y\cos x) \le 1$.

Переноса слагаемое со знаком минус вправо, получаем требуемое неравенство.

7. *Доказательство*. Заметим, что $4x^3-3x+1=(x+1)(2x-1)^2\ge 0,\quad \forall x\ge -1$. Выпишем такие выражения для каждого значения переменной и сложим их, используя условие, что сумма кубов равна нулю: $-3\sum_{i=1}^{n} x_i + n \ge 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \le \frac{n}{3}$.

8. *Доказательство*. По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right)\ge\sqrt{\frac{bc}{a}\cdot\frac{ac}{b}}=c,\ \frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\ge a,\ \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\right)\ge b.$$

Сложив эти три неравенства, получаем требуемый результат.

Занятие 23.

1. *Доказательство*. Поскольку $2011=6\cdot 335+1$, требуемое утверждение будет доказано, если мы докажем утверждение задачи для квадратов размером $(6n+1)\times(6n+1)$ индукцией по $n\in N$. Сначала докажем, что утверждение справедливо при $n=1$ для квадрата 7×7. Действительно, из соображений симметрии следует, что достаточно рассмотреть только случаи, когда вырезанная клетка лежит в одном из квадратов 2×2, закрашенных на рис. 59–61, где показано, как разрезать оставшуюся часть.

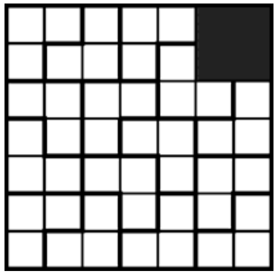


Рис. 59

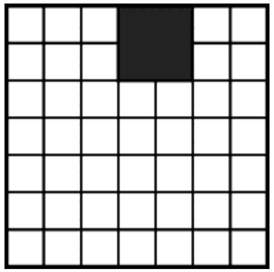


Рис. 60

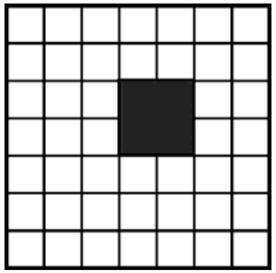


Рис. 61

Пусть утверждение доказано для некоторого значения $k\in N$. Докажем его для квадрата размером $(6k+7)\times(6k+7)$. Для этого в одном из углов данного квадрата поместим квадрат размером $(6k+1)\times(6k+1)$, покрывающий вырезанную клетку и удовлетво-

ряющий предположению индукции, оставшуюся же часть разрежем на прямоугольники размером 2×3, а затем и на уголки.

2. *Решение*. Пусть числа k^m+1 и k^n+1, $m<n$, удовлетворяют условию задачи. Тогда они имеют одинаковое число цифр, следовательно, $k\ne 10$ и справедливо неравенство: $10\left(k^m+1\right)>k^n+1$. Случай $2m<n$ невозможен, так как тогда $n\ge 2m+1\Rightarrow k^n+1\ge$ $\ge k^{2m+1}>k^{2m+1}>k^{2m}+k^m=k^m\left(k^m+1\right)$. Поэтому $k^m<10\Rightarrow k^n+1=$ $=k^m+1$, что противоречит неравенству $m<n$. Поэтому $2m\ge n\Rightarrow$ $\Rightarrow m\ge n-m\Rightarrow k^{nn}+1>\left(k^{n-m}-1\right)\left(k^m+1\right)\Rightarrow k^{n-m}-1<10$ и $k^{n-m}<9$ так как $k^{n-m}\ne 10$. Так как число $\left(k^n+1\right)-\left(k^m+1\right)\vdots 9$; т. е. кратно 9, поскольку суммы цифр этих чисел равны, то $k^m\vdots 3$, поскольку $k^{n-m}-1<9$. В случае $k\ge 6\Rightarrow n-m=1$ и k^m+1 – число, имеющее столько же цифр, сколько и число $(k-1)\left(k^m+1\right)$, меньшее числа k^n+1, начинается с цифры 1, а, значит, число k^n+1 этой цифрой кончается, что невозможно, так как $k<10$. Остается единственная возможность: $k=3\Leftrightarrow m=3,\ \ n=4$.

3. *Доказательство*. При $n=3$ утверждение справедливо. Действительно, всего имеется четыре натуральных числа, не превосходящих $3!=6\Rightarrow 3=2+1;\ \ 4=3+1;\ \ 5=3+2;\ \ 6=3+2+1$ и все они представимы требуемым образом. Предположим, что утверждение справедливо для $n=k$. Докажем, что в таком случае оно справедливо и для $n=k+1$. Пусть дано произвольное натуральное число $m\le(k+1)!$. Разделив m на $(k+1)$ с остатком, получим $m=(k+1)\cdot d+r,\ \ 0\le r\le k$ и $d\le k$. По предположению индукции существуют различные делители $d_1,d_2,\ldots,d_p;\ \ p\le k$ числа $k!$ такие, что $d=d_1+\ldots+d_p\Rightarrow m=(k+1)d_1+(k+1)d_2+\ldots+(k+1)d_p+r$ – искомое представление числа m. Действительно, в сумме $p+1\le k+1$ слагаемых, все они различны и являются делителями числа $(k+1)!$. Последнее слагаемое меньше остальных и является делителем числа $(k+1)!$, так как $r<k+1$.

4. Доказать, что оставшуюся часть можно разрезать на уголки из

трех клеток. Доказательство. Верно для любого квадрата размером $2^n \times 2^n$. Проверка по индукции.

5. *Доказательство*. $2^{m+n-2} = 2^{m-1} \cdot 2^{n-1} \geq mn$.

Занятие 24.

1. *Решение*. Приведем доказательство для случая остроугольного треугольника (остальные случаи – самостоятельно), рис. 62. Вначале покажем, что отрезки AA', BB', CC' равны, и угол между любыми из них равен 60^0. При повороте вокруг точки A на угол в 60^0 отрезок AC' переходит в AB, а отрезок AC – в AB'. Поэтому отрезок CC' переходит в отрезок $B'B$. Значит, $CC' = BB'$ и угол

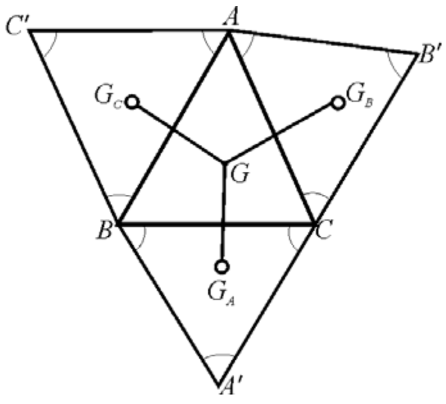


Рис. 62

между этими прямыми равен 60^0. Аналогично, $CC' = AA'$ и $AA' = BB'$, и углы между всеми отрезками равны 60^0. Пусть G_A, G_B, G_C – центры равносторонних треугольников $A'BC$, $B'AC$, $C'AB$ соответственно. При центральном подобии с центром в середине стороны AC и коэффициентом 1/3 точка B переходит в точку G, а точка $B' \to G_B$. Поэтому прямые BB' и GG_B либо параллельны, либо совпадают и $GG_B = \dfrac{BB'}{3}$. Аналогично, $GG_A = \dfrac{1}{3}AA'$ и $GG_C = \dfrac{1}{3}CC' \Rightarrow GG_A$, GG_B, GG_C равны между собой и образуют углы в 120^0. Поэтому треугольник $G_AG_BG_C$ – равносторонний, а точка G – его центр.

2. *Решение*. Пусть окружность w'' касается окружности w в точке A (рис. 63). Тогда гомотетия H_1 с центром в точке A и коэффициентом $k = \dfrac{r_2}{r}$ переводит $w \to w''$. Следовательно, $H_1(D) = K$, $H_1(B) = N \Rightarrow KN \parallel DB \Rightarrow KN = k \cdot DB$. Тогда гомотетия H_2 с центром C и коэффициентом $k' = -k$ переводит треугольник ΔBCD

в треугольник ΔCKN и, следовательно, H_2 переводит окружность, описанную вокруг первого треугольника в окружность, описанную около второго треугольника. То есть $H_2(w) = w'$. А это означает, что окружности касаются, так как центр гомотетии лежит на одной из них. Обратное доказывается аналогично.

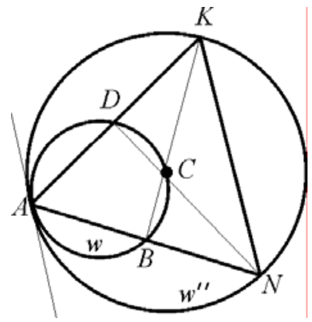


Рис. 63

3. *Решение*. Пусть H – гомотетия с центром в точке K (рис. 64) и коэффициентом

$$k = -\frac{CK}{AK} \Rightarrow H(A) = C \Rightarrow H(AD) = l_1 \Rightarrow l_1 \parallel AD \Rightarrow H(AD) = CB \Rightarrow$$

$H(S')$ окружность, вписанная в угол BCD и проходящая через точку K, $H(K) = K$. Таким образом, $H(S') = S'' \Rightarrow S'$ и S'' касаются в точке K. Прямая, проходящая через точку K перпендикулярно линии центров

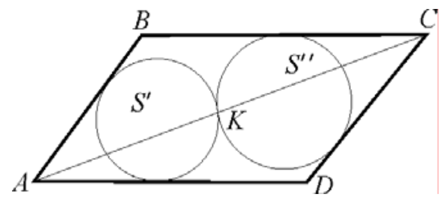


Рис. 64

этих окружностей, является их общей касательной. Пусть другой точке K' на диагонали AC соответствует другая пара окружностей S_1' и S_1''. Окружности S' и S_1' вписаны в угол BAD, следовательно, гомотетичны с центром в точке A, а значит, их касательные в точках K и K' параллельны. Отсюда следует, что параллельны и перпендикулярные им линии центров пар окружностей S', S'' и S_1', S_1''.

