ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НГУ

Занимательные задачи по математике

Дополнительные занятия для учащихся 7 классов

Учебное пособие

Издание второе, исправленное

Новосибирск
2010

УДК 330.1
ББК 65.012

З 27

Занимательные задачи по математике. Дополнительные занятия для учащихся 7 классов: Учеб. пособие / Сост. А. М. Быковских, Г. Я. Куклина. 2-е изд., испр. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. 90 с.

Пособие предназначено для учащихся 7 классов общеобразовательных школ, желающих расширить и углубить свои знания и умения в математике как школьной, так и олимпиадной.

Под редакцией А. А. Никитина, А. С. Марковичева

Рецензент
к.ф.-м.н., доцент М. Г. Пащенко

.

Предисловие

В Новосибирском государственном университете и Специализированном учебно-научном центре НГУ накоплен значительный опыт довузовской работы со школьниками. В течение многих десятилетий преподаватели НГУ участвуют в проведении олимпиад разного уровня; успешно работают подготовительные курсы для будущих абитуриентов и заочная школа; ежегодно проводится Летняя физико-математическая школа, через которую осуществляется набор учащихся в СУНЦ НГУ; проходят Летние школы Юных программистов; ведутся факультативные и кружковые занятия в ряде школ Новосибирска.

Более десяти лет назад в ответ на запросы учащихся и родителей на подготовительных курсах НГУ приступили к занятиям по математике, физике и химии со школьниками девятых классов, желающими поступить в СУНЦ НГУ.

Предлагаемое учебное пособие в определенной мере отражает опыт занятий по математике со школьниками младших и средних классов и включает в себя темы и задачи, которые могут быть условно разнесены на три раздела:

– углубление школьного курса;
– факультативный материал;
– олимпиадные задачи начального уровня.

Стоит заметить, что в последние годы появилась возможность накапливать опыт работы со школьниками средних классов – в ряде случаев, когда родители учащихся обращались с просьбой об организации индивидуальных или групповых занятий с целью, например, подготовки в дальнейшем к поступлению в физико-математическую школу. В то же время высказывались мнения по поводу организации систематических занятий со школьниками более младших, чем девятый, классов или создания некоторой системы, позволяющей родителям и учителям приобщить ребят к занятиям математикой через увлекательные занятия - интересные задачи и интересное общение с заинтересованными взрослыми.

Становится понятно, что в настоящее время ребята не всегда имеют возможность сделать верный выбор в своих увлечениях или пристрастиях, разобраться в своих способностях и наклонностях, если им вовремя не удалось окунуться в необходимую или просто иную среду.

Вопросы мотивации, равно как и выбора предпочтений могут решаться разными путями. Нам представляется, что данное пособие может быть полезным в нескольких аспектах.

Независимо от способностей развитое мышление способствует развитию личности молодого человека.

Развивая логическое, в том числе и математическое мышление ребенка мы создаем базу для более свободного выбора им своих будущих увлечений.

Нам представляется важным систематически заниматься с ребенком математикой.

Данное пособие следует за аналогичными пособиями для учащихся пятых и шестых классов и в определенном смысле продолжает представленную там логику проведения занятий.

В пособии предлагается множество различных задач по темам как школьным, так и олимпиадным. В зависимости от предпочтений взрослых можно выбирать темы или уровни задач.

Родители ребенка или другие члены семьи, владеющие математическими знаниями, вполне могут использовать данное руководство (в совокупности с учебными пособиями как школьными, так и указанными в библиографии) как путеводитель и как повод для совместных занятий математикой со своими детьми.

Нам представляется возможным использование данного пособия и школьными учителями математики – в первую очередь в роли источника материалов для дополнительных, более углубленных занятий по математике.

Другим возможным вариантом применения пособия может быть использование его для практических занятий, проводимых студентами университета, выпускниками физико-математической школы, для учащихся седьмых классов.

В предлагаемом пособии наряду с олимпиадными задачами предлагается продолжение знакомства с геометрией.

Известно, что освоение чего-то нового требует времени на начальное привыкание, адаптацию к неизвестным ранее понятиям и объектам.

Нам показалось актуальным продолжать заниматься со школьниками седьмого класса наряду с олимпиадной тематикой геометрией на плоскости и немного - в пространстве. Данное руководство, в частности, опирается на материал многоуровневых пособий, разработанных преподавателями НГУ и СУНЦ НГУ и научными сотрудниками Сибирского отделения Академии наук [1].

Занятие 1.
Старинные занимательные задачи и задачи-шутки

1. Один человек выпивает бочонок кваса за 14 дней, а вместе с женой выпивает такой же бочонок кваса за 10 дней. Нужно узнать, за сколько дней жена одна выпивает такой же бочонок кваса.

2. Говорит дед внукам: «Вот вам 130 орехов. Разделите их на две части так, чтобы меньшая часть, увеличенная в 4 раза, равнялась бы большей части, уменьшенной в три раза». Как разделить орехи?

3. Двенадцать человек несут 12 хлебов: каждый мужчина несет по 2 хлеба, женщина – по половине хлеба, а ребенок – по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?

4. У пятерых крестьян – Ивана, Петра, Якова, Михаила и Герасима – было 10 овец. Не могли они найти пастуха, чтобы пасти овец, и говорит Иван остальным: «Будем, братцы, пасти овец по очереди – столько дней, сколько каждый из нас имеет овец». Сколько дней должен каждый крестьянин пасти овец, если известно, что у Ивана в два раза меньше овец, чем у Петра, у Якова в два раза меньше, чем у Ивана; Михаил имеет овец в два раза больше, чем Яков, а Герасим – вчетверо меньше, чем Петр?

5. Один воин вышел из города и проходил по 12 верст (1 верста равняется примерно 2,16 км) в день, а другой вышел одновременно и шел так: в первый день прошел одну версту, во второй день – две версты, в третий день – три версты и так прибавлял каждый день по одной версте, пока не настиг первого. Через сколько дней второй воин настигнет первого?

6. Имеет некто чай трех сортов – цейлонский по 5 гривен за фунт (1 фунт равняется примерно 0,41 кг), индийский по 8 гривен за фунт и китайский по 12 гривен за фунт. В каких долях нужно смешать эти три сорта, чтобы получить чай стоимостью 6 гривен за фунт?

7. Постоялец гостиницы обвинил слугу в краже всех его денег. Смекалистый слуга сказал так: «Это правда, я украл все, что он имел». Тогда слугу спросили о сумме украденных денег, и он отвечал: «Если к украденной мною сумме прибавить еще 10 рублей, то получится мое годовое жалованье, а если к сумме его денег прибавить 20 рублей, то получится вдвое больше моего жалованья». Сколько денег имел постоялец и сколько рублей в год получал слуга?

8. Король пожелал сместить своего министра, не слишком обидев его. Он подозвал министра к себе и предложил выбрать один из двух листочков, пояснив, что на одном написано «Уходите», а на другом – «Останьтесь». Листок, который вытащит министр, решит его судьбу. Министр догадался, что на обоих листках написано «Уходите». Помогите министру сохранить свое место.

9. Один господин написал о себе: «Пальцев у меня двадцать пять на одной руке, столько же на другой, да на ногах десять». Что он забыл?

10. Остап Бендер решил дать сеанс одновременной игры Карпову и Каспарову. Один из них должен играть белыми, а другой – черными. Остап надеется или свести вничью обе партии, или одну выиграть. Как он собирается играть?

Домашнее задание 1

1. На столе лежат три спички. Не прибавляя ни одной спички, сделайте из трех – четыре; добавьте к трем спичкам еще две так, чтобы получилось восемь. Ломать спички нельзя.

2. Три курицы за 3 дня снесли 3 яйца. Сколько яиц снесут 12 кур за 12 дней?

3. Женщина собрала в саду яблоки. Чтобы выйти из сада, ей пришлось пройти через 4 двери, каждую из которых охранял свирепый стражник, отбиравший половину яблок. Домой она принесла 10 яблок. Сколько яблок досталось стражникам?

4. Повстречал гусь стаю: «Здравствуйте, сто гусей!» – «Нас не сто гусей, – ответили ему, – если бы нас было столько, сколько теперь, да еще столько, да полстолька, да четверть столько, да еще ты, гусь, с нами, так было бы нас сто гусей». Сколько гусей в стае?

5. Точка O движется по гипотенузе прямоугольного треугольника. При каком положении точки O расстояние между ее проекциями на катеты будет наименьшим?

6. Разделите угол в 66° на 11 равных частей с помощью циркуля и линейки.

Занятие 2.
Геометрические построения. Знаменитые задачи древности

1. Построения с помощью циркуля и линейки.

2. Постройте отрезок, который в пять раз больше данного.

3. Постройте отрезок, длина которого равна разности длин двух данных отрезков AB и CD при условии, что $AB > CD$.

4. В заданном треугольнике постройте: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты.

5. С помощью циркуля и линейки постройте угол равный: а) $60°$; б) $15°$; в) $45°$.

6. Через вершину заданного угла проведите прямую, которая образует равные углы со сторонами заданного угла.

7. Разделите угол $90°$ на три равных угла с помощью циркуля и линейки.

8. Решите задачу о трисекции произвольного угла (произвольный угол разделить на три равные части) с помощью циркуля и линейки с двумя отмеченными точками.

Домашнее задание 2

1. Если лягушонок зеленый, то он веселый. Если лягушонок не веселый, то он сидит на берегу. Все лягушата либо зеленые, либо пестренькие. Если лягушонок пестренький, то он плавает в воде. Тогда обязательно … (A) Все лягушата – пестренькие. (B) Все лягушата плавают в воде. (C) Все лягушата – веселые. (Д) Все лягушата – не веселые. (E) Все веселые лягушата – зеленые.

2. Даны отрезок AB и две точки K и M. Постройте точку, равноудаленную от точек K и M на расстояние AB.

3. Постройте окружность заданного радиуса, проходящую через две заданные точки.

4. Даны угол и точка M, см. рис. 1. Проведите через точку M прямую, которая отсекает от сторон угла равные отрезки.

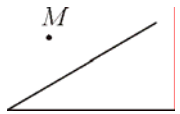

Рис. 1

5. Одно и то же расстояние один пешеход проходит за 2 часа, а другой – за 3 часа. Они одновременно вышли из двух пунктов навстречу друг другу и через некоторое время встретились. Первый пешеход прошел до встречи 3,6 км. Сколько километров до встречи прошел второй пешеход и чему равно расстояние между пунктами?

6. Определите, простым или составным является число $3^{2009}+1$.

Занятие 3.
Степень с целым показателем

1. Свойства степеней с натуральным показателем.

2. Свойства степеней с целым показателем.

3. Запишите в виде одной степени:
а) $7^{81}\cdot 7^{82}$; б) $2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4\cdot 2^5\cdot 2^6\cdot 2^7\cdot 2^8\cdot 2^9\cdot 2^{10}$; в) $81\cdot 9^{-3}\cdot 3^4$.

4. Упростите выражения: а) $2^{m+3}\cdot 3^{m+3}$; б) $5^{100-m}\cdot 5^{m+1}$ для $m\le 100$.

5. Упростите выражения: а) $\left(a^{m+1}\right)^5$; б) $\left(b^n\right)^{m+2}$; в) $\left(m^2\cdot m^3\right)^4$; г) $\left(a^5\right)^2\cdot\left(a^2\right)^2$.

6. Найдите значения одночленов: а) b^{-m}, если $b=3$ и $m=4$; б) x^{-m+5}, если $x=2$ и $x^m=32$.

7. Вычислите значения выражений:
а) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}+3^{-1}$; б) $\left(-0,2\right)^{-3}+\left(0,1\right)^{-3}$; в) $\frac{5^{16}\cdot 5^4}{5^{18}}$; г) $\frac{0,6^{12}}{0,6^4\cdot 0,6^5}$.

8. Докажите, что: а) $\sqrt{8}+\sqrt{32}=\sqrt{72}$; б) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=2$; в) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}$.

9. Вычислите значения выражения $x^5+x^4+x^3+x^2+x$ при $x=-1$; 0; 10.

10. Укажите, как изменится площадь квадрата, если его сторону увеличить в 2 раза; в 3 раза; в 10 раз; в n раз.

11. Выполните действия:
а) $\frac{1,6^2-\left(3,8\right)^0\cdot 16\cdot 0,4+0,4^2}{1,88-0,2^2}$; б) $\frac{1,2^2-1,8^2}{1,2^0\cdot 0,6-1,8^0\cdot 0,96}$.

Домашнее задание 3

1. Упростите выражения: а) $a^{m^2-(m-1)\cdot(m+1)-1}$; б) $4^{6+m}\cdot 4^{1-2m}\cdot 4^{m-5}$.

2. Найдите значения выражений: а) $16^2 \cdot 8^{-3} \cdot 4^4 \cdot 2^{-5}$;

б) $\frac{3}{4} - \left(12^0\right)^3 - \left(1\frac{1}{2}\right)^2 + 4^3 \cdot 0{,}1$; в) $\left((-8)^0\right)^5 - 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 5^2 \cdot 0{,}2$.

3. Найдите площадь фигуры, изображенной на рис. 2.

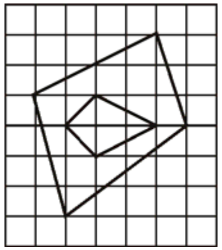

Рис. 2

4. Как с помощью циркуля и линейки построить квадрат, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 1 и 2?

5. Найдите, сколько существует различных вариантов кода, если код состоит из трех цифр.

6. Некоторое число уменьшили на 15 %, а результат увеличили на 10 %. После этого получили число, которое на 13 меньше первоначального. Найдите первоначальное число.

Занятие 4.
Задания на делимость и остатки

1. Определите, сколькими нулями оканчивается произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$

2. Определите, на какую цифру оканчивается число 777^{777}.

3. Определите, сколько различных делителей, включая 1 и само себя, имеет число 24.

4. Найдите цифры a и b в числе $\overline{42a4b}$, если известно, что это число делится на 72.

5. Определите, может ли быть такое число, которое при делении на 3 дает в остатке 1, при делении на 4 дает в остатке 2, при делении на 5 дает в остатке 3 и при делении на 6 дает в остатке 4.

6. Числа 100 и 90 разделили на одно и то же число. В первом случае получили в остатке 4, во втором – 18. Определите, на какое число делили.

7. Определите, при каких значениях n число $\underbrace{111...11}_{n \text{ цифр}}$ делится на 7.

8. Докажите, что если число вида 111…11, записываемое одними единицами, нацело делится на 7, то оно делится нацело и на 13.

Домашнее задание 4

1. Определите, верна ли теорема: если записать в обратном порядке цифры любого целого числа, то разность исходного и нового числа разделится на 9.

2. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все десять цифр.

3. В магазин привезли меньше 600, но больше 500 тарелок. Когда стали раскладывать по десяткам, то не хватило трех тарелок до полного числа десятков, а когда стали раскладывать дюжинами, по 12 тарелок, то осталось 7 тарелок. Сколько было тарелок?

4. Произведение двух взаимно простых чисел равно 2272. Найдите эти числа.

5. Сумма возрастов Али-Бабы и сорока разбойников равна 2010 годам. Чему будет равна сумма их возрастов через 7 лет?

6. Все поле планировали вспахать за 30 дней. Механизатор за 20 дней вспахал 90 % поля. На сколько процентов он перевыполнил дневную норму?

Занятие 5.
Тождества. Многочлены. Разложение многочленов на множители

1. Операции над одночленами.
2. Операции над многочленами.
3. Разложение на множители двучлена $a^n - b^n$.
4. Докажите тождества:

а) $m^2 + n^2 - (m+n)^2 = -2 \cdot m \cdot n$;

б) $(x+y)^2 - 2 \cdot x \cdot y = (x-y)^2 + 2 \cdot x \cdot y$;

в) $m + (m+1) + (m+2) + (m+3) + (m+4) = 5 \cdot (m+2)$;

г) $(3 \cdot a + 4 \cdot b)^2 = 16 \cdot b^2 + 24 \cdot a \cdot b + 9 \cdot a^2$.

5. Из данного тождества подстановкой вместо букв указанных выражений получите новое тождество:

а) $(m-1)(m-3) = m^2 - 4 \cdot m + 3$, где $m = b^3$;

б) $(a+1) \cdot (b+1) - (a+b) = a \cdot b + 1$, где $a = 3 \cdot x^2$, $b = 4 \cdot x^2$.

6. Выполните действия: а) $2\cdot x\cdot\left(x^2+5\cdot x+3\right)$;

б) $14\cdot a\cdot\dfrac{a+2}{7}+25\cdot a^2\cdot\dfrac{4-3\cdot a}{5}$; в) $(3\cdot a+5)\cdot(3\cdot a-6)+30$;

г) $(5\cdot m+3\cdot n)\cdot\left(25\cdot m^2-15\cdot m\cdot n+9\cdot n^2\right)$.

7. Разложите на множители методом вынесения общего множителя за скобки:

а) $2\cdot z^5\cdot g^2-4\cdot z^3\cdot g+6\cdot z^2\cdot g^3$; б) $a\cdot(b-c)+3\cdot(c-b)$;

в) $(x-y)^2-a\cdot(x-y)$.

8. Разложите на множители методом группировки:

а) $16a\cdot b^2+5b^2\cdot c+10c^3+32a\cdot c^2$; б) $9m^2-9m\cdot n-5m+5n$;

в) $x^2-x\cdot y+x-x\cdot y^2+y^3-y^2$.

9. Докажите, что число $5^{20}-2^{20}$ делится на 3.

10. Докажите, что число $7^{100}-2^{100}$ делится на 45.

11. Найдите суммы:

а) $1+2+2^2+2^3+...+2^{63}$; б) $1+3+3^2+3^3+...+3^{19}$.

Домашняя работа 5

1. Упростите выражения:

а) $\left(3x^2+4\right)^2+\left(3x^2-4\right)^2-2\cdot\left(5-3x^2\right)\left(5+3x^2\right)$;

б) $(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)\left(a^8+b^8\right)$.

2. Разложите на множители многочлены:

а) $ax^2+ay^2-bx^2-by^2+b-a$; б) $4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2$.

3. Докажите, что: а) 51^3-26^3 делится на 25; б) 43^3+17^3 делится на 60.

4. Найдите, сколько потребуется краски, чтобы с двух сторон покрасить сплошную дверь шириной 82 см и высотой 2 м 3 см, если на покраску 1 м^2 уходит 80 г краски.

5. Найдите площадь фигуры, изображенной на рис. 3.

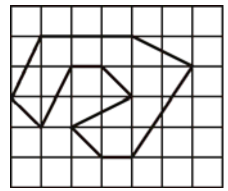

Рис. 3

6. Через три дня после того, как Петр начал читать книгу, эту же книгу начал читать Алексей. Закончили чтение они одновременно. Петр прочитывал по 10 страниц в день, а Алексей – по 16 страниц в день. Определите, сколько страниц в книге.