4. *Решение*. Рассмотрим случай, когда точки Q и B' лежат по разные стороны от прямой BK, а точки P и B' – по разные стороны от BM (рис. 65). Остальные случаи рассматриваются аналогично. Прямые QK и PM пересекаются в точке N, так как точки Q, P являются образами точек K и M при гомотетии с центром N, касательная переходит в параллельную ей касательную с точкой

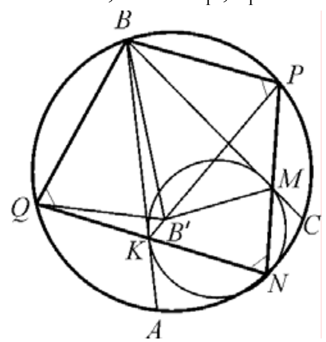


Рис. 65

касания в середине дуги. Значит, $\angle NQB + \angle NPB = \pi$, поскольку четырехугольник $BPNQ$ – вписанный по построению. Далее, $\angle KB'B + \angle KQB = \pi$ и $\angle MB'B + \angle MPB = \pi$, поскольку четырехугольники $KB'BQ$ и $BPMB'$ – вписанные по условию. Следовательно, из этих трех равенств получаем, что $\angle KB'B + \angle BB'M = \pi$, значит, точка B' лежит на прямой *KM*! Далее, $\angle BQB' = \angle BKB' =$ $= \angle KNM = \angle B'MB = \angle B'PB$,

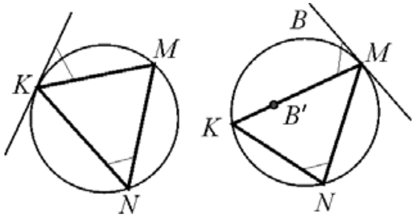


Рис. 66

так как первые два угла опираются на одну дугу в одной и той же окружности, во втором случае *BK* – касательная, *KM* – хорда, в третьем случае *BM* – касательная, в последнем случае углы опираются на одну дугу. А поскольку $\angle QBP + \angle QNP = \pi$, то получаем, что в четырехугольнике $BPB'Q$ два противоположных угла равны, а сумма двух смежных углов равна π. Следовательно, $BPB'Q$ – параллелограмм (рис. 66).

5. *Решение*. Пусть радиусы окружностей w', w'', описанных около треугольников ADB и ADC равны соответственно R_1 и R_2. Если эти радиусы различны, тогда прямая l пересечет линию центров $O'O''$ в точке *O*. Пусть OD пересекает окружности в точках B', C', и OA пересекает w' в точке A'. При гомотетии *H* с центром *O* и коэффициентом $k = \dfrac{R_1}{R_2}$ точки C', D, A переходят в точки D, B', A' соответственно. Следовательно, $\angle DAC' = \angle B'A'D$ (рис. 67). С другой стороны, $\angle B'A'D = \angle B'AD \Rightarrow \angle B'AD = \angle C'AD$. А это означает, что точки B', C' совпадают с точками *B* и *C*, так как в противном случае один из углов BAD, CAD был бы меньше, а другой больше α, где $\alpha = \angle B'AD = \angle C'AD$. Рассмотрим гомотетию H_1 с центром *O*, переводящую $w'' \to w$, окружность, проходящую через точку

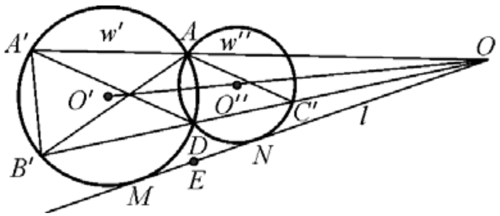


Рис. 67

E – середину отрезка MN. Из того, что l проходит через точку O и w'' касается l, следует, что w касается l в точке *E*. Кроме того, из гомотетичности треугольников ONC, OMD, гомотетия *H*, следует, что $NC \parallel MD$. Кроме того, $H_1(C) = C'$, $EC' \parallel NC \Rightarrow EC'$ – средняя линия трапеции $CNMD$, то есть гомотетия H_1 переводит точку *C* в середину DC. Аналогично, она переводит D в середину отрезка BD. Значит, w проходит через середины отрезков BD, DC. Если же $R_1 = R_2$, то вместо гомотетии следует рассмотреть перенос на вектор $\dfrac{1}{2}\overline{O''O'}$.

Занятие 25.

1. *Доказательство*. Преобразуем знакопеременную сумму:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1318}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{659}\right) =$$

$= \dfrac{1}{660} + \dfrac{1}{661} + \ldots + \dfrac{1}{1318} + \dfrac{1}{1319}$. Видим, что число слагаемых в полученной сумме четно, а сумма дробей, равноотстоящих от концов, равна: $\dfrac{1}{659+k} + \dfrac{1}{1320-k} = \dfrac{1979}{(659+k)(1320-k)}$, $k = 1, 2, \ldots, 330$. После сложения всех дробей имеем: $\dfrac{p}{q} = \dfrac{1979 \cdot A}{660 \cdot 661 \cdot \ldots \cdot 1319}$, $A \in N$. Заметим, что число 1979 – простое! А каждое из сомножителей в знаменателе меньше, чем 1979. Поэтому после сокращения на НОД[2] дроби число 1979 останется в числителе.

2. *Решение*. Используя формулу бинома Ньютона, докажем тождество: $(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a+b)\left(a^2 + ab + b^2\right)^2$. Остается подобрать числа a, b так, чтобы выражение имело место: $(a^2 + ab + b^2) \vdots 7^3 = 343$. Например, $a = 18$, $b = 1$.

[2] наибольший общий делитель

3. *Доказательство*. Удобно перейти к новым переменным: $x=\dfrac{1}{a},\quad y=\dfrac{1}{b},\quad z=\dfrac{1}{c}\Rightarrow xyz=1,\quad x,y,z>0$. Требуемое выражение принимает вид $S=\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}\geq\dfrac{3}{2}$. Это неравенство можно доказать разными способами, почти все они используют неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Самое короткое из них – с использованием неравенства Коши для скалярного произведения. Применим его к векторам $\left(\dfrac{x}{\sqrt{y+z}},\dfrac{y}{\sqrt{z+x}},\dfrac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$ и $\left(\sqrt{y+z},\sqrt{z+x},\sqrt{x+y}\right)\Rightarrow$ $(x+y+z)^2\leq S\cdot 2(x+y+z)\Leftrightarrow\quad S\geq\dfrac{x+y+z}{2}$. Используя теперь неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом получаем $S\geq\dfrac{1}{3}(x+y+z)\cdot\dfrac{3}{2}\geq\sqrt[3]{xyz}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow S\geq\dfrac{3}{2}$.

4. *Решение*. По условию, $M=\dfrac{abc-1}{(b-1)(c-1)}$ является целым числом, делящимся на $(a-1)$. Оценим M сверху и снизу. $M>\dfrac{abc-ac}{(b-1)(c-1)}=\dfrac{ac}{c-1}>a\Rightarrow M\geq a+1$. С другой стороны, $M<\dfrac{abc}{(b-1)(c-1)}=\left(a+\dfrac{a}{b-1}\right)\left(\dfrac{c}{c-1}\right)\leq(a+1)\cdot\dfrac{c}{c-1}=a+1+\dfrac{a+1}{c-1}\leq$ $\leq a+2\Rightarrow M<a+2\Rightarrow M=a+1$. Так как $\dfrac{M}{a-1}=1+\dfrac{2}{a-1}$ – целое число, то a может быть равно только 2 или 3. Если $a=2\Rightarrow M=a+1=3\Rightarrow c=3+\dfrac{5}{b-3}\Rightarrow$ из соображений делимости следует, что $b=4$, $c=8$. Аналогично, если $a=3\Rightarrow c=4+$ $+\dfrac{11}{b-4}\Rightarrow b=5$, $c=15$. Ответ: $(2,4,8);(3,5,15)$.

5. *Доказательство*: $P(x;y)=(y-x)^3-3(y-x)x^2-x^3=-y^3+$ $+3y(x-y)^2+(x-y)^3\Rightarrow P(x;y)=P(y-x;-x)=P(-y;x-y)$. Поэтому, если пара целых чисел $(x;y)$ является решением данного уравнения, то ему удовлетворяют также еще две пары: $(y-x;-x)$ и $(-y;x-y)$. Все эти три пары различны, так как в противном случае $x=y=0$, что невозможно при $n\neq 0$.

Занятие 26.

1. *Решение*. Умножим первое уравнение на a^2, второе – на $(-2a)$, третье – на 1 и сложим почленно. Получим: $\sum\limits_{k=1}^{5}\left(ka^2x_k-2ak^3x_k+k^5x_k\right)=0\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{5}kx_k\left(a-k^2\right)^2=0$. Так как все $x_k\geq 0$, то отличным от нуля может быть не более одного x_k. При $x_k\neq 0\Rightarrow a-k^2=0\Leftrightarrow a=k^2$. Заданная система соотношений превращается в три эквивалентные уравнения: $\begin{cases}kx_k=k^2,\\ k^3x_k=k^4\\ k^5x_k=k^6.\end{cases}\Rightarrow x_k=k,$

Итак, имеется шесть возможных значений для a. Ответ:

$a=0;\ x_i=0,\ i=1,\dots,5$,

$a=1;\ x_1=1,\ x_i=0, i=2,\dots,5$,

$a=4;\ x_1=0,\ x_2=2,\ x_i=0, i=3,4,5$,

$a=9;\ x_3=3,\ x_i=0,\ i=1,2,4,5$,

$a=16;\ x_4=4,\ x_i=0,\ i=1,2,3,5$,

$a=25;\ x_5=5,\ x_i=0,\ i=1,2,3,4.$

2. *Доказательство*. Легко проверить, что из неравенств $x_1>x_2$; $y_1>y_2$ следует $\Rightarrow x_1y_1+x_2y_2>x_1y_2+x_2y_1$. Отсюда, при $k_1<k_2$ и $a_{k_1}>a_{k_2}\Rightarrow\dfrac{a_{k_1}}{k_1^2}+\dfrac{a_{k_2}}{k_2^2}\geq\dfrac{a_{k_2}}{k_1^2}+\dfrac{a_{k_1}}{k_2^2}$. Переставим все a_k, $k=1,2,\dots,n$ в порядке их возрастания: $a_{k_1}<a_{k_2}<\dots<a_{k_n}$. Тогда в силу предыдущего неравенства имеем: $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{k^2}\geq\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_{k_i}}{i^2}\geq\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}$, поскольку $a_{k_i}\geq i$.

3. *Решение*. Из условия следует, что $1978^n-1978^m=1978^m\left(1978^{n-m}-1\right)=1000a,\quad a\in N$. Отсюда видно, что $m\geq 3$, так как 1978 делится на 8. Остается найти $(n-m)$, при

котором $A = 1978^{n-m} \vdots 5^3$. Легко проверить, что A делится на 5 лишь при $n-m=4k$. Поскольку нас интересует остаток при делении числа A на 125, можно заменить 1978 на 103, а 103^4 на 6. Далее имеем $6^k - 1 = (1+5)^k - 1 = 5k + \frac{k(k-1)}{2}5^2 + \ldots$, где опущенные слагаемые делятся на 125. Поэтому $2k + 5k(k-1) = k(5k-3) \vdots 25 \Rightarrow k \vdots 25 \Rightarrow$ $n-m = 100k \Rightarrow n+m = 100k + 2m \Rightarrow$.

Ответ: $n = 103$; $m = 3$.

4. *Решение*. Это типичная олимпиадная задача, не требующая для своего решения никаких дополнительных знаний. Ее решение состоит из двух частей: нахождения последовательности из 16 чисел, удовлетворяющей условию задачи, и доказательства того, что большего количества чисел последовательность такого рода иметь не может. Последовательность, разумеется, не единственна. Можно построить, например, такую: 5, 5, –13, 5, 5, 5, –13, 5, 5, –13, 5, 5, 5, –13, 5, 5. Пусть в последовательности не менее 17 членов. Тогда, зафиксировав любые четыре идущих подряд члена, получим, что кроме них имеется еще не меньше 13 членов, следовательно, по крайней мере, с одной стороны этой четверки имеется не менее 7 членов. Значит, существует последовательность из 11 идущих подряд членов, содержащих выбранную четверку на одном из своих концов. Но сумма взятых одиннадцати выбранных членов положительна, а сумма семи членов, дополнительных к выбранной четверке, отрицательна, поэтому сумма выбранных четырех членов положительна. Поскольку это – произвольная четверка, заключаем, что сумма любых четырех последовательных членов положительна. Взяв затем произвольную тройку идущих подряд членов, мы можем рассмотреть семерку идущих подряд членов, которая начинается или оканчивается выбранной тройкой. Так как сумма добавленных четырех членов положительна, а сумма всех семи членов отрицательна, то сумма выбранных трех членов отрицательна. Рассмотрим теперь произвольный член последовательности и возьмем четверку идущих подряд членов, в которой он стоял бы на одном из ее концов. Тогда их сумма положительна, сумма добавленных трех членов отрицательна, следовательно, рассматриваемый член последовательности положителен. То есть все члены последовательности – положительны. А это противоречит тому, что сумма одиннадцати ее членов отрицательна. Итак, в данной последовательности содержится 16 членов.

Занятие 27.

1. По формуле Герона находим, что $S_{\Delta ABC} = 36$. Пусть $AB'C'$ – сечение, AH и AH' – высоты треугольников ABC и $AB'C'$. Тогда AHH' – прямоугольный треугольник, причем $HH' = \frac{1}{5}SM = 6$, $AH = 2S_{\Delta ABC}/BC = 8$. Отсюда по теореме Пифагора получаем $AH' = 10$. Рассматривая треугольник SBC, находим, что $B'C' = \frac{4}{5}BC = \frac{36}{5}$. Значит, $S_{\Delta AB'C'} = \frac{1}{2}\cdot AH' \cdot B'C' = 36$.

2. Рассмотрим произвольный тетраэдр $XYZT$, прямую XY обозначим также через l. Так как $V_{XYZT} = \frac{1}{3}S_{XYZ}h = \frac{1}{6}XY \cdot XZ \cdot \sin\angle YXZ \cdot h$ то при движении вершины Y по прямой l объем тетраэдра будет меняться пропорционально длине XY. Пусть $KB : AB = LC : AC = \alpha$. Передвинем вершину L тетраэдра $CLMP$ в точку A, а затем вершину M – в точку B, и наконец, P – в D. Наблюдая за изменением объема, последовательно установим: $V_{CLMP} = \alpha \cdot V_{ACMP} = \frac{\alpha}{2}\cdot V_{ACBP} = \frac{\alpha}{4}\cdot V_{ABCD}$. Аналогично, $V_{BKPR} = \frac{\alpha}{4}\cdot V_{ABCD}$.

3. Построим отрезок DB', равный по длине и параллельный отрезку AB. Тогда треугольник CDB' прямоугольный, потому что $DB' \parallel AB$, $AB \perp CD$. По теореме Пифагора: $CB'^2 = CD^2 + DB'^2 = 121 + AB^2$. Треугольник CBB' тоже прямоугольный, так как $BB' \parallel AD$, $AD \perp BC$. Значит, $CB'^2 = BC^2 + BB'^2 = 25 + 100 = 125$. Итак, $121 + AB^2 = 125$, $AB = 2$.

4. Заметим, что вся ломаная лежит на поверхности куба. Данные в условии равенства означают, что угол между каждым звеном ломаной и соответствующим ребром куба равен углу между следующим звеном ломаной и этим же ребром куба. Отсюда следует, что, построив подходящую развертку куба, мы сможем добиться того, что ломаная будет изображена на ней отрезком прямой линии. Легко убедиться, что длина полученного отрезка равна $\sqrt{20}$.

5. Всякая плоскость, проходящая через центр куба, делит объем куба пополам. Это следует из соображений центральной симметрии.

Обратно, всякая плоскость, делящая объем куба пополам, проходит через центр куба. Действительно, если бы это было не так, то мы могли бы выполнить такой параллельный перенос данной плоскости, чтобы она стала проходить через центр куба. Но при таком движении плоскости объем одной из частей куба будет увеличиваться, объем другой – уменьшаться, что невозможно, так как после переноса объемы опять должны быть равными. Итак, обе данные плоскости проходят через центр куба. Каждая из образовавшихся четвертей куба представляет собой объединение нескольких пирамид, основания которых – это части граней куба, а вершины находятся в центре куба. Высота любой такой пирамиды равна половине длины ребра куба. Следовательно, площадь поверхности куба в каждой четверти равна объему этой части куба, деленному на одну шестую длины ребра куба. Поэтому плоскости делят поверхность куба на равные части.

6. Пусть V – объем пирамиды. Плоскость $ABEF$ делит объем данной пирамиды на две равные части, поскольку, по условию, объем одной из частей – $ABCDEF$ равен $V/2$. Значит, объем многогранника $AEFBS$ равен $V/2$. Пусть $EF = x$. Заметим, что $EF \parallel DC$. Значит, треугольники EFC и DSC подобны, причем $x = EF/DC$ – их коэффициент подобия. Проведем сечение DBS. Оно разбивает многогранник $AEFBS$ на две части – $ABES$ и $BEFS$. Вычислим объемы этих частей. Часть $ABES$ представляет собой пирамиду с основанием AES и вершиной B. Сравним ее объем с половинкой пирамиды $ADSB$, которая также представляет собой пирамиду с основанием ADS и вершиной B. Поскольку сравниваемые пирамиды имеют основания, лежащие в одной плоскости, и общую вершину, то $\dfrac{V_{ABES}}{V_{ADSB}} = \dfrac{S_{AES}}{S_{ADS}} = x$. Значит, $V_{ABES} = Vx^2/2$. Для вычисления объема пирамиды $BEFS$ с основанием EFS и вершиной B сравним ее с половинкой исходной пирамиды $CDSB$ с основанием CDS и вершиной B. $\dfrac{V_{BEFS}}{V_{CDSB}} = \dfrac{S_{EFS}}{S_{DCS}} = x^2$. Значит, $V_{BEFS} = Vx^2/2$. Итак, $V/2 = V_{AEFBS} = V_{ABES} + V_{BEFS} = \dfrac{V}{2}\left(x + x^2\right)$. Откуда $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

7. Задача имеет досадную конфигурационную подробность: противоположные стороны шестиугольного сечения куба параллельны.