Занятие 6.
Геометрия на плоскости. Признаки равенства треугольников, построение треугольников

1. Признаки равенства треугольников.
2. Признаки равенства прямоугольных треугольников.
3. Построение треугольника: по трем сторонам; по двум сторонам и углу между ними; по стороне и прилежащей к ней двум углам.
4. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и боковой стороне; основанию и углу при вершине.
5. Постройте равносторонний треугольник по стороне; по высоте.
6. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу; по катету и сумме другого катета с гипотенузой.

Домашнее задание 6

1. Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами равнобедренного треугольника.

2. Какой цифрой оканчивается сумма всех двузначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 3?

3. Сплав железа и никеля весит 4 кг и содержит 5 % никеля. Сколько железа надо добавить к этому сплаву, чтобы получился сплав, содержащий два процента никеля?

4. Докажите, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

5. Двое играют в такую игру: первый называет любое число от 1 до 5, затем второй прибавляет любое число от 1 до 5 и так далее. Выигрывает тот, кто первым сумеет получить в сумме 60. Кто из играющих и как должен играть, чтобы обеспечить себе выигрыш?

6. На лугу трава растет одинаково густо. Сорок коров съедают всю траву за 60 часов, а 30 коров – за 100 часов. Сколько коров съедят эту траву за 300 часов?

Занятие 7.
Геометрия на плоскости. Площадь треугольника. Задачи на доказательство

1. Основные свойства площади.
2. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a.
3. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = BC = 5$; $AC = 6$.
4. Нарисуйте треугольник с основанием a и высотой h, проведенной к основанию, и найдите площадь треугольника, если: $a = 3$; $h = 5$.
5. Проверьте, что в треугольнике ABC со сторонами $AB = 13$; $BC = 15$; $AC = 14$ проведенная к стороне AC высота равна 12. Найдите длины высот этого треугольника, проведенных к сторонам AB и BC.

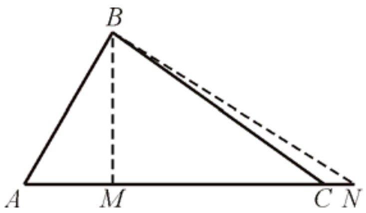

Рис. 4

6. Площадь треугольника ABC равна 20 см^2, а точки M и N расположены на прямой AC так, как на рис. 4, причем $AM : MC = 3 : 7$, $AN : NC = 8 : 1$. Найдите площадь треугольника BMN.
7. Отрезки AB, DC и EF пересекаются в точке O и каждый из них делится точкой O пополам, см. рис. 5. Докажите, что треугольники ACE и BDF равны.

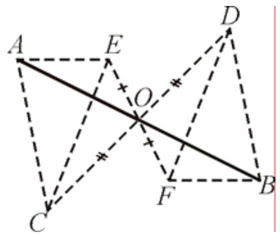

Рис. 5

8. Рассмотрите два равносторонних треугольника ABC и CDE, расположенные так, как на рис. 6, где точки A, C, E принадлежат одной прямой, а точки M и N – середины

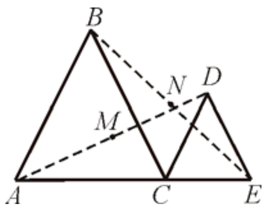

Рис. 6

отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CMN всегда равносторонний.

Домашнее задание 7

1. Найдите значения выражений: а) $\sqrt{68^2 - 32^2}$; б) $157 \cdot 163$; в) 987^2.
2. Докажите тождества:

а) $(2a - b)(2a + b) + (b - c)(b + c) + (c - 2a)(c + 2a) = 0$;

б) $(3x + y)^2 - (3x - y)^2 = (3xy + 1)^2 - (3xy - 1)^2$.

3. В треугольнике ABC площади 99 см^2 точки M и N делят сторону AC на три равные части. Найдите площадь треугольника BMN.
4. Площадь треугольника ABC, изображенного на рис. 7, равна 2 см^2. Точки M, N и K расположены на продолжениях сторон так, что $AK = AC$; $BM = BA$; $CN = CB$. Найдите площадь треугольника MNK.

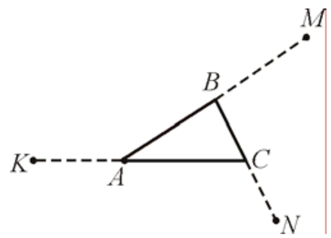

Рис. 7

5. На лугу паслась отара: овцы и бараны. Известно, что в отаре 45 % баранов, причем их вес составляет 55 % веса всей отары. Вес овцы 81 кг. Сколько весит баран?
6. Сколько надо взять идущих подряд слагаемых в сумме $1 + 2 + \ldots + n$, чтобы в результате сложения получить трехзначное число, в записи которого все цифры одинаковы?

Занятие 8.
Уравнения с одной и двумя переменными

1. Решение уравнения с одним неизвестным, равносильность уравнений.
2. Решение уравнения с двумя неизвестными, равносильность уравнений.
3. Решите уравнения: $x^2 - 5x = 0$; $x^2 = 8x$; $(x + 1)^2 = 4$; $|x + 5| = 4$; $|x - 6| = 0$.

4. Определите, являются ли равносильными уравнения: $\left(x+1\right)=0$ и $\left(x+1\right)^2=0$; $x=1$ и $x^2=1$.

5. Определите множество решений уравнения $0\cdot x+y=1$.

6. Решите уравнения: $(x-2)\cdot(y-2)=0$; $x^2+(y-1)^2=0$.

7. Изобразите на координатной плоскости все решения уравнений: $xy=0$; $(x+1)\cdot(y-2)=0$; $x^2+y^2=1$.

8. Решите уравнения: $0{,}75x=1{,}25x-1$; $3x+3=5x-7-2x$; $x-y=1$.

Домашнее задание 8

1. Всего куплено 90 тетрадей, причем тетрадей в клетку куплено в два раза больше, чем тетрадей в линейку. Сколько куплено тетрадей в клетку и сколько – в линейку?

2. Из пассажирского поезда пассажир заметил, что встречный товарный поезд прошел мимо за 10 секунд. Определите скорость товарного поезда, если известно, что его длина 250 м, а скорость пассажирского поезда равна 50 км/час.

3. Имеется два сплава. В одном сплаве содержится 20 % олова, в другом – 30 % олова. Сколько килограммов первого и второго сплавов нужно взять, чтобы получить 10 кг нового сплава, содержащего 27 % олова?

4. Найдите общую формулу записи числа, которое как при делении на 6, так и при делении на 8 дает в остатке 5.

5. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне.

6. Докажите, что если p – простое число, большее 3, то p^2-1 делится на 6 и 24.

Занятие 9.
Текстовые задачи на работу и движение

1. Пассажир, стоящий у окна поезда, заметил, что расстояние между соседними километровыми столбами поезд проходит за 30 секунд. Определите, за какое время поезд пройдет 90 км, если будет ехать с той же скоростью.

2. Девять рабочих могут выполнить работу за 10 часов. Найдите, сколько еще нужно пригласить рабочих, чтобы эта работа была выполнена за 6 часов.

3. На дорогу от дома до работы и обратно у Андрея уходит 90 минут. Обратный путь занимает у него на 10 минут больше, чем путь на работу. Вычислите, сколько минут Андрей добирается до работы и сколько минут он едет домой.

4. Одна швея шила фартуки 3 дня, а другая швея шила такие же фартуки 7 дней. Вместе они сшили 135 фартуков. Найдите, сколько фартуков в день шила первая швея, если известно, что вторая швея ежедневно шила на 5 фартуков меньше, чем первая.

5. Два спортсмена бегут навстречу друг другу по круговой дорожке, длина которой 1 км. Скорость одного из них 140 м/мин., а другого – 160 м/мин. В некоторый момент времени они встречаются. Определите, через сколько минут они встретятся в следующий раз?

6. Два автомата расфасовали в пакеты 460 кг крупы за 6 часов. Первый час работал один автомат, следующие два часа работал второй автомат, а оставшееся время работали два автомата вместе. Определите производительность каждого автомата, если известно, что первый автомат упаковывает за 1 час на 20 пакетов меньше, чем второй.

7. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 4 км, одновременно выходит пешеход и выезжает велосипедист. Велосипедист доезжает до B, сразу поворачивает обратно и встречает пешехода через 24 минуты после своего выезда из A. Определите скорость пешехода и велосипедиста, если известно, что пешеход проходит в час на 10 км меньше, чем проезжает велосипедист.

8. Старинная задача. По контракту работникам причитается по 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный день с них взыскивается по 12 франков. Через 30 дней выяснилось, что работникам ничего не причитается. Найдите, сколько дней они отработали за этот период.

Домашнее задание 9

1. Одна машинистка печатает страницу за 6 минут, а другая – за 10 минут. Они вместе отпечатали рукопись, одновременно начав и закончив работу. Первая отпечатала 150 страниц. Сколько страниц отпечатала вторая машинистка?

2. Докажите, что выражение $x(3x+2)-x^2(x+3)+(x^3-2x+9)$ при любом значении переменной x принимает одно и то же значение.

3. Найдите площадь фигуры, изображенной на рис. 8.

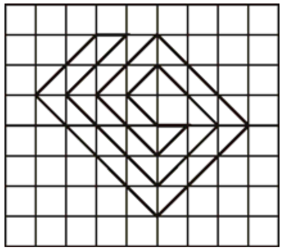

Рис. 8

4. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 2, на 5, на 10?

5. Площадь треугольника ABC равна 22 см^2. Точка M расположена на высоте BH так, что $BM=\frac{1}{4}BH$. Найдите площадь треугольника AMC.

6. Определите пропущенные числа и найдите сумму: $3+6+9+\ldots+99$.

Занятие 10.
Логические задачи

1. Имеются четыре пакета и весы с двумя чашками без гирь. С помощью пяти взвешиваний расположите пакеты по весу.

2. Несколько команд разыграли первенство по волейболу, сыграв каждая с каждой по одному разу. Докажите, что если какие-нибудь две команды одержали одинаковое число побед, то найдутся такие три команды А, Б, В, что А выиграла у Б, Б – у В и В – у А. Заметим, что при игре в волейбол ничьих не бывает.

3. В конференции участвовало 100 человек – химики и алхимики. Каждому был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого больше среди участников – химиков или алхимиков?» Когда опросили 51 участника и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервали. Алхимика всегда лгут, а химики всегда говорят правду. Сколько химиков среди участников?

4. Племя людоедов поймало Робинзона Крузо. Вождь сказал: «Мы бы рады отпустить тебя, но по нашему закону ты сначала должен произнести какое-нибудь утверждение. Если оно окажется истинным, мы съедим тебя. Если оно окажется ложным, тебя съест наш лев». Помогите Робинзону!

5. Тоне больше лет, чем будет Гале, когда Жене исполнится столько лет, сколько Тоне сейчас. Кто из них самая старшая, а кто самая младшая?

6. Как определить вес тела, если коромысла чашечных весов «неправильные», а гири – «правильные»?

7. В турнире, где каждые две команды встречались между собой по два раза, участвовало четыре команды. За победу в каждой встрече давалось два очка, за ничью – одно, за поражение – 0. Команда, занявшая последнее место, набрала 5 очков. Сколько очков набрала команда, занявшая первое место?

8. При возвращении из Дворца спорта между Ниной и ее тренером состоялся такой диалог: – У тебя есть брат? – У меня три брата. – Ответила Нина. – А какого они возраста? – Произведение чисел, выражающих возраст каждого из них, равно 36, а сумма – номеру вон того автобуса, что стоит на остановке. Посмотрев на номер автобуса, тренер сказал, что этих данных ему недостаточно. – А старший из них тоже любит спорт, – добавила Нина. – Теперь я знаю, сколько лет каждому из них, – сказал тренер и точно назвал возраст каждого мальчика. Назовите и Вы.

Домашнее задание 10

1. В корзине лежат 30 грибов. Среди любых 12 из них имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

2. Моему брату через два года будет вдвое больше лет, чем ему было два года назад, а моя сестра через три года будет втрое старше, чем три года назад. Кто из них старше?

3. Имеется 6 одинаковых с виду гирек с массой 1, 2, 3, 4, 5 и 6 граммов соответственно. На гирьках сделали надписи: 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г и 6 г. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без других гирек проверить правильность всех шести надписей?

4. Укажите все прямые, проходящие через точку M, лежащую на стороне угла, и не пересекающие вторую сторону угла.

5. Два человека вышли из одного места в одном направлении вокруг города по дороге длиной 20 км. Скорость первого – 6,25 км/час, а скорость второго – 5 км/час. Через сколько времени первый догонит второго и сколько раз вокруг города пройдет каждый из них?

6. Определите, сколько трехзначных чисел не содержат в своей записи цифры 5.

Занятие 11.
Геометрия на плоскости. Параллельные прямые. Сумма углов треугольника

1. Свойства параллельных прямых.
2. Признаки параллельных прямых.
3. На рис. 9 прямые AB и CD параллельны. Известно, что $\angle APQ + \angle PQD = 150°$. Найдите углы: $\angle BPQ$, $\angle APM$, $\angle PQC$, $\angle MPB$.

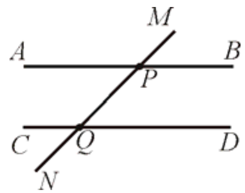

Рис. 9

4. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, причем $OA = OB$, $CO = OD$, см. рис. 10. Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

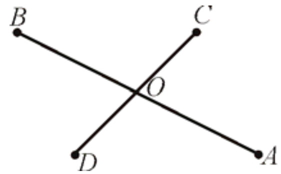

Рис. 10

5. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A и $AB = BC$. Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
6. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Через основание этой биссектрисы проводится прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке K. Докажите, что треугольник AKL равнобедренный.
7. Найдите сумму углов любого треугольника.
8. Найдите сумму углов четырехугольника.
9. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL и BM, пересекающиеся в точке O. Найдите углы треугольников AOB, BOL, AOM, если: а) $\angle BAC = 80°$; $\angle ABC = 60°$; б) $\angle BAC = 30°$; $\angle ABC = 60°$.
10. Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме не смежных с ним внутренних углов треугольника.

Домашнее задание 11

1. На рис. 11 равны отрезки AC и BD, BC и AD. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

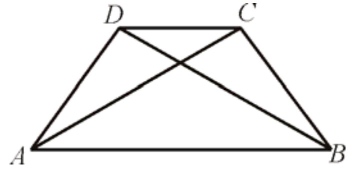

Рис. 11

2. Две пары параллельных прямых пересекаются пятой прямой так, как на рис. 12. Известно, что $\angle CFE = 39°$; $\angle BGH = 33°$. Найдите угол CAB.

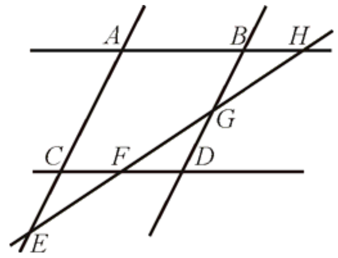

Рис. 12

3. В четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов пересекаются так, как на рис. 13. Найдите углы четырехугольника $MNKL$, если известны углы: $\angle A = 60°$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 130°$; $\angle D = 110°$.
4. Даны три числа, из которых каждое следующее на 3 больше предыдущего. Найдите эти числа, если известно, что произведение меньшего и большего чисел на 54 меньше произведения большего и среднего.
5. Докажите тождество:
$$\left(x^2+1\right)^2 - 4x^2 = \left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2.$$

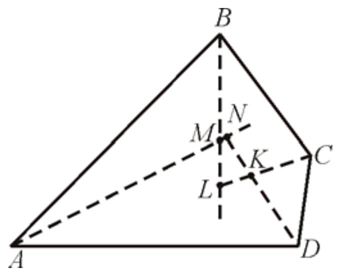

Рис. 13

6. Брат старше сестры на 4 года. Отец сказал сыну: «Мне 30 лет. Если через два года я сложу твой возраст и возраст твоей сестры, то результат будет меньше моего возраста в 2 раза». Определите, сколько лет брату и сестре сейчас, и сколько будет каждому из них через 2 года.

Занятие 12.
Геометрия на плоскости. Параллелограмм

1. Параллелограмм и его свойства.
2. Прямоугольник, ромб.
3. Признаки параллелограмма.

4. Площадь параллелограмма.

5. Центральная симметрия.

6. Найдите площадь ромба, если его высота равна 12 см, а меньшая диагональ – 13 см.

7. Найдите площадь параллелограмма со сторонами 5 см и 6 см и с тупым углом в $150°$.

8. Площадь параллелограмма равна 480 см^2, его периметр равен 112 см, а расстояние между двумя противоположными сторонами равно 12 см. Найдите расстояние между двумя другими противоположными сторонами.

Домашнее задание 12

1. Маугли попросил своих друзей-обезьян принести ему орехов. Обезьяны набрали поровну орехов и понесли Маугли. Но по дороге они поссорились, и каждая обезьяна бросила в каждую по ореху. В результате Маугли досталось лишь 35 орехов. Сколько орехов собрали обезьяны, если известно, что каждая из них принесла больше одного ореха?

2. Окончив читать книгу Вася подсчитал, что для нумерации всех ее страниц потребовалась 301 цифра. Покажите, что Вася ошибся в подсчете.

3. Угол между высотой и биссектрисой прямоугольного треугольника, проведенных из вершины прямого угла, равен $12°$. Найдите острые углы данного прямоугольного треугольника.

4. Пешеход идет к поезду. Пройдя за первый час пути 3,5 км, он рассчитал, что если он будет идти с той же скоростью, то опоздает на полчаса. Пешеход прибавил шагу и шел оставшуюся часть пути со скоростью 5 км/час, благодаря чему он прибыл в конечный пункт на 15 минут раньше срока. Найдите путь пешехода.

5. Постройте с помощью циркуля и линейки четырехугольник $ABCD$, если даны длины всех его сторон и известно, что диагональ AC является биссектрисой угла A.

6. Часы показывают 16 часов. Определите, через какой наименьший промежуток времени стрелки на часах образуют тот же угол.

Занятие 13.
Неравенства

1. Свойства неравенств.

2. Почленное сложение и умножение неравенств.

3. Решение линейных неравенств с одной неизвестной.

4. Выясните, какое из чисел $a = 5838 + 457$ и $b = 5638 + 629$ больше другого.

5. Поставьте вместо знака * знак > или <, чтобы получилось верное числовое неравенство: а) $-\frac{3}{4} * -\frac{2}{3}$; б) $-\frac{5}{6} * -\frac{4}{5}$; в) $\frac{5}{14} * \frac{3}{8}$.

6. Докажите, что при всех значениях переменной верны неравенства: а) $2b+3>2b+1$; б) $4c+6>4c+2$; в) $x+2>x-4$.

7. Докажите, что система неравенств $a>b$, $b,c>0$ равносильна неравенству $ac>bc$.

8. Докажите, что если $a>0$, то $a+\frac{1}{a}\ge 2$.

9. Пусть $a\ge b>0$ и $c\ge d>0$. Докажите, что $ac\ge bd$.

10. Решите неравенство $ax<b$, где a и b – заданные числа, а x – переменная.