Этот факт геометрически совершенно ясен, но для полноты решения приведем его доказательство. Сечение пересекает по отрезку каждую грань куба. Пометим буквами α, β, γ попарно параллельные грани и выпишем в порядке обхода сторон шестиугольника метки граней, в которых лежат его стороны. В этом списке, очевидно, не могут встретиться две одинаковые метки подряд. Мы хотим проверить, что между каждыми двумя одинаковыми метками в нашем (циклическом) списке содержатся ровно две другие метки. Допустим, что это не так и в нашем списке встречается фрагмент, скажем, β, α, β. Поскольку две метки γ не могут быть расположены рядом, весь список имеет вид: $\beta, \alpha, \beta, \gamma, \alpha, \gamma$. Этого не может быть, так ка отрезки, соответствующие меткам α, оказались не параллельными: их концы лежат на разных парах противоположных сторон двух параллельных граней куба. Вообще верен факт: если стороны выпуклого $2n$-угольника разбиваются на пары параллельных сторон, то на самом деле это пары противоположных сторон. Рассмотрим сечение нашего куба. Заметим, что диагональ K_1K_4 лежит в плоскости ABC_1D_1, диагональ K_2K_5 – в плоскости ACC_1A_1, диагональ K_3K_6 – в плоскости A_1BCD_1. Очевидно, все эти плоскости проходят через центр куба и не могут иметь более одной точки пересечения.

Занятие 28.

1. *Решение*. Пусть точки A, B, C – точки встречи ребер тетраэдра, выходящих из вершины P, через которую проходит сфера, с этой сферой, тогда тетраэдр $ABCP$ также правильный, и сфера проходит через все его вершины, описана вокруг него. Продолжим все грани тетраэдра до пересечения со сферой, тогда сфера разделится на десять частей: четыре криволинейных треугольника (над гранями) и шесть криволинейных двуугольников («лепестков») – над ребрами, по количеству граней (4) и ребер (6). Обозначая площадь каждого из таких криволинейных треугольников через x (это и есть искомая площадь), а площадь двуугольников через y, получим систему уравнений: $4x + 6y = S$, $x + 3y = S_1$, где $S_1 = S/3$, а S_1 – площадь поверхности сферического сегмента, отсекаемого от нашей сферы плоскостью какой-нибудь грани тетраэдра $PABC$. Из полученных уравнений находим искомую площадь: $x = S/6$. Дополнительная информация для обоснования того, что $S_1 = S/3$. $S_{SPHERE} = 4\pi R^2$;

$S_{Spher.Segmen} = 2\pi R \cdot H$, если H – высота сегмента. Если сфера описана вокруг правильного тетраэдра, то высота тетраэдра равна $\frac{4}{3}R$. Если тетраэдр со стороной a, то радиус описанной сферы равен.
$R = \frac{\sqrt{6}}{4}a \Rightarrow 2R = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.

2. Решение. $V_{ABCDM} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot H = V$. Объемы пирамид $ABCK$ и $ACDK$ равны между собой и равны (рис. 68)
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{4}V$.

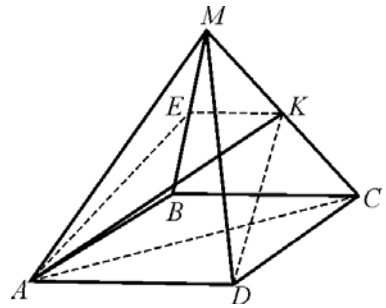


Рис. 68

Точка E лежит на середине MB, поэтому объем пирамиды $ABKE$ равен половине объема $ABKM$ или половине $ABKC$, то есть $\frac{1}{8}V$. Итак, объем пирамиды под сечением $AEKD$ равен $\frac{1}{4}V + \frac{1}{4}V + \frac{1}{8}V = \frac{5}{8}V$.

Ответ: отношение объемов равно 3 : 5.

3. *Решение.* Найдутся. Для решения задачи достаточно построить 5 попарно касающихся сфер так, чтобы все расстояния между их центрами были различны, и взять центры сфер в качестве искомых точек.

4. *Решение.* Пусть α и β – плоскости, на которые проектируется данное тело. Утверждение очевидно, если эти плоскости параллельны. Пусть они теперь не параллельны и прямая k – линия их пересечения. Пусть K_1 и K_2 – круги, являющиеся проекциями тела на данные плоскости. Докажем, что проекция тела на прямую k есть отрезок, длина которого равна длине диаметра круга K_1. Действительно, пусть M – произвольная точка тела, C – ее проекция на прямую k. На основании теоремы о трех перпендикулярах точка C может быть получена следующим образом: точка M проектируется на плоскость α в точку A, затем A проектируется на прямую k в точку C. Любая точка множества K_1 является проекцией на плоскость некоторой точки тела. Следовательно, любая точка проекции тела на прямую k является проекцией на k некоторой точки круга. Так как проекцией круга на прямую k является отрезок, то и проекцией тела на прямую k является тот же отрезок. Ясно, что длина этого отрезка равна длине диаметра круга K_1. Заменяя в предыдущих рассуждениях плоскость α на плоскость β и круг K_1 на K_2, получим, что проекцией тела на прямую k будет диаметр второго круга. То есть диаметры кругов совпадают.

Занятие 29.

1. *Решение.* Введем на плоскости систему координат таким образом, чтобы вершины квадрата, в которых сидят кузнечики, имели координаты (0, 0), (0, 1) и (1, 0). Ясно, что кузнечики всегда будут прыгать по точкам с целыми координатами. Легко проверить также, что после прыжка четность каждой из координат кузнечика не меняется. Поэтому никакой из кузнечиков не может попасть в точку (1, 1), у которой обе координаты нечетные.

2. Решение. Проведем через точку A_1 прямую, параллельную CC_1, до пересечения с AB в точке D (рис. 69). По теореме Фалеса $BD : BC_1 = A_1B : BC = 1 : 3 \Rightarrow BD = \frac{1}{3}BC_1 = \frac{2}{9}AB$ и $AD = \frac{7}{9}AB$. Снова по теореме Фалеса $AM : AA_1 = AC_1 : AD = 3 : 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{ACM} = \frac{3}{7}S_{ACA_1}$, $S_{ABK} = S_{BCL} = \frac{2}{7}S \Rightarrow S_{KLM} = S - \left(S_{ACM} + S_{ABK} + S_{BCK}\right) = \frac{1}{7}S$.

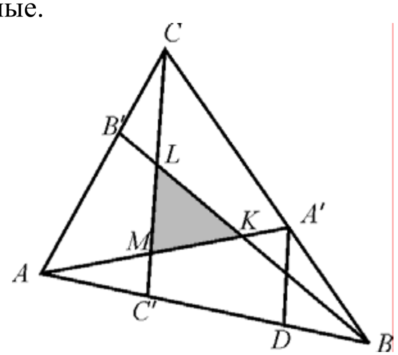


Рис. 69

3. Принцип крайнего. *Доказательство.* Выберем среди этих многоугольников тот, у которого наибольшее число сторон. Если таких больше одного, то существует два с одинаковым числом сторон, и задача решена. Он может иметь с каждым из остальных многоугольников не более одной общей стороны или ее части, и на каждой стороне треугольника лежит не более одной его стороны. Пусть число его сторон равно n. Тогда на сторонах треугольника не лежат по крайней мере $(n-3)$ его стороны. Так как каждая сторона

из этих $(n-3)$ имеет общую часть хотя бы с одним из остальных многоугольников и две разные стороны – с разными многоугольниками, то остальных многоугольников по крайней мере $(n-3)$, то есть всего треугольник разрезан не менее чем на $(n-2)$ многоугольника, у каждого из которых не более n сторон. Если среди них существует треугольник, то задача решена. Если треугольника нет, то количество сторон от 4 до n, то есть $(n-3)$ варианта, поэтому многоугольников с различным числом сторон не более $(n-3)$. Но в разрезании по крайней мере $(n-2)$ многоугольника, поэтому среди них обязательно существует два с одинаковым числом сторон.

4. *Решение*. Будем рассматривать многогранник как карту на сфере. Будет допускать двухсторонние страны, а если одна страна содержится целиком внутри другой, то она имеет 0 сторон – количество сторон считается по количеству вершин на границе, в которой сходятся три страны. Если страны с нечетным количеством сторон все красные или синие, то утверждение задачи очевидно. Пусть есть желтая страна с нечетным числом соседей. Среди ее соседей есть, очевидно, страны всех других цветов. Тогда покрасим ее в зеленый цвет и объединим с зелеными соседями. При этом перестанут быть вершинами $2k$ вершин, где k – число зеленых соседей. Причем в этих вершинах присутствовал зеленый, желтый и один из двух других цветов, поэтому разность количества красных стран с нечетным числом вершин и числа синих стран с нечетным числом вершин не меняет четности (при удалении одной вершины эта разность, очевидно, меняет четность). При каждой такой операции стран становится меньше, поэтому когда-нибудь мы придем к ситуации, когда все страны с нечетным числом вершин – красные или синие, а в этом случае утверждение задачи очевидно.