11. Решите неравенства: а) $\frac{2x}{5}+1>3x-\frac{1}{2}$; б) $3(x-4)+6x>69$; в) $(x-1)^2\ge(x-2)^2$.

Домашнее задание 13

1. Поставьте вместо знака * знак > или <, чтобы получилось верное числовое неравенство: а) $\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{10} * \frac{4}{5}$; б) $\left(\frac{2}{10}\right)\div 2 * 2$; в) $\left(\frac{-6}{11}\right)\cdot 11 * -8$; г) $\left(-\frac{16}{21}\right)(-4) * \frac{1}{7}$.

2. Что можно сказать о знаках чисел a и b, если: а) $-4a+2<0$; б) $\frac{1}{6-2a}<0$; в) $\frac{a}{b}=-5$?

3. Докажите, что при любых a и b выполняется неравенство: $a^2 + b^2 \geq 2ab$. В каком случае достигается равенство?

4. Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A и пересекающая продолжение стороны AB в точке D. Докажите, что $AC = AD$.

5. Вкладчик открыл в банке счет. Через год на его счету было 360 000 рублей, что составило 120 % от суммы, которую он внес первоначально. Сколько рублей внес вкладчик при открытии счета?

6. Волк, Медведь, Заяц и Лиса соревновались в беге по кольцевой трассе. Они стартовали одновременно, бежали с постоянными скоростями и через некоторое время вновь поравнялись друг с другом. Известно, что до этого момента Заяц обогнал Лису один раз, Лиса обогнала Волка три раза, Волк обогнал Медведя два раза. Сколько раз до этого момента Заяц обогнал Медведя?

Занятие 14.
Задачи на четность и симметрию

1. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 200902009?

2. В одну строку выписаны подряд числа 1, 2, 3, …, 2012. Можно ли расставить знаки « + » и « – » между ними так, чтобы в результате получилось число 2011?

3. Докажите, что не существует выпуклого многогранника, у которого число граней нечетно и каждая грань имеет нечетное число вершин.

4. Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечетное число фигур? Угловая клетка также считается диагональю доски.

5. На доске 7×7 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы они не имели общих сторон. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

6. Соты имеют форму квадрата 9×9, рис. 14. Все квадраты, кроме центрального, заполнены медом, в центре – деготь. За один ход разрешается разломить соты вдоль любой вертикальной или горизонтальной линии и съесть ту часть, где нет дегтя. Проигрывает тот, кому остался только деготь. Кто выиграет при правильной игре? А если деготь находится не в центре, а в клетках A, B?

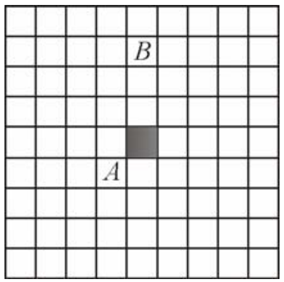

Рис. 14

Домашнее задание 14

1. Один рабочий может выполнить работу за 4 часа, а другой – за 6 часов. Сколько времени должен работать третий рабочий, если его производительность равна средней производительности первых двух?

2. На школьной викторине было предложено 30 вопросов. За каждый правильный ответ участнику турнира засчитывалось 7 очков, а за неправильный ответ с него списывалось 12 очков. Сколько верных ответов дал один из участников, если при окончательном подсчете оказалось, что он набрал 77 очков?

3. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен $32°$. Найти угол между основанием этого треугольника и высотой треугольника, проведенной из вершины угла при основании.

4. Трем братьям 58 лет. Сколько лет каждому, если $3/4$ лет младшего, равны $2/3$ лет среднего и равны $1/2$ лет старшего?

5. Решите уравнение:

$$2\frac{2}{3} : \left\{ \left[(3{,}72 - 0{,}02x) \cdot \frac{10}{37} \right] : \frac{5}{6} + 2{,}8 \right\} - \frac{7}{15} = 0{,}2 .$$

6. До какого веса надо выпарить 800 г 10 % раствора соли, чтобы довести ее содержание до 16 %?

Занятие 15.
Частота и вероятность

1. Относительная частота случайного события.

2. Вероятность случайного события.

3. За лето на Черноморском побережье было 67 солнечных дней. Какова частота солнечных дней на побережье? И какова частота пасмурных дней?

4. За март в городе родилось 2348 мальчиков и 2027 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков и частоту рождения девочек.

5. Подсчитано, что частота получения неудовлетворительной оценки на школьном экзамене равна 0,07. Известно, что в городе 100 человек не сдали экзамен. а) Найдите примерное число школьников, сдававших экзамен. б) Найдите примерное число школьников, сдавших экзамен успешно.

6. По статистике, на каждые 1 000 лампочек приходится 3 бракованные. Какова вероятность купить исправную лампочку?

7. Демографы утверждают, что вероятность рождения близнецов приблизительно равна 0,012. В скольких случаях из 10 000 рождений можно ожидать появление близнецов?

8. Известно, что среди 1 000 выпущенных лотерейных билетов 100 выигрышных. Какое наименьшее количество лотерейных билетов надо купить, чтобы выиграть с вероятностью 1?

Домашнее задание 15

1. Подсчитано, что частота появления «зайца» в электропоездах составляет 10 %. Известно, что за день 5 400 пассажиров купили в кассе билеты. Сколько примерно «зайцев» ехало в электропоездах?

2. Из пруда было выловлено 90 рыб, которых пометили и выпустили обратно в пруд. Через неделю из пруда выловили 84 рыбы, из которых 5 оказались помеченными. Сколько примерно рыб в пруду?

3. По неподвижному эскалатору человек спускается быстрее, чем поднимается. Что быстрее: спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору или спуститься и подняться по спускающемуся эскалатору? (Предполагается, что все скорости, о которых идет речь, постоянны, причем скорости эскалатора при движении вверх и вниз одинаковы, а скорость человека относительно эскалатора всегда больше скорости эскалатора.)

4. Дама сдавала в багаж семь предметов. Все они оказались украденными, но два каких-либо (по ее выбору) ей согласились поискать. Сколько у нее есть возможностей выбрать два любимых предмета?

5. В треугольнике ABC известны углы: $\angle BAC = 47°$, $\angle BCA = 39°$. Точки K и L выбраны соответственно на сторонах AB и BC так, что прямые KL и AC параллельны. Найдите сумму углов AKL и CLK.

6. Существуют ли три последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на квадрат какого-нибудь натурального числа, отличного от единицы?

Занятие 16.
Математические игры

1. Имеются одинаковые кучи камней. Двое играющих берут по очереди любое число камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает тот, кто взял последние камни. Кто выиграет при правильной игре, если было 3 кучи камней?

2. Двое играющих по очереди переводят часовую стрелку на 2 или 3 часа вперед. Если вначале часовая стрелка указывает на 12, а победителем является тот, после чьего хода она укажет на 6, узнайте, кто победит при правильной игре. Прежде чем остановиться на цифре 6, стрелка может сделать несколько оборотов.

3. На доске сначала написано число 1. Чуня прибавляет к нему 3, 5 или 7. К результату Проня должен прибавить 3, 5 или 7 так, чтобы получилось простое число. Затем опять Чуня прибавляет 3, 5 или 7 и так далее. Если Проня не сможет получить простое число, то он проигрывает. Если же Проня получит простое число, большее 100, то он выиграет. Кто выиграет при правильной игре?

4. Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит ноль. Кто выиграет при правильной игре?

5. Ладья стоит на поле a1. За ход разрешается сдвинуть ее на любое число клеток вправо или на любое число клеток вверх. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле h8. Кто из игроков обладает выигрышной стратегией?

6. Имеются две кучи камней. Двое играющих берут по очереди камни. Разрешается взять один камень из любой кучи или по одному камню из обеих куч. Выигрывает тот, кто взял последние камни. При каком числе камней в кучах выигрывает начинающий?

Домашнее задание 16

1. Шестизначное число оканчивается цифрой 2. Откинув эту цифру в конце числа и написав ее в начале числа, получим число, в три раза меньшее первоначального. Найдите первоначальное число.

2. В 12 часов дня часовая и минутная стрелки совпадают. Через какое наименьшее число минут стрелки вновь совпадут?

3. Найдите все целые числа, удовлетворяющие каждому из неравенств и отметьте их точками на числовой прямой: $|x-8| \le 0$, $3 < |x| < 7$, $|x| > 5$.

4. В равнобедренном треугольнике угол между биссектрисой угла при вершине и биссектрисой угла при основании равен $130°$. Найдите углы треугольника.

5. Молоко одной коровы содержит 5 % жира, молоко же другой – 3,5 %, но удой второй коровы на 30 % выше удоя первой. Сколько надо взять молока от первой коровы, чтобы получить жира на 5,4 кг больше, чем жир в молоке, которое дает за то же время вторая корова?

6. Решите уравнение: $\left[\left(6\frac{3}{7} - \frac{0,75x-2}{0,35}\right)\cdot 2,8 + 1,75\right] : 0,05 = 235$.

Занятие 17.
Пропорциональные отрезки в треугольнике. Трапеция

1. Свойство параллельных секущих сторон угла.

2. Докажите свойство медиан треугольника относительно разбиения ими площади данного треугольника.

3. Чему равна площадь треугольника, образованного средними линиями, если площадь треугольника равна S?

4. Покажите, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

5. В треугольнике ABC точка N на стороне AC и точка M на стороне BC выбраны так, что $AN : NC = CM : MB = 1 : 3$. Отрезки AM и BN пересекаются в точке P. Докажите, что $NP : PB = 1 : 6$.

6. В треугольнике ABC выбраны точка K на стороне AB и точка M на стороне BC так, что $AK : KB = 3 : 4$, $BM : MC = 2 : 9$. Через точки K и M проводятся прямые, параллельные стороне AC и пересекающие медиану BD в точках P и Q. Найдите отношение $PQ : BD$.

7. Боковая сторона трапеции разделена на три равные части, и из точек деления проведены отрезки, параллельные основаниям трапеции. Найдите длины этих отрезков, если $AD = 5$ м, $BC = 2$ м.

8. В параллелограмме $ABCD$ проводятся биссектрисы AE угла BAD и DF угла ADC, см. рис. 15. Найдите длину средней линии трапеции $AFED$, если $AB = 78$ мм.

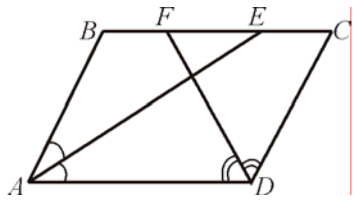

Рис. 15

9. Постройте трапецию, если заданы длины оснований и боковых сторон.

Домашнее задание 17

1. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

2. В треугольнике ABC выбраны точки D на AB, F на AC, G и H на BC так, что $AD : DB = 1 : 3$, $AC : FC = 10 : 7$ и DH параллельна AC, а GF параллельна AB. Отрезки DH и FG пересекаются в точке K, см. рис. 16. Найдите отношение $DK : KH$.

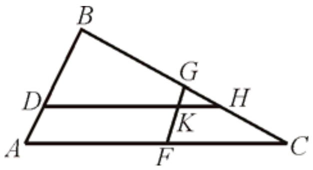

Рис. 16

3. Докажите, что при любых значениях a, b, c выполняется неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac$.

4. Трапеции $ABCD$ и $EFGH$ имеют общую среднюю линию, а их основания лежат на параллельных прямых, см. рис. 17. Найдите длину средней линии трапеции $AFGD$, если известно, что $AH = 99$ см, $EH = 46$ см, $BC = 21$ см, $BG = 42$ см.

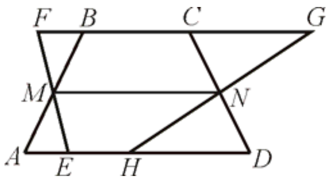

Рис. 17

5. Постройте трапецию, если заданы длины оснований и диагоналей.

6. Продав свеженадоенное молоко, Кот Матроскин купил шоколадные батончики для своих друзей. Дяде Федору он дал половину всех батончиков и еще половину батончика; Шарику – половину оставшегося и еще половину батончика; Галчонку – половину того, что осталось и еще половину батончика. Причем ни один батончик не был разрезан. Сколько шоколадных батончиков получил каждый, если Кот Матроскин раздал все?

Занятие 18.
Суммы, среднее арифметическое и средняя скорость

1. Два человека отправились на рынок продавать яблоки. У них было по 30 яблок. Один собирался продавать 2 яблока за 1 рубль, а другой – 3 яблока за 1 рубль. Перед началом торговли одного из них вызвали домой, он попросил другого продавца продать его яблоки. Тот стал продавать 5 яблок за 2 рубля. Если бы они торговали порознь, то выручили бы 10 рублей и 15 рублей, а продавая 5 яблок за 2 рубля, получили 24 рубля. Определите, куда исчез рубль.

2. В магазине есть на равную сумму конфеты стоимостью 2 рубля за килограмм и стоимостью 3 рубля за килограмм. По какой цене надо продавать смесь этих конфет?

3. Средний возраст одиннадцати игроков футбольной команды – 22 года. Во время матча один из игроков получил травму и ушел с поля. Средний возраст оставшихся игроков – 21 год. Сколько лет получившему травму игроку?

4. Четверо купцов заметили, что если сложатся без первого купца, то соберут 90 рублей, без второго – 85 рублей, без третьего – 80 рублей, а без четвертого – 75 рублей. Сколько у кого денег?

5. Автомобиль первую половину пути ехал со скоростью 50 км/час, а вторую половину – со скоростью 30 км/час. Какова его средняя скорость?

6. Белка за 20 минут приносит орех в гнездо. Далеко ли орешник от гнезда, если известно, что налегке белка бежит со скоростью 5 м/сек, а с орехом – 3 м/сек?

Домашнее задание 18

1. Аня и Таня вместе весят 40 кг, Таня и Маня – 50 кг, Маня и Ваня – 90 кг, Ваня и Даня – 100 кг, Даня и Аня – 60 кг. Сколько весит Аня?

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y+z+t=90, \\ x+z+t=85, \\ x+y+t=80, \\ x+y+z=75. \end{cases}$$

3. За 11 тугриков дают 14 динаров, за 22 рупии – 21 динар, за 5 крон – 2 талера, а за 10 рупий – 3 талера. Сколько тугриков можно выручить за 13 крон?

4. Воздушный шар летит со скоростью 15 км/час. Через 1 час 20 минут ветер меняет направление под углом $60°$ к первоначальному, но не меняет скорости. Определите, на каком расстоянии от точки вылета будет находиться воздушный шар через 1 час 20 минут после смены ветром направления.

5. Расстояние между пунктами A и B равно 100 км. Из пункта A в пункт B выехали одновременно два автомобиля. Первый проезжает за 1 час на 10 км больше второго и прибывает в B на 50 минут раньше его. Определите скорость каждого автомобиля.

6. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые кружки налито молоко. Один из гномов разлил все свое молоко в кружки остальных поровну. Его сосед справа сделал то же самое, затем следующий сосед справа и т. д. После того, как седьмой гном разлил все свое молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока первоначально было в каждой кружке?

Занятие 19.
Линейная функция. График линейной функции

1. Докажите, что графиком любой линейной функции является прямая линия.

2. Найдите все решения уравнения $2y-3=0$, рассматривая его как уравнение с двумя неизвестными x и y.

3. Найдите точку пересечения графиков функций: $y=2x-3$ и $y=-1/2x+2$.

4. Найдите с помощью графиков приближенное значение корней уравнений: а) $3x-4=6-2x$; б) $\frac{4}{2x-3}=\frac{6}{x-5}$.

5. Найдите значения k, если известно, что график линейной функции $y=kx$ проходит через точку: а) $(-2;-5)$; б) $(1;7)$.

6. Дан график линейной функции, см. рис. 18. Запишите формулу функции.

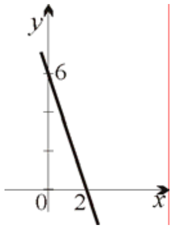

Рис. 18

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения линейной функции на заданном промежутке: а) $y = x + 3, \left[-2; -1\right]$; б) $y = -x + 5, \left[-1; 4\right]$.

8. Постройте график функции и найдите точки пересечения с координатными осями: а) $y = -3x + 6$; б) $y = 4x + 8$.

9. С геометрической точки зрения модуль числа можно рассматривать как расстояние от соответствующей этому числу точки координатной прямой до нуля. Используя это соображение, покажите, как на координатной прямой могут быть расположены точки a и b, если: а) $|a| = |b|$; б) $|a| > |b|$.

10. Постройте графики функций: а) $y = |x - 1|$; б) $y = |x| - 1$.

11. Найдите все значения k и b, если известно, что график линейной функции $y = kx + b$ проходит через точки (2; 10) и (–7; –10).

Домашнее задание 19

1. Коля и Петя вместе набрали чуть меньше 100 грибов, причем число Колиных грибов составляет $17/7$ от числа Петиных. Найдите, сколько грибов они собрали вместе.

2. В треугольнике ABC выбраны точки K и L на AB, M и N на AC так, что $AK : KB = 3 : 1$, $AM : MC = 2 : 1$ и MB параллельна NK, LM параллельна CK. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Найдите отношение $KP : PC$.

3. Постройте прямые, заданные уравнениями: а) $3x + y = 0$; б) $2x + 3y = 0$; в) $2x + 3y = 0,5$.

4. Найдите b, если известно, что графики функций $y = -2x + b$ проходят через точки: а) (5, –2); б) (–2,–1).

5. Вот очень простая Г+О=Л–О=В$\cdot$О=Л–О=М–К=А. Замените буквы цифрами так, чтобы получились верные равенства; при этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а разным – разные.

6. Расставьте скобки в левой части выражения: $2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5$ так, чтобы получилось верное равенство.

Занятие 20.
Делимости, задания на целочисленные решения

1. Докажите, что число $\dfrac{7^{2012^{2010}} - 3^{12^{10}}}{10}$ – целое.

2. В турнире принимают участие 15 шахматистов. Может ли быть, чтобы в некоторый момент каждый из них сыграл ровно 7 партий?

3. Докажите, что число $11^{10} - 1$ делится на 100.

4. Определите, при каких натуральных n число $\dfrac{3n+1}{5}$ – целое.

5. Остап Бендер умножил некоторое двузначное число на его первую цифру, Буратино умножил то же самое число на его вторую цифру, а Крокодил Гена сложил их результаты. Докажите, что сумма не равна 672.

6. Саша выписывает в ряд натуральные числа. Каждое следующее число больше предыдущего на 1, на 2 или на 3. Докажите, что рано или поздно в этом ряду появятся 100 чисел, необязательно подряд, имеющих общий делитель, больший 1.

7. Решите уравнение в целых числах: $x^2 - y^2 = 4$.

8. Решите уравнение в целых числах: $(y+1)\cdot(xy-1) = 3$.

Домашнее задание 20

1. Вдоль дороги длиной 60 км стоит несколько пеньков (больше одного). Первый турист идет по дороге со скоростью 5 км/час. Возле каждого пенька он останавливается и отдыхает одно и то же целое число часов. Второй турист путешествует на велосипеде со скоростью 12 км/час и на каждом пеньке он отдыхает в два раза дольше первого туриста. Вышли и пришли туристы одновременно. Сколько пеньков у дороги? Ответ обоснуйте.

2. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принес с собой либо один соленый помидор, либо два кочана гнилой капусты, либо три сырых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что помидор было 64 штуки. После спектакля оба артиста – король и герцог – были с ног до головы закиданы припасами, причем на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял

на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть капусты, но все помидоры полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

3. Найдите n таких разных целых чисел, что произведение любых $n-1$ из них делится на оставшееся число.

4. На один товар цена была снижена дважды, каждый раз на 15 %. На другой товар, бывший до снижения в одной цене с первым, снизили цену один раз – сразу на 30 %. На какой из этих товаров цена снизилась в большей степени?

5. Докажите, что для любых целых чисел a, b на 3 делится хотя бы одно из чисел: $a, b, a-b, a+b$.

6. В треугольнике все стороны различны, все углы острые, а высота, опущенная на сторону, в два раза больше этой стороны. Разрежьте треугольник на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

Занятие 21.
Геометрия на плоскости. Свойство окружности

1. Основные свойства касательной.

2. Рассмотрите треугольник ABC со сторонами $AB = 15$; $BC = 13$; $AC = 14$. Известно, что вписанная в него окружность касается стороны AB в точке M, стороны BC в точке N, стороны AC в точке K так, как на рис. 19. Найдите длину отрезка AK .

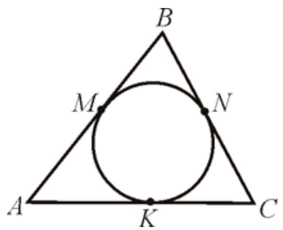

Рис. 19

3. Рассмотрите треугольник ABC со сторонами $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$. Покажите, что длина отрезка AK касательной, см. рис. 20, равна $AK = \dfrac{c+b-a}{2}$.

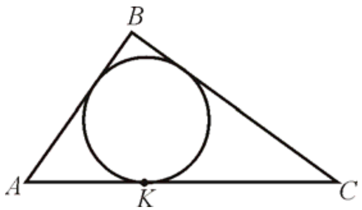

Рис. 20

4. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5.

5. Докажите, что суммы длин противоположных сторон описанного около окружности четырехугольника равны между собой.

6. Проведите касательную к данной окружности, проходящую через данную точку M вне окружности.

7. Из точки A проведите две касательные к окружности. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, перпендикулярна прямой, соединяющей точку A и центр окружности.

8. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 6, 8, 10 см.

Домашнее задание 21

1. Дана равнобедренная трапеция с периметром 20, описанная около окружности радиуса 2. Найдите длины оснований трапеции.

2. Проведите касательную к данной окружности параллельно данной прямой.

3. В треугольник со сторонами 6, 8, 10 см вписана окружность. Найдите отрезки, на которые точки касания разбивают стороны треугольника.

4. Аня, Женя и Дима вместе сделали 14 игрушек малышам. Аня сделала в 4 раза больше игрушек, чем Дима, а Аня с Женей – в 2 раза больше, чем Женя с Димой. Сколько игрушек сделал Дима?

5. Целые числа от 1 до 2 006 написаны на доске. Петя подчеркнул все числа, делящиеся на 2, затем все числа, делящиеся на 3, а затем все числа, делящиеся на 4. Сколько чисел подчеркнуто ровно 2 раза?

6. Найдите все числа, которые уменьшаются в 12 раз при зачеркивании в них последней цифры.

Занятие 22.
Множества точек на координатной плоскости

1. Изобразите на координатной плоскости OXY множество точек, удовлетворяющих условию: а) $x = 3$; б) $x > 3$; в) $x < 3$.

2. Изобразите на координатной плоскости OXY множество точек, удовлетворяющих условию: а) $-12 \le x \le 8$; б) $1{,}5 < y < 2$.

3. Изобразите на координатной плоскости OXY и опишите на алгебраическом языке множество точек, симметричных относительно оси абсцисс точкам полосы, заданной условием $2 \le y \le 5$.

4. Изобразите на координатной плоскости OXY множество точек, удовлетворяющих условию: а) $|x| = 3$; б) $|y| \le 2$; в) $|x| \ge 5$.

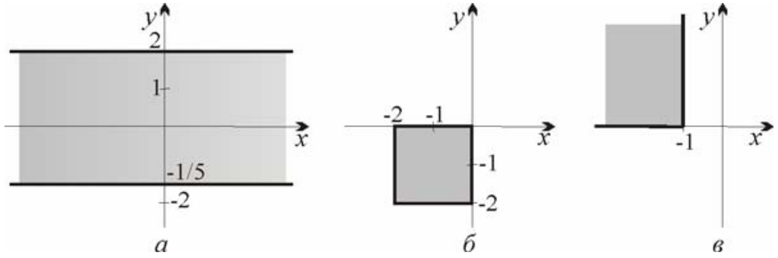

Рис. 22

5. Опишите на алгебраическом языке области, изображенные на рис. 22.

6. Изобразите на координатной плоскости OXY множество точек, удовлетворяющих условиям: а) $-1 \le x \le 4$ и $-2 \le y \le 3$; б) $0 \le x \le 5$ и $0 \le y \le 5$; в) $|x| \ge 3$ и $|y| \ge 4$.

7. Изобразите на координатной плоскости OXY множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям: а) $x^2 - y^2 = 0$; б) $y^2 - x^2 \le 0$.

8. Изобразите на координатной плоскости OXY множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют уравнению: $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$.

Домашнее задание 22

1. Изобразите на координатной плоскости OXY множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям: а) $x \le 0$ и $y \le 0$; б) $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$.

2. Изобразите на координатной плоскости OXY и опишите на алгебраическом языке множество точек, симметричных точкам прямоугольника, заданного условиями: $2 \le x \le 3$ и $2 \le y \le 4$ а) относительно оси ординат; б) относительно оси абсцисс; в) относительно начала координат.

3. В классе учится менее 50 школьников. За контрольную работу $1/7$ учеников получили пятерки, $1/3$ – четверки, $1/2$ – тройки. Остальные работы оказались неудовлетворительными. Сколько было таких работ?

4. В равнобедренной трапеции основания 42 и 54 см, угол при основании равен $45°$. Найдите площадь трапеции.

5. Постройте к данной окружности касательную прямую, проходящую под данным углом к заданной прямой. Сколько решений имеет задача?

6. Укажите хотя бы один пример того, как представить единицу в виде суммы квадратов четырех различных обыкновенных дробей.

Занятие 23.
Геометрия на плоскости. Многоугольники

1. Выпуклый четырехугольник.
2. Сумма внутренних углов четырехугольника.
3. Площадь четырехугольника.
4. Многоугольник, сумма внутренних углов выпуклого n-угольника.
5. Площадь многоугольника.
6. Постройте параллелограмм, равновеликий заданной трапеции.
7. Постройте параллелограмм, равновеликий заданному четырехугольнику.
8. Разделите треугольник на три равновеликие части прямыми, проходящими через заданную вершину треугольника.

Домашнее задание 23

1. Выразите площадь параллелограмма через две его высоты h и H и периметр P.

2. В классе 30 человек, 10 из них любят конфеты, 18 – сок, 18 – печенье. Одновременно конфеты и сок любят 6 человек, одновременно конфеты и печенье – 7, одновременно сок и печенье – 10 человек. Сколько человек в классе не любят ничего из перечисленного, если четверым нравятся одновременно конфеты, печенье и сок?

3. У Чебурашки имеется 16 апельсинов и весы, с помощью которых он может узнать суммарный вес любых трех апельсинов. Помо-

гите Чебурашке за 8 взвешиваний узнать общий вес шестнадцати апельсинов.

4. Найдите объем параллелепипеда, в основании которого прямоугольник с отношением длины к ширине $2:1$, его высота больше ширины основания на 3 м и сумма этих трех измерений равна 51 м.

5. В углах одинаковых правильных треугольников в произвольном порядке написаны числа 1, 2, 3. Может ли сумма чисел в каждом угле некоторой стопки из этих треугольников равняться 25?

6. Поезд длиной 900 м проходит 9 км туннель за 11 минут, от входа локомотива до выхода последнего вагона. Сколько времени потребуется при тех же условиях для прохождения туннеля длиной 18 км?

Занятие 24.
Комбинаторика

1. Перестановки.
2. Размещения.
3. Сочетания.
4. В конкурсе участвуют 8 школьников. Сколькими способами могут быть распределены места между ними?
5. Анаграмма – это «слово», полученное из данного слова перестановкой его букв (но не обязательно имеющее смысл). Сколько существует различных анаграмм: а) слова «график»; б) слова «интеграл»?
6. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?
7. Имеется 9 различных книг, четыре из которых – учебники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?
8. Семь мальчиков, в число которых входят Олег и Игорь, становятся в ряд. Найдите, число возможных комбинаций, если: а) Олег должен находиться в конце ряда; б) Олег должен находиться в начале ряда, а Игорь – в конце ряда; в) Олег и Игорь должны стоять рядом.
9. На соревнования по легкой атлетике приехала команда из 12 спортсменок. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4×100 м на первом, втором, третьем и четвертом местах?

10. Из 13 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?
11. В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории требуется выделить четырех мальчиков и трех девочек. Сколькими способами это можно сделать?

Домашнее задание 24

1. Две окружности касаются внутренним образом. Радиус одной окружности в три раза больше радиуса другой окружности. Найдите диаметры окружностей, если расстояние между их центрами равно 6 см.
2. Сколькими способами 5 мальчиков и 5 девочек могут занять в театре в одном ряду места с 1 по 10? Сколькими способами они могут это сделать, если мальчики будут сидеть на нечетных местах, а девочки - на четных местах?
3. Определите, делится ли число 30! на: а) 90; б) 94.
4. В городе Мухоморске телефонные номера состоят из шести цифр, причем первая цифра номера не может быть восьмеркой или нулем. Найдите, сколько телефонных номеров в Мухоморске.
5. Докажите неравенство: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2004}>2+0+0+4$.
6. В равнобедренной трапеции большее основание равно 7 см., угол при основании равен $60°$, боковая сторона равна 3,2 см. Найдите меньшее основание трапеции.

Занятие 25.
Системы линейных уравнений с двумя неизвестными

1. Решите системы уравнений методом подстановки:

а) $\begin{cases}\frac{3x+2y}{5}+\frac{x-3y}{6}=3,\\ 2x+7y+43=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{x+y}{8}+\frac{x-y}{6}=5,\\ \frac{x+y}{4}+\frac{x-y}{5}=10;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x-y=2,\\ 2x-2y=4.\end{cases}$

2. Решите системы уравнений методом сложения:

а) $\begin{cases} 3x-7y=-32, \\ 2x-3y=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x-\dfrac{x-y}{5}=11, \\ 2y-\dfrac{x+y}{3}=11; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x+3)(y+5)=(x+1)(y+8), \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1). \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x+(a+2)y=4, \\ 4x+(a+3)y=5, \end{cases}$ если a – фиксированное число.

4. Ученик за 3 общие тетради и 2 карандаша уплатил 66 копеек. Другой ученик за такие же 2 общие тетради и 2 карандаша уплатил 46 копеек. Найдите, сколько стоят общая тетрадь и карандаш.

5. Полуразность двух чисел равна 14,9. Найдите эти числа, если известно, что 24 % первого числа на 0,6 меньше второго числа.

6. Пароход за 9 часов проплыл сначала 100 км по течению реки, а затем 64 км против течения. В следующий раз пароход за 9 часов проплыл сначала 80 км против течения, а затем 80 км по течению. Найдите, какова скорость теплохода в стоящей воде.

7. Двое рабочих изготовили 162 детали. Первый работал 9 дней, а второй – 15 дней. Сколько деталей изготовил каждый рабочий, если первый изготовил за 5 дней на 3 детали больше, чем второй рабочий за 7 дней?

Домашнее задание 25

1. Решите систему уравнений методом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=6, \\ \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{x-y}{3}=6. \end{cases}$$

2. Решите систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} \dfrac{7x-2y}{2}+2x=6, \\ \dfrac{5y-8x}{3}-y=-2. \end{cases}$$

3. Два мастера получили за работу 234 рубля. Первый работал 15 дней, а второй – 14 дней. Сколько получал в день каждый из мастеров, если известно, что первый мастер за 4 дня получил на 22 рубля больше, чем второй за 3 дня?

4. Из точек и тире составляют всевозможные кортежи длиной 7. Найдите, какое число всевозможных кортежей можно составить.

5. На доске написаны три правильные несократимые дроби, дающие в сумме единицу, причем их числители – различные натуральные числа. Оказалось, что если каждую из этих дробей «перевернуть» (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей будет натуральным числом. Приведите пример таких дробей.

6. Сложите из фигур вида, изображенных на рис. 23, квадрат размером 9×9 с вырезанным в его центре квадратом 3×3.

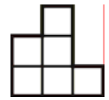

Рис. 23

Занятие 26.

Графические решения уравнений и систем уравнений

1. Найдите координаты точки пересечения двух прямых, заданных уравнениями: $7x-6y=0$ и $21x+2y=10$.

2. Решите системы уравнений графически:

а) $\begin{cases} y=3x, \\ 6x-2y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=1, \\ y-0,5x-1. \end{cases}$

3. Покажите алгебраически и графически, что системы уравнений имеют бесконечно много решений:

а) $\begin{cases} x+y=0, \\ 2x+2y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=0,5, \\ 4y+2x=1. \end{cases}$

4. Покажите графически, что системы уравнений имеют единственное решение: а) $\begin{cases} 2x+3y=13, \\ 3x-y=13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=7, \\ x-y=1. \end{cases}$

5. Решите систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=2, \\ x-3y-6=0. \end{cases}$$

6. Решите систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} |x|+|y|=2, \\ x-2y+2=0. \end{cases}$$

7. Решите систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} |x-1|+|y|=0, \\ (x-2)^2+y^2=1. \end{cases}$$

Домашнее задание 26

1. По окружности, длина которой 100 см., движутся равномерно две точки. Они встречаются через каждые 4 секунды, двигаясь в противоположных направлениях, и через каждые 20 секунд, двигаясь в одном направлении. Найдите скорости этих точек.

2. Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

3. Пятачку на день рождения подарили несколько разноцветных шариков, причем красных шариков среди них было 45 %. После того, как Пятачок отдал один синий и один зеленый шарик Ослику Иа-Иа, красных шариков стало ровно половина. Сколько шариков подарили Пятачку на день рождения?

4. Сложите из фигур вида, изображенных на рис. 24, прямоугольник размером 9×12.

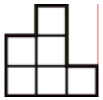
Рис. 24

5. Составьте линейное уравнение с двумя неизвестными, чтобы оно вместе с уравнением $-x-y=4$ образовало систему: а) имеющую единственное решение; б) имеющую бесконечно много решений; с) не имеющую решений.

6. Решите систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} |x|-|y|=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Занятие 27.
Геометрия на плоскости.
Геометрические множества точек на плоскости

1. Постройте геометрическое множество точек плоскости, равноудаленных от заданной точки.

2. Постройте геометрическое множество точек плоскости, равноудаленных от сторон заданного угла.

3. Постройте геометрическое множество точек плоскости, равноудаленных от концов заданного отрезка.

4. Постройте геометрическое множество точек плоскости, равноудаленных от трех заданных точек, не лежащих на одной прямой.

5. Постройте геометрическое множество точек плоскости, равноудаленных от заданной прямой.

6. Постройте геометрическое множество точек плоскости, равноудаленных от заданной прямой и заданной точки.

7. Постройте геометрическое множество точек плоскости, из которых заданный отрезок виден под прямым углом; под произвольно заданным углом.

8. Постройте треугольник по длинам трех его сторон. Определите, когда задача имеет решение.

9. Постройте треугольник по заданным длинам двум сторон и высоте, опущенной на одну из заданных сторон.

10. Постройте треугольник по длине основания, углу при основании и высоте, опущенной на основание.

Домашнее задание 27

1. Постройте треугольник, если заданы: прямая, на которой лежит его основание и две точки, являющиеся основаниями высот, опущенных на боковые стороны.

2. Дана окружность. С помощью циркуля и линейки определите ее центр.

3. Через вершины выпуклого четырехугольника параллельно его диагоналям проведены четыре прямые. Докажите, что площадь полученного при этом параллелограмма в два раза больше площади заданного четырехугольника.

4. Найдите все двузначные числа, которые равны произведению их цифры единиц на 9.

5. Найдите все натуральные значения a, при которых корень уравнения $(a-5)\cdot x=18$ является числом натуральным.

6. Старший брат продал на базаре 5 баранов, а младший – 5 поросят и 7 кур. Чтобы разделить выручку поровну, старший брат отдал младшему свой перочинный нож. Определите, сколько стоил этот нож, если 3 барана стоили столько же, сколько 2 поросенка и 9

кур, 3 поросенка – столько же, сколько стоит 1 баран и 4 курицы, а курица стоит 2 талера (денежная единица Средневековой Германии).

Занятие 28.
Геометрические преобразования на плоскости

1. Гомотетия на плоскости, определение и основное свойство.
2. Даны угол с вершиной O и внутри него точка A. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через заданную точку A.
3. В данный треугольник впишите прямоугольник, у которого две вершины лежали бы на данной стороне, и длины сторон относились бы как $3:1$.
4. Центральная и осевая симметрии.
5. Параллельный перенос и поворот.
6. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.
7. Через данную точку внутри угла проведите прямую так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный внутри угла, делился данной точкой пополам.
8. Через данную точку внутри угла проведите прямую так, чтобы прямая отсекала от угла треугольник наименьшей площади.

Домашнее задание 28

1. Найдите быстро значение выражения:
$$\frac{m^2\left(m+n^2\right)\cdot\left(m^3-n^6\right)\cdot\left(m^2-n\right)}{m^2+n^2}, \text{ где } m=4, \quad n=16.$$
2. Вычислите значение выражения:
$$\left(27^{10}-5\cdot 81^4\cdot 3^{12}+4\cdot 9^8\cdot 3^8\right):\left(41\cdot 3^{24}\right).$$
3. Докажите, что два последовательных нечетных числа являются взаимно простыми числами.
4. Докажите, что численное значение выражения $\left(x^2-ax+b\right)^2+$ $+2\left(x^2-ax+b\right)\cdot\left(ax-b\right)+\left(ax-b\right)^2$ не зависит от значений a и b.
5. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из этих сторон.

6. Через данные точки A и B проведите две прямые так, чтобы угол между ними делился данной прямой KM пополам.

Занятие 29.
Геометрия на плоскости. Задачи на построение

1. Впишите в данную окружность прямоугольник так, чтобы одна из его сторон была равна и параллельна данному отрезку.
2. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы одной из его вершин была данная точка, а две другие лежали на двух данных прямых.
3. Постройте параллелограмм по сторонам и углу между диагоналями.
4. Даны три точки. Постройте треугольник, для которого эти точки являются серединами сторон.
5. Даны угол ABC и точка M внутри него. На стороне BC постройте точку, равноудаленную от прямой AB и точки M.
6. Дан угол ABC и точка M внутри него. Найдите на сторонах угла такие точки P и H, чтобы треугольник MPH имел наименьший периметр.