5. *Решение*. Если существует вечная колония, то тогда есть стабильная позиция. Тогда двигаясь по соседям, попадем в начальную сеть, тогда $m-n\sqrt{2}=0$ для $m,\ n\in Z$. Противоречие.

6. *Решение*. Инвариант – остаток от деления на 3 суммы всех чисел. Ответ: нельзя.

Занятие 30.

1. *Доказательство*. Докажем, что $\forall k>1,\ k\in N \Rightarrow a^{k-1}b+$ $+ab^{k-1}\le a^k+b^k$. Действительно, $a^k+b^k-a^{k-1}b-ab^{k-1}=$ $=(a-b)(a^{k-1}-b^{k-1})>0$, так как обе скобки имеют равные знаки.

Докажем требуемое неравенство индукцией по k. База: $(a+b)^1\le 2^0(a^1+b^1)$. Индуктивный переход:

$$(a+b)^{k+1}\le(a+b)\left(2^{k-1}\left(a^k+b^k\right)\right)=$$
$$=2^{k-1}\left(a^{k+1}+b^{k+1}+a^kb+ab^k\right)\le 2^{k-1}\left(a^{k+1}+b^{k+1}+a^{k+1}+b^{k+1}\right)=$$
$$=2^k\left(a^{k+1}+b^{k+1}\right).$$

2. *Ответ*: 198. Достаточно закрасить все клетки некоторой строки и некоторого столбца, за исключением клетки их пересечения. Докажем, что больше закрасить нельзя. Действительно, если в каждом столбце есть клетка, являющаяся единственной закрашенной клеткой в нем, то всего закрашенных клеток не более 100, поэтому не более 99 клеток являются единственными закрашенными в своем столбце и аналогично, в своей строке. Всего не более, чем $99+99=198$.

3. *Решение*. Пусть $AB>DA$. AC – биссектриса, значит, – ось симметрии. Пусть точка E симметрична точке D относительно AC. Тогда $AE=AD$; $CE=CD=$ $=BC\Rightarrow\Delta BCE$ – равнобедренный $\Rightarrow CF\perp AB\Rightarrow BF=FE$ и $BA+$ $+DA=BA+AE=2AF=$

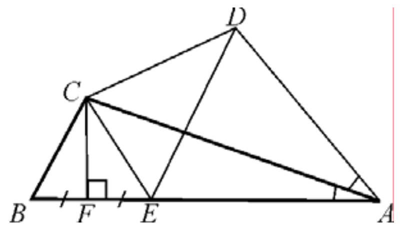


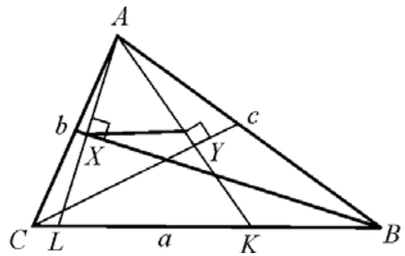
Рис. 70

$=2AC\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}$. Искомая величина $a=DA+BA=AF+BF+AF-$

$$-FE=AF+FE+AF-FE=2AF=2\cdot 8\cdot\sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{4}+1}{2}}=8\sqrt{\sqrt{2}+2}$$

(рис. 70).

4. *Решение*. Рассмотрим случай, когда точки X и Y лежат внутри треугольника ABC, случай вне треугольника решается аналогично. Обозначим за K, L точки пересечения стороны BC с прямыми AX и AY соответственно (рис. 71). Тогда $CK=b$,



$DL = c$, XY – средняя линия тре-

Рис. 71

угольника $ALK \Rightarrow LK = 2XY = 2l \Rightarrow CB = CK + BL - LK = b + c - 2l$.

5. *Решение*: $AA' = 9$, $BB' = 12$, $CC' = 15 \Rightarrow \Delta OB'C''$: длины его сторон равны 3, 4, 5, то есть он – прямоугольный с площадью, равной 6, что составляет 1/12 часть площади треугольника ABC. Ответ: $S = 72$ (рис. 72).

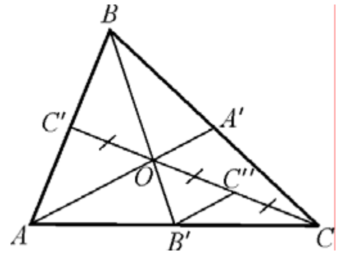


Рис. 72

Занятие 31.

1. *Решение*. Предположим, что удалось провести турнир без неинтересных матчей. Тогда в первом туре участник с номером 1 играл с теннисистом, номер которого не более 31. Аналогично, наибольший номер среди этих участников не менее 482. К третьему туру эти номера будут 61 и 452, к четвертому – 91 и 422 и так далее. К последнему девятому туру останется два игрока: один с номером не более 241, второй с номером не менее 272. В этом случае финальный матч неинтересен, что противоречит предположению.

2. *Решение*: $b^2 = 4ac + D$, а квадрат целого числа не может давать остаток 3 при делении на 4.

3. *Доказательство*. Возведем обе части требуемого неравенства в квадрат: $A = 2\sqrt{\dfrac{a^3b + b^3a}{2}} + \dfrac{a^2 + b^2}{2} + ab \le a^2 + 2ab + b^2 = B \Leftrightarrow$ Знаем, что $2\sqrt{\dfrac{a^3b + b^3a}{2}} = 2\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}} \cdot \sqrt{ab} \le 2 \cdot \left[\left(\dfrac{a^2 + b^2}{2}\right) + ab\right] \cdot \dfrac{1}{2} =$

$= \dfrac{(a + b)^2}{2} \Rightarrow \ A = (a + b)^2 = B$.

4. *Решение*: $f(x)(x^2 - 1) = Ax^{n+2} + Bx^k$, если $x = 1 \Rightarrow B = -A$; а для $x = -1 \Rightarrow (n + 2)$ и k имеют одинаковую четность. Следовательно, $(n + 2) - k = 2m$ и $f(x) = Ax^k \cdot \dfrac{x^{2m} - 1}{x^2 - 1} = Ax^k \left(x^{2m-2} + x^{2m-4} + \ldots\right.$ $\left.+ x^2 + 1\right) = f(x) = A\left(x^n + x^{n-2} + \ldots + x^{n-2m}\right)$.

5. *Решение*: $y = 1 \Rightarrow xf(1) - f(x) = (x - 1)f(x) \Leftrightarrow \ xf(1) = xf(x) \Rightarrow$

если $x \ne 0 \Rightarrow f(x) = f(1) \Rightarrow f(x) = \left[\begin{array}{l} a, x = 0 \\ b, x \ne 0 \end{array}\right.$ $a, b \in R$.

6. *Решение*. Пусть точки M и N симметричны точке A относительно биссектрис внешних углов B и C. Точки $M, N \in BC$ и XY – средняя линия треугольника $AMN \Rightarrow 2XY = MN = MB +$ $+ BC + CN = AB + BC + CA$ (рис. 73).

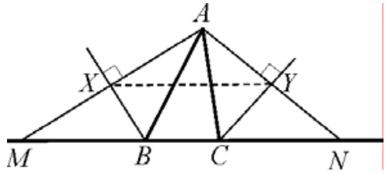


Рис. 73

7. *Доказательство*. Пусть $\angle 1 = \angle ABC$, тогда $\angle BCD = 90^0 - \angle 1 \Rightarrow$ По теореме синусов имеем $AC = 2\sin\angle 1$; $BD = 2\sin\left(90^0 - \angle 1\right) =$ $= 2\cos\angle 1 \Rightarrow AC^2 + BD^2 = 4$.

Занятие 32.

1. *Решение*. Все рассматриваемые числа, с одной стороны, делятся на 9, с другой стороны, $123456798 - 123456789 = 9$, поэтому 9 – это наибольший общий делитель.

2. *Решение*: $1 + x^2 + x^4 = 1 + 2x^2 + x^4 - x^2 = \left(1 + x + x^2\right) \times$ $\times \left(1 - x + x^2\right) \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = 2$.

3. *Решение*: $y = x^3 \Rightarrow \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^y = y^{\frac{1}{3}y} = 3 \Rightarrow y^y = 3^3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$.

4. *Решение*. Умножим первую скобку на третью и вторую четвертую. Получаем: $\left(a^2 + 13a + 22\right)\left(a^2 + 13a + 40\right) + x$. Обозначим через с выражение $a^2 + 13a + 31 \Rightarrow (c - 9)(c + 9) + x = c^2 - 81 + x > 0 \Rightarrow$ $x = 82$.

5. *Решение*. В течение суток минутная стрелка делает 24 оборота, а часовая – 2, следовательно, минутная стрелка совершает 22 оборота вокруг часовой, составляя при этом с часовой стрелкой дважды прямой угол (отставая на четверть круга и обгоняя на четверть круга).

6. *Решение*. Подставив второе уравнение в первое, получим $x^2 - a^2x^2 - 2abx - b^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(1 - a^2\right)x^2 - 2abx - \left(b^2 + 1\right) = 0$ для $a \ne \pm 1 \Rightarrow D = 0 \Leftrightarrow b^2 = 1 - a^2$, для $a = \pm 1 \Rightarrow \ b \ne 0$.

7. *Решение*: $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=111k \Rightarrow n(n+1)=$
$=2\cdot 3\cdot 37\cdot k,\quad 1\le k\le 9 \iff \left[\begin{array}{l} n=37 \quad \text{или} \\ n+1=37 \end{array}\right. \Rightarrow n=36.$

8. *Решение*. Так как путешественник возвращается той же дорогой, то для любого участка подъем в гору на обратном пути будет спуском и наоборот. Средняя скорость прохождения гористого участка составит $\dfrac{1}{(1/3+1/6)/2}=4 \Rightarrow S=4(9-3)=24$.

Приложение

Планиметрия

1. Поскольку треугольник *CBD* равнобедренный, его вписанная окружность касается отрезка *CD* в его середине. Обозначим эту середину через *F*. По условию, $DF=CD/2=AD$. С другой стороны, $DF=DE$ как отрезки касательных. Значит, $AD=DE$, то есть треугольник *ADE* – равнобедренный. Следовательно, прямая *AE* перпендикулярна биссектрисе угла *ADE*. Но прямая *DO* перпендикулярна ей же как биссектриса смежного угла. Поэтому прямые *AE* и *DO* параллельны.

2. Четырехугольник *AKLH* – вписанный. Тогда $\angle LKH=\angle LAH=$ $=90°-\angle C$. Следовательно, $\angle LCB+\angle LKB=\angle LCB+\angle LKH+$ $+90°=180°$.

3. Будем обозначать расстояние от точки *X* до прямой *l* через *d(X,l)*. Заметим, что $d(C,AP)=d(M,AP)\circ\dfrac{AC}{AM}$, $d(B,DP)=$ $=d(M,DP)\circ\dfrac{DB}{DM}$. Но $d(M,AP)=d(M,DP)$, так как *PM* – биссектриса угла *APD*, поэтому достаточно показать, что $AC/AM=DB/DM$. Треугольники *AMD* и *CMB* подобны по углам, поэтому $CM/AM=BM/DM$. Отсюда $\dfrac{AC}{AM}=1+\dfrac{CM}{AM}=1+\dfrac{BM}{DM}=$ $=\dfrac{DB}{DM}$. Что и требовалось доказать.

4. Пусть *X* и *Y* – середины диагоналей данного четырехугольника. Тогда точка *N* является серединой отрезка *XY*, а также серединой обеих средних линий. Этот достаточно общеизвестный факт можно

легко доказать заметив, что точки *X* и *Y* вместе с серединами двух противоположных сторон образуют параллелограмм. Так как *O* – центр описанной окружности, точки *X* и *Y* являются основаниями перпендикуляров, опущенных из *O* на диагонали. Значит, углы *OXM* и *OYM* – прямые. Следовательно, *X* и *Y* лежат на окружности, построенной на *OM* как на диаметре. Точка *N* лежит внутри или на той же окружности, как середина хорды *XY*. Следовательно, $ON\le OM$, так как расстояние между любыми двумя точками круга не превосходит его диаметра.

5. Отрезки *AD* и *DF* равны, так как они стягивают равные дуги описанной окружности треугольника *ABD*. Аналогично, $CD=DE$. Далее, $\angle ADE=180°-\angle EDC=\angle EBC=\angle ABC$, (так как четырехугольник *BEDC* – вписанный), и точно также $\angle CDF=\angle ABC$. Значит, треугольники *ADE* и *FDC* равны между собой по двум сторонам и углу. Поэтому, $AE=CF$.

6. Треугольники *OBA* и *OAC* подобны. $(\angle AOB=\angle COA$, $\angle OBA=60°-\angle OAB=\angle OAC)$. Отсюда $\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{BA}{AC}=\dfrac{BD}{AE}$. Тогда треугольники *OBD* и *OAE* подобны. Отсюда $\angle ODA=\angle OEC=$ $=180°-\angle OEA$.

7. Малые дуги *EC* и *AF* лежат внутри угла *ABC*, поэтому точка *D* тоже лежит внутри этого угла. Так как четырехугольник *BEDC* – вписанный, то $\angle BCD=180°-\angle BED=\angle AED$. Аналогично, $\angle DFC=\angle EAD$. Значит, треугольники *AED* и *DFC* равны. Тогда высоты этих треугольников из вершины *D* тоже равны. Это и означает, что точка *D* лежит на биссектрисе угла *ABC*.

8. Опустим перпендикуляры из *C* и *D* на одну из сторон. Тогда точка *M* – середина *CD*, является серединой боковой стороны трапеции *CDBE*. Точка *M* лежит на срединном перпендикуляре к отрезку *BE*, то есть равноудалена от *B* и *E*. Видно, что $AM=AE$, поэтому $AM=MB$.

9. Пусть *ABCDEF* – исходный шестиугольник, а *PQRSTU* шестиугольник, образованный серединами его сторон. Тогда $PU\parallel BF$, $RS\parallel CE$, так как средняя линия треугольника параллельна основанию. Значит, $BF\parallel CE$. Аналогично, $BD\parallel AE$, $DF\parallel AC$. Поэтому треугольники *BDF* и *ACE* подобны и, более того, гомотетичны. Их

центр гомотетии и есть точка пересечения диагоналей исходного шестиугольника.

10. Ответ: Одно из оснований в два раза длиннее другого. Не умаляя общности можно считать, что точка пересечения диагоналей трапеции лежит внутри четырехугольника *KBCL*. Пусть $AD = x$, $BC = y$. Обозначим площади треугольников *BCL*, *BLD*, *BCK*, *CKA* через S_1, S_2, S_3, S_4 соответственно. Тогда $S_2 = \frac{1}{2}S_{BDK} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{y}S_3$. Аналогично, $S_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{y}S_1$. Откуда $S_1S_2 = S_3S_4$. Кроме того, очевидно, $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$. Поэтому либо $S_1 = S_3$, $S_2 = S_4$, либо $S_1 = S_4$, $S_2 = S_3$ (по теореме Виета). Первое невозможно, так как отрезок *KL* не параллелен основаниям трапеции, а во втором случае мы сразу получаем, что $\frac{x}{y} = 2$.

11. Пусть *N* – точка пересечения прямой *MH* с окружностью *ABC*. Так как угол $\angle BC_1H = 90^0$, то *BH* – диаметр окружности, описанной вокруг треугольника A_1BC_1. Тогда $\angle BMH = 90^0$, и $\angle BMN = 90^0$. Значит, *BN* – диаметр окружности, описанной около треугольника *ABC*. Тогда $\angle BAN = \angle BCN = 90^0$ и четырехугольник *AHCN* – параллелограмм. Диагональ *AC* этого параллелограмма делится пополам прямой *MH*, содержащей вторую диагональ этого параллелограмма.

12. Поскольку *P* лежит на срединном перпендикуляре к *AB*, имеем $PB = PA$. Значит, $\angle PAB = \angle PBA$, откуда $\angle BPD = 180^0 - \angle APB = 2\angle PAB$. Аналогично, $PD = PC$, $\angle APC = 2\angle PDC = 2\angle PAB$

Следовательно, треугольники *APC* и *BPD* равны по двум сторонам и углу, откуда $AC = BD$.

13. Заметим, что отрезки *AL* и *CK* – высоты треугольника *ABC*. Пусть *BN* –третья высота треугольника *ABC*, *H* – ортоцентр. Угол, вертикальный к углу *BKM*, опирается на дугу *AK* (как угол между касательной и хордой), угол *ACK* опирается на дугу *AK*, значит, углы *BKM* и *ACK* равны. Так как прямоугольные треугольники подобны по углам, то равны углы *ACK* и *ABN*. Получили, что равны углы *ABN* и *BKM*. Таким образом, прямая *KM* выходит из вершины прямого угла треугольника *BKH* под углом, равным углу *B* этого треугольника. Поэтому прямая *KM* обязательно пройдет через середину гипотенузы *BH*. Аналогично, прямая *LM* проходит через середину отрезка *BH*. Следовательно, точка *M* совпадает с серединой отрезка *BH* и, в частности, лежит на высоте треугольника *BN*.

14. Пусть *AO* пересекает *BC* в точке A_1, а *DO* – в точке D_1. Тогда KD_1 – средняя линия треугольника ABA_1, следовательно, отрезок KD_1 параллелен AA_1. Но тогда OA_1 – средняя линия треугольника CKD_1, откуда $CO = OK$. Аналогично, $BO = ON$, значит, *KBCN* – параллелограмм, а тогда и *ABCD* – параллелограмм.

15. Заметим, что расстояния от точки касания вписанной окружности со стороной треугольника до концов проекции окружности на эту сторону равны ее радиусу. Значит, все данные точки лежат на окружности, концентрической со вписанной окружностью треугольника, с радиусом в $\sqrt{2}$ раза больше.

16. Построим отрезок BA^1, симметричный отрезку *BA* относительно прямой *BC*. Тогда точка A^1 лежит на продолжении высоты AA_1. Обозначим через M^1 точку пересечения прямых *BM* и A^1C. Тогда $\angle ABM^1 = 90° - \angle BC_1A_1 = 90° - \angle BCA = \angle AA^1C$, в силу вписанности четырехугольника ACA_1C_1. Таким образом, четырехугольник ABA^1M^1 – вписанный. Значит, $\angle AM^1A^1 = 180° - \angle ABA^1 = 60°$. Следовательно, точка M^1 совпадает с *M*. Поскольку углы BM^1A^1 и BM^1A опираются на равные хорды, они оба равны по 30^0.

17. Требуется доказать, что треугольник *EAD* – равнобедренный. Для этого достаточно проверить, что $\angle EAD = \angle EDA$. А так как равны углы *EDA* и *FDC*, то докажем, что $\angle EAD = \angle FDC$. Заметим, что треугольник *DBF* равнобедренный. Значит, $\angle BDF = \angle BFD$. Тогда $\angle ADB = \angle DFC$. Теперь мы видим, что треугольники *ADB* и *DFC* равны по двум сторонам и углу. Значит, углы *EAD* и *FDC* равны.