Домашнее задание 29

1. Старинная задача Древнего Рима. Вдова обязана оставшееся после мужа наследство в 3 500 золотых монет разделить с ребенком, который должен родиться. Если это сын, то мать, по римским законам, получает половину сыновней доли. Если родится дочь, то мать получает двойную долю дочери. Но получилось, что родились близнецы – сын и дочь. Как следует разделить наследство, чтобы выполнить все требования закона?
2. Два поезда вышли одновременно с двух станций навстречу друг другу. Первый достиг станции назначения спустя час после их встречи, второй спустя 2 часа 15 минут после встречи. Во сколько раз скорость одного поезда больше скорости другого?
3. Ивану сейчас в четыре раза больше лет, чем было его сестре Маше, когда она была моложе Вани в два раза. Сколько сейчас лет Ивану и его сестре, если через 15 лет им вместе будет 100 лет?

4. Семиклассник мог купить на свои карманные деньги либо 7 пирожных и 8 булочек, либо 4 пирожных и 16 булочек. Сколько он смог бы купить одних пирожных?

5. Дан треугольник *ABC*, вершина *C* которого не поместилась на чертеже. Проведите медианы из вершин *B* и *C* этого треугольника.

6. Разрежьте параллелограмм на две части так, чтобы из них можно было сложить ромб.

Занятие 30.
Текстовые задачи на проценты и смеси

1. Цена товара была повышена на 12 %. На сколько процентов надо снизить новую цену, чтобы получить первоначальную?

2. Рабочий день уменьшился с 8 часов до 7. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы заработная плата осталась прежней?

3. На первом поле 65 % площади засеяно овсом. На втором поле овсом занято 45 % площади. Известно, что на первом и втором полях под овсом занято 53 % общей площади. Какую часть всей засеянной площади составляет первое поле?

4. Имеется молоко с жирностью 3,5 % и 1,5 %. Сколько молока каждого сорта нужно взять, чтобы получить 10 литров молока с жирностью 3 %?

5. В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5 % железа, содержание железа в оставшейся руде повысилось на 20 %. Определите, какое количество железа осталось в руде.

6. Смешали 30 % раствор соляной кислоты с 10 % и получили 600 грамм 15 % раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Домашнее задание 30

1. Из вершины *A* параллелограмма *ABCD* проведены высоты *AK* и *AM*. Может ли оказаться так, что точка *K* лежит на стороне параллелограмма, а точка *M* – на продолжении стороны?

2. Гонщик-мотоциклист подсчитал, что при увеличении скорости на 10 % он пройдет круг по кольцевой дороге за 15 минут. На

сколько процентов он должен увеличить скорость, чтобы пройти круг за 12 минут?

3. Морская вода содержит 5 % соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5 %?

4. Найдите два числа, если их сумма, произведение и частное от деления равны между собой.

5. На рис. 25 точки *M, N, K, L* расположены на сторонах четырехугольника так, что $AM : MB = AL : LD = CN : NB = = CK : KD = 1 : 3$. Докажите, что *MNKL* – параллелограмм.

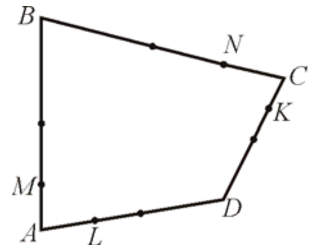

Рис. 25

6. Волк и Заяц катались по кругу на коньках. Время от времени Волк обгонял Зайца. Когда Заяц стал двигаться по кругу в противоположном направлении, они стали встречаться в пять раз чаще. Во сколько раз скорость Волка больше скорости Зайца?

Занятие 31.
Геометрия в пространстве и геометрия на сфере

1. Расположение прямых в пространстве.

2. Примеры многогранников: куб и тетраэдр.

3. Используя развертку куба, подсчитайте наибольшее число параллельных между собой ребер куба.

4. Сколько ребер куба вы можете назвать скрещивающимися по отношению к фиксированному ребру куба?

5. Объясните, как по развертке куба определять ребра, через которые проходят параллельные прямые; скрещивающиеся прямые.

6. Покажите, что в любой треугольной пирамиде никакие два ребра не параллельны.

Домашнее задание 31

1. Вдоль стен квадратного бастиона требовалось поставить 28 часовых. Комендант разместил их так, как показано на рис. 26, по 8 человек с каждой стороны. Затем пришел полковник и, недовольный размещением часовых, распорядился расставить солдат так,

чтобы с каждой стороны их было по 9. Вслед за полковником пришел генерал, рассердился на полковника за его распоряжение и приказал разместить солдат по 10 человек с каждой стороны. Каково было размещение солдат в двух последних случаях?

1	6	1
6		6
1	6	1

Рис. 26

2. Два парома ходят между двумя противоположными берегами реки с постоянными скоростями. Достигнув берега, каждый из них тут же начинает двигаться в обратном направлении. Паромы отчалили от противоположных берегов одновременно, встретились впервые в 700 м от одного из берегов, поплыли дальше каждый к соответствующему берегу, затем повернули назад и вновь встретились в 400 м от другого берега. Определите ширину реки.

3. Учащиеся одного класса написали контрольную работу по математике. Треть из них неверно решили по одной задаче, четвертая часть класса неверно решила по 2 задачи, одна шестая – по 3 задачи и одна восьмая – неверно решили все 4 задачи. Сколько учеников правильно решили все задачи, если в классе не более 30 человек?

4. Иван Иванович пришел в магазин, имея 1 000 рублей. В магазине продавали веники по 58 рублей 50 копеек и тазики по 83 рубля, других товаров в магазине уже не осталось. Сколько веников и сколько тазиков ему нужно купить, чтобы потратить как можно больше денег?

5. Каждые 15 минут с конечной остановки отправляется автобус. Время, за которое он должен пройти весь маршрут, равно полутора часам. Сколько нужно выпустить автобусов на маршрут, чтобы организовать бесперебойное движение?

6. Имеется 10 ящиков. В некоторых из них лежит еще по 10 ящиков меньшего размера. В некоторых из меньших ящиков лежит еще по 10 ящиков. Определите общее число ящиков, если заполнено всего 54 ящика.

Занятие 32.
Приближенные вычисления. Абсолютная и относительная погрешности

1. Приближенное значение.
2. Абсолютная и относительная погрешность вычисления.

3. Правило округления некоторого числа с заданной точностью.
4. Приближенные вычисления: вычитание вместо деления.
5. Приближенное вычисление квадратного корня.
6. Найдите приближенную длину диагонали квадрата, сторона которого равна 3 см. Оцените погрешность приближения.

Домашнее задание 32

1. Оля пригласила на свой день рождения гостей. Среди гостей были две самые близкие подруги Таня и Лена. Все девочки были большими любительницами шоколадных конфет. Известно, что за праздничным столом Таня и Лена вместе съели на 5 конфет больше, чем Оля; Оля и Лена вместе съели на 9 конфет больше, чем Таня. Известно также, что одна из девочек была брюнетка, другая – блондинка, а третья – шатенка. Определите, сколько конфет съела каждая из этих девочек и какой у нее цвет волос, если брюнетка съела количество конфет, кратное трем, а шатенка съела 11 конфет.

2. Завод выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него 3 красными и 7 синими шариками. Сколько различных погремушек может быть выпущено? Две погремушки считаются одинаковыми, если одна из них может быть получена из другой только передвижением шариков по кольцу и переворачиванием.

3. Отец по имени Николай с сыном и отец по имени Петр с сыном отправились по грибы. Число грибов, собранных Николаем, оканчивается на 2, а число грибов, собранных его сыном, – на 4. Число грибов, собранных Петром, также оканчивается на 3, а число грибов, собранных его сыном, на 4. Число грибов, собранных грибниками вместе, совпадает с квадратом некоторого целого положительного числа. Как зовут сына Николая?

4. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

5. Два приятеля Александр и Сергей ехали на машине по шоссе с постоянной скоростью. «Ты заметил, – спросил Сергей Александра, – что щиты с рекламой сотовых телефонов расставлены на оди-

наковом расстоянии друг от друга? Интересно было бы узнать, на каком именно». Александр посмотрел на часы и сосчитал, сколько рекламных щитов промелькнуло за окном в течение одной минуты. «Удивительное совпадение! – воскликнул Сергей. – Если это число умножить на 10, то получится в точности скорость нашей машины в километрах в час». Предположим, что минута, отмеренная Александром, начинается и кончается в моменты, когда машина находится как раз посреди расстояния, отделяющего один рекламный щит от другого. Определите, чему равно это расстояние.

6. В классе учатся 30 человек. Во время диктанта один ученик сделал 12 ошибок, а остальные – меньше. Докажите, что в классе имеется, по крайней мере, три ученика, сделавших одинаковое количество ошибок.

Приложение.

Варианты районных и городских олимпиад Новосибирской области для учащихся 7 классов

(все варианты взяты из сборника [15])

Вариант 1

1. Пятьсот конфет разложили в 35 пакетов. Докажите, что найдется по крайней мере два пакета с одинаковым числом конфет.

2. Какой может быть сумма цифр у числа, делящегося на 7?

3. Каждая сторона и каждая диагональ выпуклого шестиугольника окрашена в синий или красный цвет. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в вершинах этого шестиугольника, все стороны которого имеют один цвет.

4. После каждой стирки кусок мыла уменьшается на 20 %. После скольких стирок он уменьшится не менее, чем на две трети? Найдите наименьшее такое число.

5. Куб с ребром в 1 м распилили на кубики с ребром в 1 мм и выложили их в ряд. Какой длины получится ряд?

Вариант 2

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 37 км, в 7 часов 18 минут и в 7 часов 48 минут вышли два автобуса с одной и той же постоянной скоростью. Велосипедист, выехавший из

B в A в 7 часов 28 минут, встретил первый автобус в 7 часов 58 минут. А второй – в 8 часов 19 минут. Найдите скорости велосипедиста и автобусов.

2. Отцу сейчас в три раза больше лет, чем сыну было 10 лет назад, а когда сыну будет столько лет, сколько отцу сейчас, то отцу будет в два раза больше лет, чем сыну через 9 лет после настоящего момента. Сколько лет сейчас отцу и сколько сыну?

3. Известно, что $a+b+c=7$, $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}=\dfrac{7}{10}$. Найдите значение выражения $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}$.

4. Говорят, что в XIX в. каждый десятый мужчина на Руси был Иван, а каждый двадцатый – Петр. Если это верно, то кого было больше – Иванов Петровичей или Петров Ивановичей?

5. Всякий ли треугольник можно разбить на треугольнички, не имеющие целиком совпадающих общих сторон? Части сторон треугольничков совпадать могут.

Вариант 3

1. Из девяти спичек выложите фигуру, которая бы содержала один квадрат и два ромба.

2. По какому правилу написаны числа: 1, 2, 8, 28, 100, 356,…? Напишите следующие два числа.

3. Десять футболистов вместе забили 54 гола. Докажите, что двое из них забили одинаковое количество голов, если известно, что один из них забил 7 голов и каждый забил хотя бы один гол.

4. Можно ли квадрат 6×6 клеток разрезать на прямоугольники из 1×4 клеток?

5. В соревнованиях по бегу на дистанцию 120 м участвуют три бегуна. Скорость первого из них на 1 м/сек больше скорости второго, а скорость второго равна полусумме скоростей первого и третьего. Определите скорость третьего бегуна, если известно, что первый бегун пробежал дистанцию на 3 секунды быстрее третьего, и их скорости выражаются целыми числами метров в секунду.

6. Ученик купил портфель, авторучку и книгу. Если бы портфель стоил в пять раз дешевле, авторучка в два раза дешевле, а книга в 2,5 раза дешевле, то вся покупка стоила бы 200 рублей. Если бы

портфель стоил в два раза дешевле, авторучка в четыре раза дешевле, а книга в три раза дешевле, то вся покупка стоила бы 300 рублей. Сколько стоила покупка на самом деле?

Вариант 4

1. В коробке лежали спички. Их количество удвоили, а затем убрали 8 спичек. Остаток спичек снова удвоили, а затем снова убрали 8 спичек. Когда эту процедуру проделали в третий раз, в коробке спичек не осталось. Сколько спичек было в коробке?

2. Петя и Вася отвечали на вопросы теста, причем Петя ответил на 20 % больше, чем Вася, но Вася ответил правильно на 10 % больше Пети (проценты берутся от числа вопросов, заданных отдельно каждому). Оказалось, что они правильно ответили на одинаковое число вопросов. Сколько процентов Петиных ответов были верными?

3. На доске написано выражение: $4-5-7-11-19=22$. Расставьте знаки модуля так, чтобы получилось верное равенство.

4. Восстановите цифры:

$$\begin{array}{r} *******A \\ \times \qquad\qquad A \\ \hline BBBBBBBBB \end{array}.$$

5. Один рабочий может выполнить работу за 4 часа, а другой – за 6 часов. Сколько должен работать третий рабочий, чтобы сделать эту работу, если его производительность равна средней производительности первых двух?

Вариант 5

1. Докажите, что число $7^{2009}+3^{2009}$ делится на 10.

2. Маше через столько лет, сколько сейчас Пете, будет в 6 раз больше лет, чем ей исполнилось, когда Петя родился, а родились они в один и тот же день года. Сколько лет каждому из них сейчас, если в тот день, когда Пете станет столько лет, сколько Маше сейчас, им вместе будет 32 года?

3. В кружках треугольника, см. рис. 27, расположите цифры от 1 до 9, не повторяя их, так, чтобы их сумма по каждой стороне треугольника равнялась бы 20. Найдите два таких расположения, в одном из которых 9 стоит в вершине, а в другом – не в вершине.

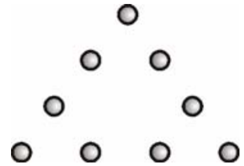

Рис. 27

4. Некто продает двух коней с седлами, из коих цена одного седла 120 рублей, а другого – 25 рублей. Первый конь с хорошим седлом втрое дороже другого коня с дешевым седлом, а второй конь с хорошим седлом вдвое дешевле первого коня с дешевым седлом. Какова цена каждого коня?

5. Дано число $\overline{20a03b}$, где a, b – цифры, которое делится на 36. Найдите все такие числа.

Ответы и краткие решения

Занятие 1

1. Ответ: за 35 дней, так как за 140 дней жена выпьет $14-10=4$ бочонка кваса, то есть 1 бочонок за $140/4=35$ дней.

2. Ответ: 10 и 120 орехов.

3. Ответ: хлеба несли 5 мужчин, 1 женщина и 6 детей.

4. Ответ: у Якова и Герасима – 1 овца, у Ивана и Михаила – по 2 овцы, у Петра – 4 овцы.

5. Ответ: через 23 дня.

6. Ответ: 8/10 фунта цейлонского, по 1/10 фунта индийского и китайского, тогда получим фунт чая ценой 6 гривен: $6=\frac{8}{10}\cdot 5+\frac{1}{10}\cdot 8+\frac{1}{10}\cdot 12$.

7. Ответ: годовое жалованье слуги – 10 рублей, а постоялец вообще не имел денег.

8. Ответ: министр может вынуть листок и, не глядя на него, сжечь.

9. Ответ: двоеточие.

10. Указание: симметрия.

Домашнее задание 1

1. Указание: вспоминаем арабские цифры.
2. Ответ: 48 яиц.
3. Ответ: женщина собрала 160 яблок.
4. Ответ: 36 гусей.
5. Ответ: расстояние наименьшее, если точка O – основание высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.
6. Указание: строим угол в $24°$, как дополняющий данный до прямого, затем делим его пополам два раза, получаем $6°$.

Занятие 2

2. Указание: постройте отрезок, равный сумме пяти данных отрезков.
3. Решение: через две произвольные точки проведите прямую, отметьте точку M и постройте отрезки: $MK = AB$ и $PK = CD$.
4. Решение: а) постройте точки, делящие середины сторон пополам; б) постройте биссектрисы данных углов; в) опустите из каждой вершины треугольника перпендикуляры к сторонам.
5. Указание: угол в $30°$ – в любом прямоугольном треугольнике, у которого гипотенуза в два раза длиннее одного из катетов, остальные углы получаются сложением, вычитанием и делением пополам.
6. Указание: постройте биссектрису угла и перпендикуляр.
7. Решение: постройте окружность O_1 произвольного радиуса с центром в вершине угла, пересечение этой окружности с лучами BA и BC – точки K и M соответственно. Постройте окружности с центрами: в K – O_2 и M – O_3 этого же радиуса, L и N – точки пересечения окружностей O_2 и O_1; O_1 и O_3 соответственно. Лучи BN и BL делят данный угол ABC на три равные части.

Домашнее задание 2

1. Ответ: все лягушата – веселые.
2. Указание: постройте окружности радиусом AB с центрами в точках K и M.
3. Указание: постройте перпендикуляр через середину отрезка, соединяющего эти две точки
4. Указание: постройте биссектрису угла и проведите через данную точку перпендикуляр к биссектрисе.
5. Ответ: расстояние между пунктами 6 километров; второй пешеход прошел 2,4 км.
6. Решение: число представляет собой сумму двух нечетных чисел и поэтому является четным, то есть составным.

Занятие 3

3. Ответ: а) 7^{163}; б) 2^{55}; в) 9.
4. Ответ: а) 6^{m+3}; б) 5^{101}.
5. Ответ: а) a^{5m+5}; б) b^{nm+2n}; в) m^{20}; г) a^{14}.
6. Ответ: а) $\frac{1}{81}$; б) 1.
7. Ответ: а) 1; б) 1125; в) 25; г) 0,216.
9. Ответ: а) –1; б) 0; в) 111110.
10. Ответ: увеличится в 4 раза; в 9 раз; в 100 раз; в n^2 раз.
11. Ответ: а) –2; б) 5.

Домашнее задание 3

1. Ответ: а) 0; б) 16.
2. Ответ: а) 4; б) 3,9; в) –10.
3. Ответ: 13,5.
4. Указание: постройте отрезок длиной $\sqrt{2}$.
5. Ответ: 1000.
6. Ответ: 200.

Занятие 4

1. Ответ: 2 нуля.
2. Ответ: 7, периодичность остатков.
3. Ответ: 8 делителей.
4. Ответ: $a = 0, b = 8;$ $a = 8, b = 0.$
5. Ответ: 58, так как $(n+2) = \text{НОК}(3,4,5,6) = 60$.

6. Ответ: 24.

7. Ответ: количество цифр кратно 6, проверяем, что $111111 \vdots 7$.

8. Указание: $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

Домашнее задание 4

1. Ответ: да, теорема верна; воспользуйтесь десятичной формой записи целого числа.

2. Ответ: 1023457896.

3. Ответ: 547, так как $(n-7) \vdots 10,12 \Rightarrow (n-7) \vdots 60$ и $500 < n < 600 \Rightarrow n-7 = 540$.