18. Пусть *D* и *E* – середины сторон *AB* и *AC* соответственно. Заметим, что $DE \parallel BC \parallel KL$, *DO* – серединный перпендикуляр к *AB*. Значит, $DO \parallel KM$, аналогично $OE \parallel LM$, тогда гомотетия с центром в точке *A*, переводящая точку *E* в точку *L*, переводит *D* в *K*, а *O* в *M*, поэтому *A*, *O* и *M* лежат на одной прямой.

19. Пусть *F* – точка на луче *DC*, расположенная за точкой *C* так, что $CF = BA$. Так как $\angle ABD = \angle CAD + \angle ADC = 180° - \angle ACD = \angle ACF$, то треугольник *DBA* равен треугольнику *ACF* по двум

сторонам и углу между ними. Тогда $AD = AF$ и $\angle FAC = \angle ADB = \angle BAC$. Следовательно, точка F лежит на прямой AB и $\angle BAD = \angle AFC$, что равносильно равенству отрезков AD и DF. Итак, треугольник AFD – равносторонний, значит, $\angle BAD = 60°$.

20. Проведем через точку D прямую, параллельную BC, и пусть F – точка пересечения этой прямой с AE. По теореме Фалеса точка F делит отрезок AE пополам, то есть $AE : FE = 2:1$. С другой стороны, $FE = DE$, так как в треугольнике DEF углы D и F равны, поскольку они равны как накрестлежащие углам DEC и FEB, которые равны между собой по условию. Значит, $AE : DE = AE : FE = 2:1$.

21. Пусть P – середина стороны AB. Тогда точка N будет лежать на прямой PM, проходящей через середину основания AB трапеции $ABLK$ и точку пересечения ее боковых сторон. Следовательно, на этой прямой также лежит точка пересечения диагоналей трапеции, которая будет совпадать с N. Значит, точки A, N и L лежат на одной прямой. Осталось заметить, что из подобия $AN/NL = AB/KL = AM/MK = AC/2MK = AC/CL$, откуда CN – биссектриса треугольника ACL.

22. В силу свойства вписанных углов $\angle EFD = \angle EOD = \angle BAD = \angle BCD$, поэтому четырехугольник $BFDC$ – вписанный. Тогда $\angle BCF = \angle BDF = \angle OEF = \angle OAB = \angle ACD$, откуда $\angle BCA = \angle FCD$.

23. Пусть S – точка пересечения перпендикуляров, проведенных из точек M и K, T – точка пересечения перпендикуляров, проведенных из точек M и N. Четырехугольник $AMSK$ – вписанный, поэтому $\angle SAM = \angle SKM = \angle BKM - 90°$. Аналогично, $\angle TCM = \angle BNM - 90°$. Следовательно, $\angle SAM = \angle TCM$. Вспоминая теперь, что точки S и T лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AC, мы видим, что они совпадают.

24. Ответ: 60^0, 30^0, 90^0. Проведем в треугольнике ABN среднюю линию MD. Тогда $\angle MDC = 90^0$, и треугольники MDC и KNC подобны. Поскольку ABN – прямоугольный треугольник с углом $60°$, то $AN = \frac{1}{2}AB$. Пусть $AB = 4x$, тогда $AN = 2x$, $DN = x$. Из подобия треугольников MDC и KNC находим, что $NC = 6DN = 6x$, следовательно, $AC = 8x$. Заметим, что $\frac{AC}{AB} = 2 = \frac{AB}{AN}$, и треугольники ANB и ABC подобны по второму признаку. Поэтому углы треугольника ABC совпадают с углами треугольника ANB, а их мы знаем из условия.

25. Пусть K – точка пересечения окружностей на стороне AB, $\angle BAL = \angle LAC = \alpha$, $\angle ABM = \angle MBC = \beta$. Тогда $\angle MCK = \angle MBK = \beta$, $\angle LCK = \angle LAK = \alpha$, как опирающиеся на равные дуги. Как видим, $\angle ACB = \alpha + \beta$, а сумма углов треугольника ABC равна $3(\alpha+\beta)$. Значит, $\angle ACB = 60°$.

26. Пусть CF – биссектриса угла C треугольника. Так как $\angle DEB = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle FCB$, прямые ED и CF параллельны. По теореме Фалеса $\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{3}{2}$. Значит, $\frac{BF}{AB} = \frac{BF}{BD} \cdot \frac{BD}{AB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, то есть, CF является и медианой треугольника. Следовательно, треугольник – равнобедренный $(AC = BC)$.

27. Отложим на продолжении отрезка BD за точку D отрезок DE, равный AD. Угол ADB –внешний угол при вершине равнобедренного треугольника ADE, поэтому $\angle AED = \frac{1}{2}\angle ADB = \angle CBD$. Так как углы CBD и AEB равны, прямые AE и BC параллельны. Отсюда и из условия, что диагональ AC делится прямой BE пополам, следует, что $ABCE$ – параллелограмм. Следовательно, $\angle ABD = \angle KEC$. Далее, имеем $CK = KD + AD = KD + DE = KE$, то есть треугольник CKE – равнобедренный (его углы E и C равны). Поскольку угол BKC – внешний для этого треугольника, получаем, что $\angle BKC = 2\angle KEC = 2\angle ABD$.

28. Докажем, что прямые KP и LQ пересекаются в точке M – середине стороны AC. Для этого проведем отрезок MP и покажем, что он проходит через точку K. Достаточно убедиться в том, что $MP \parallel BC$, поскольку по теореме о средней линии прямая – все тогда получается. Заметим, что отрезок PM является медианой в прямоугольном треугольнике APC, поэтому $\angle MPC = \angle MCP = \angle PCB$ и прямые PM и BC параллельны. Аналогично убеждаемся в том, что и прямая LQ проходит через точку М.

29. Заметим, что $\angle O'BD = \angle O'AD = \angle DAO = \angle DBC$, аналогично, $\angle O'CA = \angle ACB$, значит, точка O – центр вписанной окружности треугольника $BO'C$, поэтому $O'O$ – биссектриса угла $BO'C$.

Алгебра и свойства функций

1. *Ответ*: Сумма четвертых степеней больше суммы кубов. Чтобы определить знак выражения $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^4-a_i^3\right)$, прибавим к нему выражение $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2-a_i\right)$, равное 0. Получим $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2-1\right)(a_i-1)$. Осталось заметить, что при $a_i \ge 0$ каждое слагаемое в этой сумме положительно.

2. Пусть это не так. Обозначим наше число $\overline{a_1a_2\cdots a_к 0 a_{к+1}\cdots a_{14}}$, где 0, стоящий между $a_к$ и $a_{к+1}$ – это нуль, который нужно вычеркнуть, чтобы получилось число опять делящееся на 81. По признаку делимости на 9, наше число должно состоять из 9 единиц и 6 нулей. Поэтому среди цифр $a_{к+1}$, ..., a_{14} не более 8 единиц. Значит, число $\overline{a_{к+1}\cdots a_{14}}$ не делится на 9. Заметим, что $10\cdot\overline{a_1a_2\cdots a_к a_{к+1}\cdots a_{14}}-\overline{a_1a_2\cdots a_к 0 a_{к+1}\cdots a_{14}}=9\cdot\overline{a_{к+1}\cdots a_{14}}$. Последнее число делится на 81 как разность двух чисел, делящихся на 81. Но оно не может делиться на 81, так как второй множитель в правой части не делится на 9. Противоречие.

3. Умножим $ax+by$ на $ay+bx$. Результат по-перждему делится на a^2+b^2. Следовательно, $xy(a^2+b^2)+ab(x^2+y^2)$ делится на a^2+b^2, а значит, $ab(x^2+y^2)\vdots(a^2+b^2)$. Но поскольку ab меньше, чем a^2+b^2, то x^2+y^2 должен иметь нетривиальный общий делитель с a^2+b^2.

4. Если обозначить эти числа x, y, z, то не трудно убедиться, что они связаны равенством $xy+yz+zx=1$. Теперь видно, что если какие-то два из них имеют общий делитель, то он должен быть делителем единицы.

5. Пусть $b>a$. Тогда выберем c так, чтобы выполнялись равенства: $c+a=k^2$, $c+b=(k+1)^2$, где $k=(b-a-1)/2$. Тогда $c=k^2-a$, $b=2k+a+1$. Откуда $c+ab=k^2-a+a(2k+a+1)=$ $=k^2+2ak+a^2=(k+a)^2$.

6. Сначала, пока это возможно, будем убирать отрезки, полностью покрытые другими отрезками. Пусть S_1 – множество точек отрезка L, покрытых оставшимися отрезками ровно один раз, S_2 – объединение всех отрезков с нечетными номерами, S_3 – с четными. Эти три множества состоят из непересекающихся отрезков, объединение которых покрывает каждую точку отрезка L ровно два раза. Значит, сумма длин отрезков, входящих в эти множества, равна удвоенной длине L. Тогда, по крайней мере, одно из этих множеств покрывает не менее 2/3 отрезка L. Нетрудно видеть, что можно выкинуть некоторые отрезки так, чтобы покрытым ровно один раз осталось именно это множество.