4. Ответ: 32 и 71 или 1 и 2272, так как $2272 = 2^5 \cdot 71$.

5. Ответ: $2297 = 2010 + 41 \cdot 7$.

6. Ответ: на 35 %, так как, если a – производительность в день, то $30a \cdot 0,9 = 27a$ составляют 90 % поля, значит, механизатор делал 135 % плана в день, поскольку $27a : 20 \cdot 100\,\% = 135\,\%$.

Занятие 5

6. Ответ: а) $2x^3 + 10x^2 + 6x$; б) $22a^2 + 4a - 15a^3$; в) $9a^3 - 3a$; г) $125m^3 + 27n^3$.

7. Ответ: а) $2z^2 \cdot g\left(z^3 \cdot g - 4z + 6g^2\right)$; б) $(b-c)(a-3)$; в) $(x-y)(x-y-a)$.

8. Ответ: а) $\left(b^2 + 2c^2\right)(5c + 16a)$; б) $(m-n)(9m-5)$; в) $(x-y+1)(x-y)$.

9. Указание: примените формулу $a^n - b^n$ для $n = 20$.

10. Указание: заметьте, что $7^{100} = \left(7^2\right)^{50} = 49^{50}$; $2^{100} = \left(2^2\right)^{50}$; используйте формулу разложения на множители выражения $a^n - b^n$.

11. Ответ: а) $2^{64} - 1$; б) $\dfrac{3^{20} - 1}{2}$.

Домашнее задание 5

1. Ответ: а) $36x^4 - 18$; б) $a^{16} - b^{16}$.

2. Ответ: а) $\left(x^2 + y^2 - 1\right)(a-b)$; б) $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)$.

3. Указание: воспользуйтесь формулами разности и суммы кубов а) $a^3 - b^3$; б) $a^3 + b^3$.

4. Ответ: 266,336 г.

5. Ответ: 12,5.

6. Ответ: 80 страниц.

Домашнее задание 6

1. Указание: использовать признаки равенства треугольников.

2. Ответ: 21, 42, 63, 84.

3. Ответ: 6 кг железа.

4. Указание: использовать формулу нечетного числа.

5. Ответ: второй игрок всегда выигрывает, если дополняет сумму до числа, кратного шести.

6. Ответ: 20 коров. Решение: назовем порцией a траву, съедаемую одной коровой за 1 час. Тогда 40 коров поели $2400a$, 30 коров – 3 000a; тогда за 40 часов наросло 600a или росло 15a в час. Значит, на поле вначале было 1 500a травы. Значит, за 300 часов нарастет 4 500a, а всего 60 000a, что дает 20 коров на поле.

Занятие 7

2. Ответ: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

3. Ответ: 12.

4. Ответ: $\dfrac{15}{2}$.

5. Ответ: длины высот равны $h_c = (12 \cdot 14)/13$, $h_a = (12 \cdot 14)/15$.

6. Ответ: $16\dfrac{6}{7}$ см^2.

7. Решение: треугольники AOC и BOD равны; треугольники AOE и BOF равны, и равны треугольники COE и DOF.

8. Решение: треугольники ADC и BCE равны, следовательно, $CM = CN$ и $\angle MCN = 60°$, тогда $MN = MC = CN$.

Домашнее задание 7

1. а) ответ: 60; б) решение: $160^2 - 3^2 = 256 \cdot 100 - 9 = 25591$; в) решение: $a^2 = (a-b)(a+b) + b^2$; $(987-13)(987+13)+13^2 = 974 \cdot 1000 + 169 = 974169$.

2. Указание: примените формулу для разности квадратов $a^2 - b^2$.

3. Ответ: 33 см^2.

4. Ответ: 14 см^2.

5. Ответ: 121 кг. Решение: пусть в отаре $100n$ голов, а вес одного барана x кг, тогда: вес баранов $45nx$, что составляет 55 % веса всей отары. Вес овец – $55n \cdot 81$ кг, что составляет 45 % веса всей отары. Составим пропорцию $\frac{45nx}{55n \cdot 81} = \frac{55}{45}$.

6. Ответ: 36 слагаемых. Решение: подсчитаем сумму $S = \frac{n(n+1)}{2} = 100a + 10a + a = 111a = 3 \cdot 37 \cdot a$, $n(n+1)$ должно делиться на 37, значит $n = 37$ или $n+1 = 37$. Если $n = 37$ и $n+1 = 38$ то $S = 708$ – не удовлетворяет условию, если $n = 36$ и $n+1 = 37$ то $S = 666$.

Домашнее задание 8

1. Ответ: 60 и 30.
2. Ответ: 40 км/час.
3. Ответ: 3 кг и 7 кг.
4. Ответ: $24k + 5$, $k \in Z$.
5. Указание: использовать геометрические множества точек на плоскости, равноудаленных от заданной прямой и от заданной точки.
6. Указание: так как в произведении $p^2 - 1 = (p-1) \cdot (p+1)$ оба множителя четные, значит, произведение делится на 8; и среди трех последовательных чисел $p-1, p, p+1$ одно обязательно делится на 3.

Занятие 9

1. Ответ: за 45 минут.
2. Ответ: еще 6 рабочих.

3. Ответ: 40 минут и 50 минут.
4. Ответ: 17 фартуков.
5. Ответ: через $3\frac{1}{3}$ минуты.
6. Ответ: 40 пакетов и 60 пакетов в час.
7. Ответ: 5 км/ч; 15 км/ч.
8. Ответ: 6 дней.

Домашнее задание 9

1. Ответ: 90 страниц.
2. Указание: выполните действия.
3. Ответ: 14.
4. Решение: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45000$; $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18000$; 9000.
5. Ответ: 16,5 см^2.
6. Ответ: 1683. Решение: 3(1+2+3+…+33)=1683.

Занятие 10

1. Решение: с помощью трех взвешиваний расположим по весу три пакета, взвешивая каждую пару, потом положим на одну чашку весов оставшийся четвертый пакет, а на другую тот их трех, который имеет средний вес. Пятым взвешиванием сравним вес четвертого пакета либо с самым тяжелым, либо с самым легким из трех.

2. Решение: т. к. в волейболе нет ничьих, то каждая игра заканчивается для команды ее выигрышем или проигрышем. Рассмотрим две команды, имеющие равное число побед. Обозначим за *А* ту команду, которая выиграла у второй из двух рассматриваемых команд, а вторую команду – через *В*. Так как *В* имеет столько же побед, что и команда *А*, а команде *А* она проиграла, то найдется команда *С*, у которой команда *В* выиграла, но которой команда *А* проиграла, иначе у *В* было бы меньше выигрышей, чем у *А*. Итак, искомые три команды найдены.

3. Ответ: химиков и алхимиков поровну. Решение: если химиков больше, то среди 51 опрошенного непременно встретится хотя бы один химик и он скажет правду – что химиков больше. Это противоречит условию. Если алхимиков больше, чем химиков, то хотя бы один из опрошенных – алхимик и он скажет неправду – что химиков

больше. Это противоречит условию. Остается единственная возможность – химиков и алхимиков поровну!

4. Ответ-утверждение: меня должен съесть лев.

5. Ответ: старшая – Тоня, младшая – Галя.

6. Решение: уравновесим на весах груз более тяжелый, чем тело, которое нужно взвесить. Затем на чашку с гирями положим взвешиваемое тело и снимем несколько гирь, чтобы восстановить равновесие. Вес снятых гирь равен весу тела.

7. Ответ: команда-победительница набрала 7 очков. Решение: всего было 12 $(3\cdot 4)$ игр. В каждой встрече – 2 очка, а всего очков – 24. Так как $5+6+7+8=26>24$, то такой случай невозможен. Поэтому $5+6+6+7=24$. Значит, команда-победительница набрала 7 очков.

8. Ответ: двум младшим по два года, старшему – 9 лет. Решение: всего троек чисел, произведение которых равно 36, будет: 1) 1, 4, 9, тогда сумма равна 14; 2) 1, 6, 6, тогда сумма равна 13; 3) 1, 3, 12, сумма равна 16; 4) 1, 2, 18, сумма равна 21; 5) 2, 2, 9, сумма равна 13; 6) 3, 3, 4, сумма равна 10, 7) 2, 3, 6, сумма равна 11; 8) 1, 1, 36, сумма равна 38. Если бы тренер увидел номер автобуса, отличный от 13, то он смог бы сразу назвать возраст. Значит, он увидел 13. Утверждение Нины относительно того, что старший из братьев любит спорт, равносильно тому, что близнецы не старшие мальчики, поэтому случай $1+6+6=13$ отпадает, остается случай $2+2+9=13$.

Домашнее задание 10

1. Ответ: груздей – 11, рыжиков – 19. Решение: если бы в корзине нашлись 12 груздей, то ни один из них не был бы рыжиком. Поэтому количество груздей не превосходит 11. Если бы груздей было меньше 11, то их было бы не больше 10. В таком случае можно было бы найти 20 не груздей. Значит, груздей ровно 11. Аналогично, рыжиков 19.

2. Ответ: они ровесники, им по 6 лет.

3. Указание: достаточно проверить два соотношения $x_1+x_2+x_3=x_6$, $x_1+x_6<x_3+x_5$, каждое из которых необходимо для правильности надписей, где через x_k обозначена масса гирьки с надписью «k граммов».

4. Ответ: совокупность прямых, проходящих через точку M внутри угла с вершиной M, образованного стороной исходного угла и лучом, параллельным второй стороне.

5. Ответ: относительная скорость между пешеходами – 1,25 км/час, с которой 20 км будет преодолено за 16 часов, за которые первый догонит второго, при этом будет соответственно пройдено 5 и 4 кругов.

6. Ответ: 648, так как $648=8\cdot 9\cdot 9$, где первая цифра выбирается по условию восемью способами, а все остальные – девятью.

Занятие 11

5. Решение: $\angle BCA=\angle CAD$.

6. Решение: $\angle ALK=\angle LAC=\angle KAL$.

9. Ответ: для а) и б): $110°; 70°; 70°$.

Домашнее задание 11

1. Решение: рассмотрите равные треугольники ADB и ACB; ADO и COB; ADC и CDB.

2. Ответ: $108°$.

3. Ответ: $\angle LMN=120°$; $\angle NKL=60°$; $\angle MNK=95°$; $\angle MLK=85°$.

4. Ответ: 12; 15; 18.

5. Указание: примените формулу для a^2-b^2.

6. Ответ: 4,5 и 8,5 лет; 6,5 и 10,5 лет.

Занятие 12

6. Ответ: $S=120\ \text{см}^2$.

7. Ответ: $S=15\ \text{см}^2$.

8. Ответ: $S=30\ \text{см}$.

Домашнее задание 12

1. Ответ: 11 орехов. Решение: так как обезьяны собрали орехов поровну и поровну бросили, то принесли они поровну. Имеем $35=5\cdot 7$. Возможны два случая: 1) обезьян было 5, принесли по 7,

бросили по 4 ореха, значит, каждая собрала $11 = 7 + 4$; 2) обезьян было 7, принесли по 5, бросили по 6 орехов, значит, каждая собрала $11 = 5 + 6$.

2. Решение: для нумерации страниц, пронумерованных однозначными числами, потребуется 9 цифр, двузначными – $2 \cdot 90 = 180$ цифр, а всего получаем 189 цифр; оставшиеся $301 - 189 = 112$ цифр должны быть использованы для нумерации страниц с трехзначными номерами, но 112 на 3 не делится.

3. Ответ: $33°,\ 57°$; так как биссектриса прямого угла дает угол в $45°$.

4. Ответ: 12, 25 км; поскольку $\frac{s-3,5}{3,5} = t + 0,5;\ \frac{s-3,5}{5} = t - 0,25$, где s, t – длина пути и время до отхода поезда соответственно.

5. Решение: если $ABCD$ – искомый, то AC – биссектриса угла A. Пусть точка E симметрична точке B относительно AC, лежит на AD, считаем, что $AD > AB$. По симметрии имеем: $BC = EC$ и $AB = AE$. В треугольнике ECD сторона CD известна, $EC = BC$, $ED = AD - AE = AD - AB$. Построим треугольник ECD по трем сторонам, продолжим ED и откладываем на нем отрезок D, а затем строим треугольник ABC по трем сторонам.

6. Ответ: $t = \frac{480}{11}$ минут. Решение: имеем уравнение $6t = 120 + {}+0,5t + 120$, где t – искомое время в минутах; угловая скорость минутной стрелки $6\frac{\text{град}}{\text{мин}}$, часовой – $0,5\frac{\text{град}}{\text{мин}}$, угол между стрелками – $120°$.

Занятие 13

4. Ответ: $a > b$.
5. Ответ: а) <; б) <; в) <.
6. Указание: воспользуйтесь свойством неравенств.
7. Указание: воспользуйтесь свойством неравенств.
8. Указание: воспользуйтесь свойством неравенств.
9. Указание: воспользуйтесь свойством неравенств.
10. Ответ: при $a > 0$ и любом b неравенство имеет решениями числа $x < \frac{b}{a}$; при $a < 0$ и любом b неравенство имеет решениями

числа $x > \frac{b}{a}$; при $a = 0$ и $b > 0$ имеет решениями все значения x; при $a = 0$ и $b < 0$ – не имеет решения.

11. Ответ: а) $x < \frac{15}{26}$; б) $x > 9$; в) $x \geq 1,5$.

Домашнее задание 13

1. Ответ: а) <; б) <; в) >; г) >.
2. Ответ: а) $a > 0$; б) $a > 0$; в) a и b одного знака.
3. Указание: воспользуйтесь свойством неравенств.
4. Указание: покажите, что $\angle ACD = \angle ADC$.
5. Ответ: 300 000 рублей.
6. Ответ: 8 раз. Решение: предположим, что самый медленный бегун – Медведь, пробежал x кругов, тогда обогнавший его два раза Волк в момент последнего обгона пробежал на два круга больше, а поскольку через некоторое время они поравнялись друг с другом, то еще на один круг больше, то есть $x + 3$ круга. Рассуждая аналогично: Лиса, обогнавшая Волка три раза, пробежала $x + 3 + 4$ круга, а Заяц, обогнавший Лису один раз, пробежал $x + 7 + 2$ круга, т. е. на 9 кругов больше, чем Медведь.

Занятие 14

1. Ответ: нет, четность.
2. Ответ: нет, четность.
3. Указание: надо подсчитать число вершин двумя способами – как принадлежащие граням и отдельно – ребрам, получим противоречие в четности.
4. Ответ: не может, так как черные поля доски можно разбить как на 7 диагоналей одного направления, так и на 8 направлений перпендикулярного направления.
5. Ответ: первый, если займет центральную клетку.
6. Ответ: второй, второй, первый; помогает симметрия – центральная в первом случае, относительно главной диагонали во втором случае и относительно горизонтали – в третьем случае.

Домашнее задание 14

1. Ответ: 4,8 часа.

2. Ответ: 23 вопроса решено верно. Получаем, что 210 очков набрал бы ученик, если бы на все вопросы ответил верно, 133 очка потерял он за счет нерешенных задач. Разница между одним верным и одним неверным ответом в очках равна $19 = 7 + 12$, отсюда $133 : 19 = 7$ – вопросов было решено неверно, тогда $30 - 7 = 23$ вопросов было решено верно.

3. Ответ: $74°$.

4. Ответ: 16 лет, 18 лет и 24 года.

5. Ответ: 1.

6. Ответ: 500 г.

Занятие 15

3. Ответ: $\frac{67}{92} \approx 0,73$; $\frac{25}{92} \approx 0,27$.

4. $\frac{2348}{4375} \approx 0,54$; $\frac{2027}{4375} \approx 0,46$.

5. Ответ: а) примерно 1430 школьников; б) примерно 1330 школьников.

6. Ответ: 0,997.

7. Ответ: в 120 случаях.

8. Ответ: 901 билет.

Домашнее задание 15

1. Ответ: 600 «зайцев».

2. Ответ: примерно 1500 рыб. Указание: обозначив примерное количество рыб через x, составьте пропорцию: $\frac{90}{x} = \frac{5}{84}$.

3. Ответ: быстрее спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору. Решение: пусть x и y – скорости, с которыми человек по неподвижному эскалатору спускается и поднимается соответственно, l – длина эскалатора, u – скорость эскалатора. Тогда время, за которое человек спустится и поднимется по поднимающемуся эска-

латору, будет равно $t = \frac{l}{x-u} + \frac{l}{y+u}$, а время, за которое он спустится и поднимется по спускающемуся эскалатору, равно $T = \frac{l}{x+u} + \frac{l}{y-u}$; $t - T = \frac{2lu \cdot \left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 - u^2\right)\left(y^2 - u^2\right)} < 0$.

4. Ответ: 21.

5. Ответ: $274°$.

6. Ответ: да, существует. Решение: приведем несколько примеров: а) $48 = 3 \cdot 4^2$; $49 = 7^2$; $50 = 2 \cdot 5^2$; б) $98 = 2 \cdot 7^2$; $99 = 11 \cdot 3^2$; $100 = 10^2$; в) $124 = 31 \cdot 2^2; 125 = 5 \cdot 5^2; 126 = 14 \cdot 3^2$ указанные тройки наименьшие из возможных.

Занятие 16

1. Ответ: начинающий забирает за один ход все камни из одной кучи, а затем каждым ходом уравнивает количества камней в двух оставшихся кучах.

2. Ответ: первый, он ставит на 2, затем на 8 (второй на -5), затем в следующие 2 хода, дополняет ход второго до 5 и заканчивает.

3. Ответ: выиграет Чуня. Решение: в первой сотне есть лишь одна тройка последовательных нечетных составных чисел: 91, 93, 95. Поэтому единственный шанс остановить игру в пределах сотни – получить число 88. Чуня может это сделать, называя числа 8, 18, 28, …, 88. В самом деле, если Проня прибавит 3, то Чуня – 7, если 5, то –5, если 7, то –3.

4. Ответ: побеждает первый. В этой игре выигрывает тот, кто получит 1. Проигрышными позициями являются нечетные числа , поэтому побеждает первый.

5. Ответ: выиграет второй игрок. Выигрышная стратегия второго игрока – каждым ходом возвращать ладью на диагональ a1-h8. Здесь классы выигрышных и проигрышных позиций обладают свойствами: всякий ход из проигрышной позиции ведет в выигрышную, в любой выигрышной есть ход, который переводит ее в проигрышную.

6. Ответ: начинающий выигрывает во всех случаях, кроме тех, когда в обеих кучках четное число камней.

Домашнее задание 16

1. Ответ: 857 142.

2. Ответ: $65\frac{5}{11}$ минут. Минутная стрелка за минуту делает 1/60 оборота, часовая стрелка за минуту делает $\frac{1}{60\cdot 12}$ оборота. За минуту минутная стрелка сделает на $\frac{11}{60\cdot 12}=\frac{1}{60}-\frac{11}{60\cdot 12}$ оборота больше часовой, а до следующего совпадения минутная стрелка сделает на целый круг больше, поэтому минутная догонит часовую через $1:\frac{11}{720}=\frac{720}{11}=65\frac{5}{11}$ минут.