7. Заметим, что $\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos 2z\le|\cos y|+|\sin y|\le\sqrt{2}$, $\sin z\cdot\cos 4x\le 1$. Значит, максимальное значение приведенного в условии выражения не превосходит $\sqrt{2}+1$. Но при $x=\frac{3\pi}{2}$, $y=\frac{5\pi}{4}$, $z=\frac{\pi}{2}$ это значение достигается.

8. Домножив на знаменатели, перенеся все в левую часть приведя подобные члены, перепишем неравенство в виде $a^2+b^2-ab-a^2b^2\ge 0$. Заметим, что $\sqrt{ab}\le(a+b)/2\le 1$, поэтому $a^2b^2\le ab\le 1$. Тогда $a^2+b^2-ab-a^2b^2\ge(a-b)^2\ge 0$.

9. *Решение* 1. Выражение, данное в условии – квадратное уравнение относительно k. Его дискриминант, равный $8mn$,– точный квадрат. Значит, и $2mn$ – точный квадрат.

Решение 2. Путем несложных преобразований убеждаемся, что $2mn=(k-m+n)^2$.

10. Добавим к правой части неравенства выражение $(x+y+z)^2-2(x+y+z)$, равное нулю. Тогда после несложных преобразований, получим: $(xy-z+1)^2+(yz-x+1)^2+(zx-y+1)^2\ge 0$.

11. Заметим, что $340=2^2*5*17$. Среди чисел $a+b$, $b+c$, $c+a$ не более одного четного, так как если бы среди них нашлось два четных, то это значило бы, что третье число тоже четное, но в этом случае произведение $(a+b)(b+c)(c+a)$ должно делиться на 8, что неверно. Итак, среди чисел $a+b$, $b+c$, $c+a$ ровно одно четное, и, кроме того, каждое из этих чисел не меньше двух. Тогда произведение этих чисел может быть равно 340 только в том случае, если одно из них равно 4, другое 5, третье – 17. Пусть, например,

$$\begin{cases} a+b=4, \\ b+c=5, \\ a+c=17. \end{cases}$$

Из первого равенства следует, что $a<4$, из второго – что $c<5$. Поэтому третье равенство невозможно.

12. Допустим, что a, b, c удовлетворяют условию. Поскольку $4242=42*101$, а 101 – простое число, один из сомножителей в разложении $4242=(a+b)(b+c)(c+a)$ должен делиться на 101. Пусть, например, $a+b$ делится на 101, в частности $a+b\geq 101$. Тогда $(b+c)(a+c)=4242/(a+b)\leq 42$, поэтому числа $b+c$ и $c+a$ не превосходят 42. Но $(b+c)+(a+c)=a+b+2c>a+b\geq 101>42+42$. Противоречие. Значит, таких чисел a, b, c не существует.

13. Ответ: 1717. Пусть x – исходное число. Увеличив каждую цифру на 1 или на 5, к числу x тем самым прибавили некоторое четырехзначное число из единиц и пятерок. Поскольку получилось $4x$, прибавляемое число равно $3x$. В частности, оно делится на 3 и не меньше 3000. Из признака делимости на три следует, что в записи числа $3x$ две единицы и две пятерки, а из условия $3x\geq 3\,000$ – что его первая цифра равна 5. Таким образом, остаются лишь три варианта: $3x=5115$, $3x=5151$, $3x=5511$, соответственно $x=1705$, $=1717$, $x=1837$. Лишь второй из этих вариантов подходит, потому что сложения 1705 + 5115 и 1837 + 5511 не сводятся к увеличению цифр из-за переносов.

14. Пусть y и $z=1/y$ – данные корни. Тогда $ay^2+ay+b=0$ и $a/y^2+b/y+b=0$, откуда $ay^2+ay+b=0$, $by^2+by+a=0$ Складывая, получаем: $(a+b)\left(y^2+y+1\right)=0$. Выражение во второй скобке всегда положительно, поэтому $a+b=0$, $b=-a$ Подставляя в первое из исходных уравнений, получим: $a\left(y^2+y-1\right)=0$, значит, $y=\left(-1\pm\sqrt{5}\right)/2$, $z=1/y=\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2$.

15. Пусть $x_1=x-1$, $y_1=y-1$. Тогда $x_1^3+2x_1-14=0$, $y_1^3+2y_1+$ $+14=0$ Складывая эти два равенства, находим, что $(x_1+y_1)(x_1^2+x_1y_1+y_1^2+2)=0$. Выражение во второй скобке всегда положительно, поэтому $x_1+y_1=0$, значит, $x+y=2$.

16. Легко видеть, что при $ab>0$ $|a+b|>|a-b|$, а при $ab<0$ $|a+b|<|a-b|$. Отсюда и следует утверждение задачи.

17. *Ответ*: 4,75. Из неравенств $[x]\{x\}\geq 3$, $\{x\}<1$ следует, что $[x]>3$. При $[x]=4$ получаем $\{x\}\geq 3/[x]=0{,}75$, то есть $x\geq 4{,}75$. Если же $[x]\geq 5$, то $x\geq[x]\geq 5>4{,}75$. Значит, наименьшее возможное значение x равно 4,75.

18. Из того, что значения квадратного трехчлена $ax^2+2bx+c$ отрицательны при всех x, следует, что его дискриминант отрицателен, то есть $4b^2-4ac<0$, $ac>b^2\geq 0$, неравенство сохранится при возведении в квадрат. Тогда дискриминант $4b^4-4a^2c^2$ второго трехчлена отрицателен, и он не имеет корней. Следовательно, значения второго трехчлена всегда больше 0.

Список литературы

1. Урман А. А., Храмцов Д. Г., Шрайнер А. А. Задачи городских и районных математических олимпиад. Новосибирск: Новосибирский государственный педагогический университет, Новосибирский государственный университет, 2004.
2. Шрайнер А. А. Задачи районных математических олимпиад Новосибирской области. Новосибирск: НГПУ, 2000.
3. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. М.: Изд-во Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1975.
4. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. М.: МЦНМО, 2004.
5. Варианты вступительных экзаменов в Школу имени А. Н. Колмогорова / Сост.: Н. Б. Алфутова, В. В. Загорский, Т. П. Корнеева, М. В. Смуров, А. В. Устинов. М.: Школа имени А. Н. Колмогорова, Самообразование, 2000.
6. Петраков И. С. Математика для любознательных. М.: Просвещение, 2000.
7. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Математические олимпиады Московской области. 1993–2002. М.: Изд-во МФТИ, 2003.
8. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренко Ю. В., Резниченко С. В., Слинько А. М. Математические олимпиады школьников. 9 класс. М.: Просвещение, 1997.

9. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренко Ю. В., Резниченко С. В., Слинько А. М. Математические олимпиады школьников. 10 класс. М.: Просвещение, 1998.

10. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренко Ю. В., Резниченко С. В., Слинько А. М. Математические олимпиады школьников. 11 класс. М.: Просвещение, 1999.

11. LXIII Московская математическая олимпиада. М.: МЦНМО, 2000.

12. LXIV Московская математическая олимпиада. М.: МЦНМО, 2001.

13. Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад. М.: Просвещение, 1971.

14. Сборник задач московских математических олимпиад. Пособие для внеклассной работы по математике / Сост.: А. А. Леман / Под ред. В. Г. Болтянского. М.: Просвещение, 1965.

15. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады / Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Просвещение, 1986.

16. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Работ Ж. М., Тоом А. Л. Заочные математические олимпиады. М.: Наука, 1981.

17. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. Киров: АСА, 1994.

18. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Толпыго А. К. Математические задачи. Библиотечка физико-математической школы. М.: Наука, 1971.

19. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л. Математические соревнования. Арифметика и алгебра. Библиотечка физико-математической школы. М.: Наука, 1970.

20. Московские математические регаты / Сост.: А. А. Блинков. М.: МЦНМО, 2001.

21. Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб.: Политехника, 1994.

22. Рукшин С. Е. Математические соревнования в Ленинграде – Санкт-Петербурге. Первые пятьдесят лет. Ростов н/Д.: МарТ, 2000.

23. Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П. Петербургские математические олимпиады. СПб.–М.–Краснодар: Лань, 2003.

24. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2003 года / Сост.: К. П. Кохась, С. В. Иванов, А. И. Храбров и др. СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург, 2003.

25. Медников Л. Э., Мерзляков А. С. Математические олимпиады. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

26. Муштари Д. Х. Подготовка к математическим олимпиадам. Казань: Казанское математическое общество, 2000.

27. Савин А. П., Брук Ю. М., Волошин М. Б., Зильберман А. Р., Семенчинский С. Г., Сендеров В. А. Физико-математические олимпиады. М.: Знание, 1977.

28. Садовничий В. А., Подколзин А. С. Задачи студенческих олимпиад по математике. М.: Наука, 1978.

29. Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А. Международные математические олимпиады. Задачи. Решения. Итоги. М.: Просвещение, 1976.

30. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады / Сост.: А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. М.: Дрофа, 1998.

31. Созоненко Р. С. Задачи по планиметрии. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1998.

Оглавление

Учебное издание

Составитель:
Куклина Галина Яковлевна

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ НАЧАЛЬНОГО УРОВНЯ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 9–11 КЛАССОВ

Верстка Т. В. Ивановой

Подписано в печать 08.02.2010 Формат 60x84/16
Заказ № Усл. печ. л. 7,8
Уч.-изд. л. 6,5
Тираж 200 экз.

Редакционно-издательский центр НГУ
630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2