3. Ответ: 8; 4, 5, 6; все целые меньше –5 и все целые больше 5.

4. Ответ: $20°,\ 80°,\ 80°$. Рассмотрите углы треугольника AOB, где O – точка пересечения биссектрис треугольника.

5. Ответ: 1 200 кг.

6. Ответ: 4.

Занятие 17

1. Ответ: $\frac{S}{4}$.

2. Указание: соедините середины сторон и докажите, что отрезки попарно параллельны и равны.

3. Указание: проведите прямую NK параллельно AM. Прямые AM и NK являются параллельными секущими сторон угла ACB, прямые PM и NK являются параллельными секущими сторон угла NBC.

4. Ответ: $30:77$.

5. Ответ: 3 м и 4 м.

6. Ответ: 78 мм. Указание: треугольники ABE и CDF равнобедренные.

7. Указание: рассмотрите треугольник, который получится, если через вершину меньшего основания трапеции провести прямую параллельно боковой стороне.

Домашнее задание 17

1. Указание: соедините середины сторон и докажите, что отрезки попарно параллельны и равны. Учтите, что угол между диагоналями ромба – прямой.

2. Ответ: $2:3$.

3. Решение: сложите левые и правые части неравенств: $a^2+b^2\geq 2ab;\ b^2+c^2\geq 2bc;\ a^2+c^2\geq 2ac$.

4. Ответ: 107,5 см.

5. Указание: рассмотрите треугольник, который получится, если через конец одной из диагоналей провести прямую, параллельную другой диагонали, до пересечения с продолжением основания трапеции.

6. Ответ: 7 батончиков. Решение: очевидно, что Галчонок получил один батончик, что составляет половину остатка и еще полбатончика. Значит, второй остаток (после получения Шариком) составляет батончик. Откуда следует, что Шарик получил два батончика. Следовательно, если Галчонок получил один батончик, то дядя Федор получил четыре.

Занятие 18

1. Решение: первые 10 покупателей купят 20 дорогих и 30 дешевых яблок. Рубль исчез потому, что оставшиеся 10 дорогих яблок продали не по два яблока за рубль, а как смесь, по 5 яблок за 2 рубля.

2. Ответ: по 2,4 рубля за килограмм, так как, если x, y – веса двух сортов конфет, то $2x=3y=N\Rightarrow x=3m,\quad y=2m,\quad N=6m\Rightarrow k\cdot(x+y)=$ $=2N\Rightarrow k=\frac{2N}{x+y}=\frac{2\cdot 6m}{3m+2m}=\frac{12}{5}$.

3. Ответ: 32 года.

4. Ответ: 20, 25, 30, 35 рублей. Решение: всего денег у купцов: $(90+85+80+75):3=110$ рублей, поэтому можно найти, сколько денег у первого: $110-90=20$, у второго: $110-85=25$, у третьего и четвертого соответственно: $110-80=30,\ 110-73=35$.

5. Ответ: 37,5 км/час.

6. Ответ: 2 250 м, так как $\frac{S}{3}+\frac{S}{5}=1\,200$ секунд.

Домашнее задание 18

1. Ответ: 20 кг.
2. Ответ: $x = 20,\ \ y = 25,\ \ z = 30,\ \ t = 35$.
3. Ответ: 13 тугриков. Указание: вычислите отношения стоимости тугрика к стоимости динара – $14:11$, динара к рупии – $22:21$, рупии к талеру – $3:10$, талера к кроне – $5:2$ и перемножьте эти дроби.
4. Ответ: 20 км.
5. Ответ: 30 км/час и 40 км/час.
6. Ответ: $\frac{6}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{0}{7}$ литров. Легко проверить, что эти дроби подходят, осталось показать, что других ответов нет. Пусть x – наибольшее количество молока, оказавшееся за все время переливаний у какого-либо гнома Г, когда пришла его очередь разливать. Тогда, после очередного цикла из 7 разливаний, их можно неограниченно продолжать, у Г накопится не более чем $6 \cdot \frac{x}{6} = x$ литров, причем равенство возможно, если только каждый гном разливает одно и то же количество x молока и получения k порций у него в кружке $\frac{kx}{6}$ литров, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Вычислить x можно из условия, что всего молока 3 литра.

Занятие 19

3. Ответ: (2; 1). Решение: постройте в одной системе координат.
5. Ответ: а) 3, б) 6.
6. Ответ: $y = -3x + 6$.
7. Ответ: а) 1, 2; б) 1, 6.
8. Ответ: а) (0, 6) и (2, 0); б) (0, 8) и (–2, 0).
11. Ответ: $k = 2\frac{2}{9};\ \ b = 5\frac{5}{9}$.

Домашнее задание 19

1. Ответ: 96 грибов.

2. Ответ: $1:2$.
3. Решение: проведите прямые через точки: а) (0, 0) и (1, –3); б) (0, 0) и (–3, 2); в) $\left(0, \frac{1}{6}\right)$ и $\left(-3, 2\frac{1}{6}\right)$.
4. Ответ: а) 8; б) –5.
5. Решение: $4 + 2 = 8 - 2 = 3 \cdot 2 = 8 - 2 = 7 - 1 = 6$.
6. Решение: $(2:3):((4:5):6) = 5$.

Занятие 20

1. Указание: последние цифры четвертой степени цифр 7 и 3 – единицы, проверьте.
2. Ответ: не может, так как число партий, посчитанное двумя способами, имеет разную четность: $15 \cdot 7 \neq 2 \cdot k$.
3. Указание: рассмотрите степень $(10+1)^{10}$ как произведение десяти множителей.
4. Ответ: $n = 4m + 3$, перебор по остаткам $n = 5m + r,\ \ r = 1, 2, 3,\ \ 4$.
5. Решение: Гена в результате нашел произведение числа на сумму его цифр. Поскольку это число делится на три, то и само число и сумма его цифр должна делиться на 3. Но тогда произведение должно делиться на 9, а 672 на 9 не делится.
6. Решение: если среди выписанных Сашей чисел имеется 100 четных, то утверждение задачи выполнено. Предположим, что Саша написал меньше ста четных чисел. Следовательно, с какого-то момента он перестал выписывать четные числа, дальше соседние числа отличаются ровно на два. Но тогда их остатки при делении на три периодически повторяются: 2, 1, 0, 2, 1, 0, …Поэтому найдутся хотя бы 100 чисел, делящихся на 3.
7. Ответ: $(2,0), (-2,0)$.
8. Ответ: $(1,2), (1,-2), (0,-4)$.

Домашнее задание 20

1. Ответ: 7 пеньков. Решение: первый турист находился в движении 12 часов, а второй – 5 часов. Значит, второй турист отдыхал на

7 часов больше. Следовательно, первый турист отдыхал ровно 7 часов. Так как 7 – простое число, то пеньков может быть только 7.

2. Ответ: 101 зритель. Решение: пусть x – число яиц, y – кочанов капусты, тогда $64+x+y=4x+6y \Rightarrow 3x+5y=64$. Это уравнение имеет 4 пары решений в целых числах: (3, 11), (8, 8), (13, 5), (18, 2). Поскольку число яиц кратно 3, а количество кочанов четно, то подходит только последний вариант. Итого получаем 64 помидора, 30 яиц и 7 кочанов капусты, всего – 101 зритель.

3. Ответ: $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n$.

4. Ответ: второй товар дешевле, сравните числа $(1-0{,}15)\cdot(1-0{,}15)$ и $(1-0{,}3)$.

5. Указание: перебор по остаткам различных вариантов значений для a и b.

6. Указание: решение задачи видно из чертежа, см. рис. 28, если учесть, что $\Delta BEL = \Delta CFL$, $\Delta DKA = \Delta EKB$ и сторона AC равна половине высоты BH.

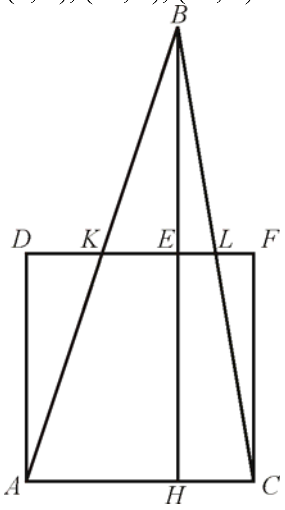

Рис. 28

Занятие 21

2. Ответ: 8.

3. Решение: $AK = \dfrac{AB+AC-BC}{2}$.

4. Ответ: 1. Указание: воспользуйтесь формулой из задачи № 3.

5. Указание: используйте свойство длин касательных.

6. Указание: постройте окружность на OM как на диаметре.

7. Решение: $AM = AN$, прямые OA и MN пересекаются в точке K, треугольник MNA – равнобедренный, AK является биссектрисой и следовательно высотой.

8. Ответ: 2 см.

Домашнее задание 21

1. Ответ: 2 и 8.

2. Решение: опустите из центра окружности O перпендикуляр на данную прямую. Из точки пересечения перпендикуляра и окружности восстановите перпендикуляр.

3. Ответ: 6 см, 4 см, 2 см.

4. Ответ: 2 игрушки.

5. Решение: чисел делящихся на 6 (и на 2, и на 3) $2006 = 6\cdot 334+2$ в данном ряду 334, а поскольку каждое второе из них делится на 12, мы получим $334:2=167$ чисел, удовлетворяющих нашим условиям. Аналогично чисел делящихся на 4 (и на 2, и на 4) $2006=4\cdot 501+2$ в данном ряду 501 и каждое третье делится на 12. Мы получим $501:3=167$. Всего получаем $167+501-167=501$ число.

6. Ответ: 12, 24, 36 и 48. Решение: пусть искомое число $y=10x+a$, a – число единиц, x – число целых десятков, а не цифра, стоящая во второй позиции справа в десятичной записи: $10x+a=12x$, $2x=a$; a – четно и находится между 1 и 9. Значит, если $a=2$, то $x=1$ и $y=12$; если $a=4$, то $x=2$ и $y=24$; если $a=6$, то $x=3$ и $y=36$; если $a=8$, то $x=4$ и $y=48$.

Занятие 22

3. Ответ: $-5 \le y \le -2$.

5. Ответ: а) $-1{,}5 \le x \le 2$; б) $-2 \le x \le 0$ и $-2 \le y \le 0$; в) $x \le -1$ и $y \ge 0$.

8. Решение:
$$2x^2-5xy+2y^2 = 2x^2-4xy-xy+2y^2 = (x-2y)(2x-y).$$

Домашнее задание 22

1. Ответ: см. рис. 29.

2. Ответ:
а) $-3 \le x \le -2$ и $2 \le y \le 4$;
б) $2 \le x \le 3$ и $-4 \le y \le -2$;
в) $-3 \le x \le -2$ и $-4 \le y \le -2$.

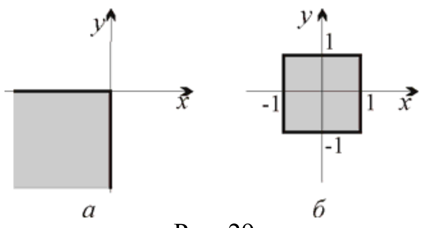

Рис. 29

3. Ответ: одна работа из 42.

4. Ответ: 288 см^2.

5. Ответ: 2 решения.

6. Ответ: количество различных вариантов бесконечно, например: $\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{18}\right)^2+\left(\frac{5}{18}\right)^2+\left(\frac{17}{18}\right)^2=1$

Домашнее задание 23

1. Ответ: $S=\dfrac{P\cdot h\cdot H}{2\cdot(h+H)}$.

2. Ответ: 3, см. рис. 30, при помощи кругов Эйлера: $30-1-2-4-3-5-6-6=3$.

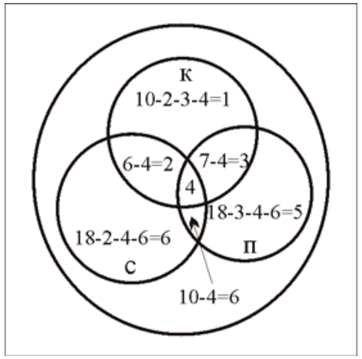

Рис. 30

3. Указание: за 4 взвешивания находим суммарный вес 12 апельсинов, взвешивая их по 3. Останутся апельсины под номерами 13, 14, 15 и 16 четыре взвешивания. Используем их следующим образом: 13, 14 и 15; 14, 15 и 16; 15, 16 и 13; 16, 13 и 14. Суммируя результаты этих четырех взвешиваний, найдем утроенный вес последних четырех апельсинов, а значит, и суммарный вес всех шестнадцати.

4. Ответ: $V=4320\ m^3(12\times24\times15)$.

5. Указание: сумма чисел в углах одного треугольника равна 6. Если бы сумма в каждом углу стопки была 25, то общая сумма – 75, что противоречит четности общей суммы.

6. Ответ: 21 минута, скорость равна 900 м/мин.

Занятие 24

4. Ответ: $8!=40320$.

5. Ответ: а) $6!=7200$; б) $8!=40320$.

6. Ответ: 18.

7. Ответ: $6!\ 4!=17280$.

8. Ответ: а) 720; б) 120; в) 1440.

9. Ответ: $9\cdot10^9-9\cdot9!$

10. Ответ: 11880.

11. Ответ: 286.

12. Ответ: 400400.

Домашнее задание 24

1. Ответ: 3 и 9 см.

2. Ответ: 14 400 способами.

3. Решение: а) $90=2\cdot5\cdot9$, среди множителей 30! есть числа 2, 5 и 9, следовательно, 30! делится на 30; б) $94=2\cdot47$, число 47 простое и больше числа 30. Так как среди множителей числа 30 нет 47, то 30! не делится на 47.

4. Ответ: $8\cdot10^5$.

5. Решение:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2004}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2004}=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots\left(\frac{1}{2004}+\ldots+\frac{1}{2004}\right).$$

В первой скобке два слагаемых, во второй – четыре слагаемых, в третьей – восемь, … и в последней – 512. Таких скобок девять и сумма дробей в каждой – $1/2$. Таким образом, исходная сумма больше, чем $1+\frac{1}{2}+9\cdot\frac{1}{2}=6=2+0+0+4$.

6. Ответ: 3,8 см.

Занятие 25

1. Ответ: а) (3;7); б) (20;20); в) (a+2;a).

2. Ответ: а) (15;11); б) (2;7); в) (41;58).

3. Ответ: если $a=1$ система решения не имеет; если $a\neq1$ $x=\dfrac{a-2}{a-1}$, $y=\dfrac{1}{a-1}$.

4. Ответ: 20 коп и 3 коп.

5. Ответ: 40; 10,2.

6. Ответ: 18 км/ч. Указание: введите новые переменные $a=1/(x+y)$ и $b=1/(x-y)$, чтобы свести систему уравнений к линейной.

7. Ответ: 72 и 90 деталей.

Домашнее задание 25

1. Ответ: (5;11).
2. Ответ: (2;5).
3. Ответ: 10 и 6 руб.
4. Решение: $2^7 = 128$.
5. Ответ: например, $\frac{2}{11}; \frac{3}{11}; \frac{6}{11}$.
6. Ответ: смотри рис. 31.

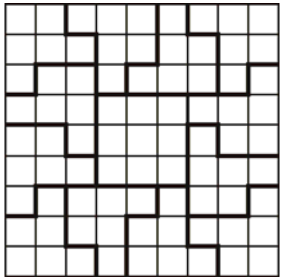

Рис. 31

Занятие 26

1. Ответ: $\left(\frac{3}{7}; \frac{1}{2}\right)$.

2. Указание: постройте прямые и найдите координаты точки пересечения.

3. Указание: постройте прямые.
4. Указание: постройте прямые.
5. Ответ: см. рис. 32, $M(0;-2)$ и $N(\approx 2,4; \approx -1,2)$.
6. Ответ: $M(-2;\ 0)$ и $K\ (0,7;\ 1,3)$, см. рис. 33.
7. Ответ: $M(1;\ 0)$.

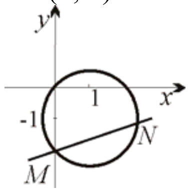

Рис. 32

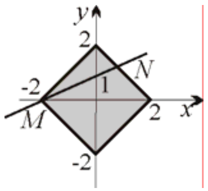

Рис. 33

Домашнее задание 26

1. Ответ: 15 см/сек и 10 см/сек.
2. Ответ: $9 \cdot 10^9 - 9 \cdot 9!$
3. Ответ: 20 шариков. Решение: пусть x – количество красных шариков, $x+2$ – количество не красных, а всего подарили $2x+2$

шарика. С помощью пропорции составим уравнение: $100x = 45(2x+2)$.

4. Ответ: см. рис. 34.
5. Ответ: а) $3x + y = 1$;

б) $2x + 2y = -8$; в) $x + y = 0$.

6. Ответ: см. рис. 35.

$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$

$C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right); D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

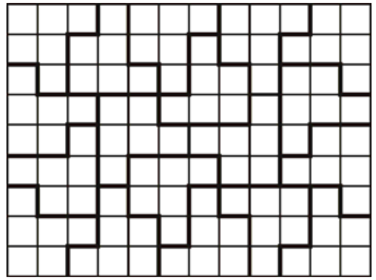

Рис. 34

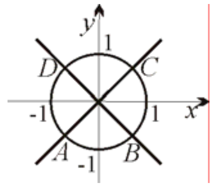

Рис. 35

Домашнее задание 27

1. Указание: постройте окружность с центром на заданной прямой, проходящей через две заданные точки.
2. Указание: срединный перпендикуляр к хорде является диаметром, центр окружности – точка пересечения диаметров.
3. Указание: используйте равенство треугольников.
4. Ответ: 45.
5. Ответ: 5.
6. Ответ: 3 талера.

Домашнее задание 28

1. Ответ: 0, так как $m^2 - n = 16 - 16 = 0$.
2. Ответ: 8.
3. Указание: пусть последовательные нечетные числа $2n+1$, $2n+3$ имеют наибольший общий делитель d, тогда разность этих чисел (равна 2) должна делиться на d, что возможно только при $d=1$, так как данные числа нечетные.
4. Указание: данное выражение представляет квадрат суммы чисел $x^2 - ax + b$ и $ax - b$, который равен x^4.

5. Указание: используйте геометрическое множество точек, равноудаленных от заданной прямой и от заданной точки.

6. Указание: используйте осевую симметрию относительно заданной прямой.

Домашнее задание 29

1. Ответ: вдова должна получить 1 000 монет, сын – 2 000 монет, дочь – 500 золотых монет.

2. Ответ: скорость одного поезда в полтора раза больше скорости другого. Решение: более быстрый поезд прошел до точки встречи путь во столько раз длиннее пути медленного поезда, во сколько раз скорость быстрого поезда превышает скорость медленного. После встречи быстрому поезду оставалось пройти до станции путь, пройденный до встречи медленным поездом, и наоборот. Другими словами, быстрый поезд после встречи прошел путь во столько раз короче, во сколько раз больше его скорость. Если обозначить отношение скоростей через x, то на прохождение пути от места встречи до станции быстрый поезд употребил в x^2 меньше времени, чем медленный. Отсюда $x^2 = \frac{9}{4}$, $x = \frac{3}{2}$.

3. Ответ: Ивану – 40 лет, Маше – 30 лет. Решение: пусть Ивану сейчас $4x$ лет, Маше – y лет. Тогда $4x - y = 2x - x$; $4x + y + 30 = 100$.

4. Ответ: 10 пирожков, поскольку 8 булочек стоят столько же, сколько стоят 3 пирожка.

5. Указание: проведем параллельную стороне BC прямую, отсекающую от угла A треугольник, подобный данному; построим медиану AK этого треугольника, она будет медианой и треугольника ABC; аналогично поступаем для вершины B.

6. Указание: разрежем параллелограмм $ABCD$ по такой линии AE, что $AE = AD$; прикладывая отрезанный треугольник ABE к стороне CD (новый треугольник DCF), получим ромб $AEFD$.

Занятие 30

1. Ответ: снизить на $10\frac{5}{7}$ %.

2. Ответ: повысить на $14\frac{2}{7}$ %.

3. Ответ: $2/5$ площади.

4. Ответ: 7,5 литра; 2,5 литра.

5. Ответ: железа в руде осталось 187,5 кг.

6. Ответ: 150 г и 450 г.

Домашнее задание 30

1. Ответ: да, может. Решение: в любом параллелограмме, не являющемся прямоугольником, основания высот, проведенных из вершины острого угла, лежат на продолжениях сторон, а основание одной из высот, проведенных из вершины тупого угла, может попасть на продолжение стороны параллелограмма, если угол между меньшей диагональю и одной из сторон – тупой.

2. Ответ: увеличить на 37,5 %.

3. Ответ: 70 кг.

4. Ответ: -1 и $1/2$.

5. Указание: докажите, что каждый из данных отрезков параллелен одной из диагоналей четырехугольника.

6. Ответ: скорость Волка в полтора раза больше скорости Зайца.

Домашнее задание 31

2	5	2
5		5
2	5	2

3	4	3
4		4
3	4	3

Рис. 36

1. Ответ: см. рис. 36.

2. Ответ: 1700 м. Решение: паром A отчаливает от берега, проплывает 700 м и встречает паром B. К этому моменту они проходят суммарное расстояние, равное ширине реки. Паром A доплывает до противоположного берега, поворачивает обратно и вновь встречает B. К этому моменту они проходят суммарное расстояние, равное ут-

роенной ширине реки. Поскольку их скорости постоянны, то A всего прошел расстояние $3\times 700=2100$ м. Ширина реки меньше расстояния, пройденного A, на 400 м, т. е. равна 1700 м.

3. Ответ: 3 ученика. Решение: наименьшее отличное от нуля целое положительное число, делящееся на 3, 4, 6 и 8, равно 24. Следующее такое число равно 48, что больше 30. Таким образом, в классе 24 ученика. Поскольку с ошибками написали $8+6+4+3=21$ человек, то 3 ученика решили все задачи правильно.

4. Ответ: 10 веников и 5 тазиков. Решение: пусть куплено m веников и n тазиков, тогда $58{,}5m+83n=1000\Rightarrow 117m+166n=$ $=2000\Rightarrow m=\dfrac{2000-166n}{117}$. Из условия $2000-166n>0$ находим, что $1\le n\le 12$, при $n=5$ значение $2000-166n$ делится на 117, при этом $m=10$.

5. Ответ: 18 минут. Решение: предположим, что первый автобус выходит на маршрут с конечной остановки в 5:00. В 6:30 он приходит на другой конец маршрута, и в 6:45, подождав 15 минут прихода следующего автобуса, отправляется назад и в 8:15 возвращается. С 5:00 до 8:15 для обеспечения бесперебойного движения нужно 14 автобусов. Предположим теперь, что на маршруте остается 12 автобусов, то, если предположить, что первый автобус также выходит на маршрут с конечной остановки в 5:00, а в 6:30 он приходит на другой конец маршрута и ждет x минут следующего автобуса, то после этого он прибывает в начальный пункт в 8:00 + x минут. Таким образом, автобус был в пути 3 часа + x минут, то есть $(180+x)$ минут. Тогда количество автобусов, необходимых для бесперебойного движения с интервалом в x минут, равно $(180+x)/x+1=12$, откуда получаем, что x равно 18 минутам.

6. Ответ: 550 ящиков. Решение: заполнив x больших и y малых ящиков, мы получим $10+10x+10y$ ящиков. Так как число заполненных ящиков равно $x+y=54$, то общее количество ящиков будет $10+10\cdot 54=550$.

Домашнее задание 32

1. Ответ: 11 конфет съела Оля и она шатенка; 9 конфет съела Таня и она брюнетка; Лена – блондинка и она съела 7 конфет. Решение: пусть $x,\ y,\ z$ – число конфет, съеденных Олей, Таней и Леной. Тогда имеем систему уравнений $\begin{cases}x+5=y+z\\ y+9=x+z\end{cases}$, откуда $z=7$, $x-y=2,\ \ x>y$, отсюда получаем $x=11,\ \ y=9$.

2. Ответ: 8 штук. Решение: красные шарики разбивают синие на три группы, и ответ задачи равен числу разбиений числа 7 на три слагаемых, быть может нулевых. Получаем эти разбиения: 7 + 0 + 0; 6 + 1 + 0; 5 + 2 + 0; 5 + 1 + 1; 4 + 3 + 0; 4 + 2 + 1; 3 + 3 + 1; 3 + 2 + 2.

3. Ответ: Петр. Решение: поскольку сумма последних цифр равна $12=2+3+3+4$ оканчивается на 2 и не существует квадрата целого положительного числа, который бы оканчивался на 2, речь идет не о четырех, а лишь о трех грибниках, то есть сын одного из них одновременно является отцом другого $(2+3+4=9)$. Николай не может быть сыном Петра, так как число грибов, собранных Николаем, оканчивается на 2, а не на 4, так как того требует решение задачи.

4. Ответ: на 2 км. Решение: пусть $x,\ y,\ z$ – скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста соответственно. Тогда $z-y$ – скорость сближения велосипедиста и мотоциклиста, а $6/(z-z)$ – время, за которое мотоциклист догнал велосипедиста. Тогда первое уравнение – разность расстояний, пройденных велосипедистом и пешеходом: $\dfrac{6y}{(z-y)}-\dfrac{6x}{(z-x)}=3\Rightarrow z=3y-2x$. Аналогично, получаем расстояние, на которое велосипедист обогнал пешехода $S=\dfrac{6y}{(z-x)}-\dfrac{6x}{(z-x)}=\dfrac{6(y-x)}{(z-x)}$, подставляя выражение для z, получаем: $z-x=3(y-x)\Rightarrow\dfrac{(y-x)}{(z-x)}=\dfrac{1}{3}$, поэтому $S=6\cdot\dfrac{1}{3}=2$ км.

5. Ответ: 1/6 км. Решение: интересно, что при решении этой задачи не нужно знать скорость машины. Пусть x – число щитов, промелькнувших в течение одной минуты. За час машина проедет $60x$ щитов. При скорости машины $10x$ км/час машина проедет мимо $60x$ рекламных щитов, пройдя расстояние в $10x$ км. Значит, на расстоянии 1 км она проедет мимо $60x/10x$, что равно 1/6 щитов.

6. Решение: разобьем всех учеников на 13 групп: к первой группе причислим учеников, написавших диктант без ошибок, ко второй

группе – тех, кто сделали одну ошибку, к третьей – две ошибки, и т. д., к последней группе причислим учеников, кто сделали 12 ошибок. Если бы в каждой группе было не более двух учеников, то в классе было бы не более 26 учеников. Так как в классе 30 учеников, то есть группа, в которой имеется хотя бы три ученика, а это и требовалось доказать.

Приложение
Вариант 1

1. Решение: если бы двух пакетов с одинаковым числом конфет не нашлось, то в пакетах оказалось бы не меньше, чем $0+1+2+...+34=\dfrac{(0+34)\cdot 35}{2}=17\cdot 35=595$ конфет.

2. Решение: так как числа 21 и 1001 делятся на 7, то сумма цифр чисел, делящихся на 7, может быть 2 и 3. Любое натуральное число k можно представить в виде $k=2s$ или $k=2s+1$, последнее равносильно $k=2(s-1)+3$. Значит, числа вида 100110011001… 1001, где 1001 повторяется s раз, имеют сумму цифр $2s$, а числа вида 2110011001…1001, где число 1001 повторяется $s-1$ раз, имеют сумму цифр, равную $2(s-1)+3=2s+1$. Получаем, что числа, делящиеся на 7, могут иметь любую сумму цифр, большую 1. Сумма цифр не равна 1, так как числа вида 100…00 на 7 не делятся.

3. Решение: задача Рамсея. Перенумеруем вершины шестиугольника числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Из первой вершины выходят пять отрезков, из них не менее трех одного цвета, например, красного. Можем считать, что они соединяют вершину 1 с вершинами 2, 3, 4. Если среди отрезков 23, 24, 34 есть красный, то он вместе с двумя соответствующими из отрезков 12, 13, 14 образует красный треугольник. В противном случае отрезки 23, 24, 34 образуют синий треугольник.

4. Ответ: после пятой стирки. Решение: после первой стирки останется 0,8 кусочка мыла, после второй – 0,64 кусочка, после третьей – 0,512 кусочка, после четвертой – 0,4096, после пятой – 0,32768.

5. Ответ: 1 000 км. Решение: куб содержит 1000000000 маленьких кубиков. Если их выложить в ряд, то получится длина ряда 1000000000 мм = 1000 км.

Вариант 2

1. Ответ: 0,7 км/мин и 0,3 км/мин.
2. Ответ: отцу – 42 года, сыну – 24 года.
3. Ответ: 19/10. Решение: перемножив левые и правые части данных равенств, получим: $\dfrac{a+b+c}{a+b}+\dfrac{a+b+c}{b+c}+\dfrac{a+b+c}{a+c}=\dfrac{49}{10}$, следовательно, $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{49}{10}-3=\dfrac{19}{10}$.
4. Ответ: одинаково, так как Иванов Петровичей была десятая часть от двадцатой части всех мужчин, т. е. было 1/200 часть от числа всех мужчин. Петров Ивановичей была двадцатая часть от десятой части числа всех мужчин, то есть их тоже было 1/200 часть.
5. Ответ: решением является, например, чертеж на рис. 37.

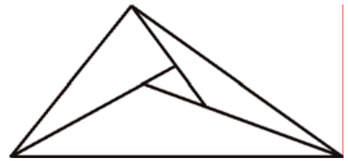

Рис. 37

Вариант 3

1. Ответ: см. рис. 38.

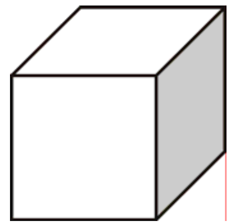

Рис. 38

2. Ответ: $a_{n+1}=2\cdot a_{n-1}+3\cdot a_n$, следующими числами будут: 1268, 4560.
3. Решение: по условию на 9 футболистов приходится 47 голов; если бы все они забили разное количество голов, то голов было бы не меньше, чем
$$1+2+3+4+5+6+8+9+10=48,$$
что противоречит условию.
4. Решение: заполним таблицу, как указано на рис. 39. Каждый прямоугольник 1×4 будет содержать все цифры от 1 до 4, поэтому, если бы то можно было сделать, то таких прямоугольников было бы 9 и всех чисел в квадрате было бы поровну, но двоек здесь –10. Следовательно, это сделать невозможно.

2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2

Рис. 39

5. Ответ: 8 м/сек.
6. Ответ: 700 рублей. Решение: если x рублей стоит портфель, y рублей стоит авторучка, а z рублей стоит книга, то получаем урав-

нения: $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{2z}{5}=200$ и $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=300$, из которых можно получить, что $x+y+z=700$.

Вариант 4

1. Ответ: 7, поскольку $2(2(2x-8)-8)-8=0$, где x – число спичек в коробке.

2. Ответ: 50 %. Решение: пусть x – число вопросов, на которые ответил Петя, y – Вася, p % – верно ответил Петя, тогда $(p+10)$ % – верно ответил Вася. Получаем, что $x=1{,}2y$; $p\cdot 1{,}2y=(p+10)y \Rightarrow p=50$.

3. Ответ: $\big||4-5|-|7-11-19|\big|=22$.

4. Ответ:

$$\begin{array}{r} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ \times \qquad\qquad\qquad 9 \\ \hline 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \end{array}.$$

5. Ответ: третий рабочий выполнит работу за 4,8 часа, так как производительность третьего рабочего равна $5a/24$, где a – объем работы.

Вариант 5

1. Указание: использовать цикличность остатков при возведении в степень.

2. Ответ: Маше сейчас 14 лет, Пете – 10 лет. Решение: если Маше сейчас x лет, а Пете – y лет, то $x+y=6(x-y)$, $3x-y=32$, откуда получаем ответ.

3. Ответ: возможными расположениями являются следующие, см. рис. 40.

4. Ответ: 735 и 260.

5. Ответ: 202032, 207036.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 5 & & & \\ & & 6 & & 2 & & \\ & 8 & & & & 4 & \\ 1 & & 7 & & 3 & & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 5 & & & \\ & & 8 & & 2 & & \\ & 1 & & & & 9 & \\ 6 & & 3 & & 7 & & 4 \end{array}$$

Рис. 40

Список литературы

1. Никитин А. А., Белоносов В. С., Вишневский М. П., Войтишек В. В., Зеленяк Т. И., Мальцев А. А., Марковичев А. С., Михеев Ю. В., Саханенко А. И., Смирнов Д. М. Математика: Учебник для шестых классов средних общеобразовательных учебных заведений / Под ред. А. А. Никитина. Новосибирск: Издательство НИИ МИОО НГУ, 1998.

2. Никитин А. А., Белоносов В. С., Вишневский М. П., Войтишек В. В., Зеленяк Т. И., Мальцев А. А., Марковичев А. С., Михеев Ю. В., Саханенко А. И., Смирнов Д. М. Геометрия: Учебник для седьмых классов средних общеобразовательных учебных заведений / Под ред. А. А. Никитина. Новосибирск: ИДМИ, 2000.

3. Никитин А. А., Белоносов В. С., Вишневский М. П., Войтишек В. В., Зеленяк Т. И., Мальцев А. А., Марковичев А. С., Михеев Ю. В., Саханенко А. И., Смирнов Д. М. Геометрия: Учебник для восьмых-девятых классов средних общеобразовательных учебных заведений / Под ред. А. А. Никитина. Новосибирск: ИДМИ, 2000.

4. Никитин А. А., Белоносов В. С., Вишневский М. П., Войтишек В. В., Зеленяк Т. И., Мальцев А. А., Марковичев А. С., Михеев Ю. В., Саханенко А. И., Смирнов Д. М. Математика: Учебник для пятых классов средних общеобразовательных учебных заведений / Под ред. А. А. Никитина. Новосибирск: Издательство ИДМИ, 2001.

5. Никитин А. А., Белоносов В. С., Вишневский М. П., Войтишек В. В., Зеленяк Т. И., Мальцев А. А., Марковичев А. С., Михеев Ю. В., Саханенко А. И., Смирнов Д. М. Математика: Учебник для седьмых классов средних общеобразовательных учебных заведений / Под ред. А. А. Никитина. Новосибирск: Издательство НИИ МИОО НГУ, 1998.

6. Никитин А. А., Белоносов В. С., Вишневский М. П., Войтишек В. В., Зеленяк Т. И., Мальцев А. А., Марковичев А. С., Михе-

ев Ю. В., Саханенко А. И., Смирнов Д. М. Математика: Учебник для восьмых классов средних общеобразовательных учебных заведений / Под ред. А. А. Никитина. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2001.

7. Подготовительные курсы по математике в СУНЦ НГУ для учащихся 9-х классов: Учеб. пособие / Сост.: Д. Г. Храмцов, Г. Я. Куклина, А. Ю. Авдюшенко / Под ред. А. А. Никитина, А. С. Марковичева. Новосибирск: НГУ, СУНЦ НГУ, 2008.

8. Подготовительные курсы по математике в СУНЦ НГУ для учащихся 8-х классов: Учеб. пособие / Сост.: А. М. Быковских, Г. Я. Куклина / Под ред. А. А. Никитина, А. С. Марковичева. Новосибирск: НГУ, СУНЦ НГУ, 2008.

9. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1975.

10. Клименченко Д. В. Задачи по математике для любознательных. Книга для учащихся 5–6 классов средней школы. М.: Просвещение, 1992.

11. Спивак А. В. Тысяча и одна задача по математике. Книга для учащихся 5–7 классов. М.: Просвещение, 2002.

12. Шарыгин И. Ф., Ерганжиева Л. Н. Наглядная геометрия: Учеб. пособие для учащихся V–VI классов. М.: МИРОС, 1995.

13. Шрайнер А. А Олимпиадные задачи. Новосибирск, 1980.

14. Шрайнер А. А. Задачи районных математических олимпиад Новосибирской области. Новосибирск: НГПУ, 2000.

15. Урман А. А., Храмцов Д. Г., Шрайнер А. А. Задачи городских и районных математических олимпиад. Новосибирск: Новосибирский государственный педагогический университет, Новосибирский государственный университет, 2004.

16. Белоносов В. С., Фокин М. В. Задачи вступительных экзаменов по математике: Учеб. пособие. Новосибирск: Сиб. Унив. изд-во, 2005.

17. Сурмин А. Г., Ерофеев В. И. Вычислительные задачи по математике с решениями: Учеб. пособие. Новосибирск: Сиб. Унив. изд-во, 2003.

18. Сурмин А. Г., Ерофеев В. И. Задачи по математике, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в ВКИ НГУ в 1993–2001 гг. Новосибирск: НГУ, 2001.

19. Барсуков А. Н. Алгебра. Учебник для 6–8 классов. М.: Просвещение, 1970.

20. Звавич Л. И., Аверьянов Д. И., Пигарев Б. П., Трушанина Т. Н. Задания для проведения письменного экзамена по математике в 9 классе: Пособие для учителя. М.: Просвещение, 1996.

21. Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С. Геометрия: задачник к школьному курсу. М.: АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1998.

22. Атанасян Л. С., Бутузов А. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия: Учебник для 7–9 классов средней школы. М.: Просвещение, 1994.

23. Атанасян Л. С., Бутузов А. Ф., Кадомцев С. Б., Юдина И. И. Геометрия: Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса. М.: Просвещение, 1997.

24. Киселев А. П., Рыбкин Н. А. Геометрия: Планиметрия: 7–9 классы: Учебник и задачник. М.: Дрофа, 1995.

25. Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике: Геометрия. М.: Просвещение, 1992.

26. Каганов Э. Д. 400 самых интересных задач с решениями по школьному курсу математики для 6–11 классов. М.: ЮНВЕС, 1997.

27. Гордин Р. К. Это должен знать каждый матшкольник. М.: МНЦМО, 2003.

28. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре: Учеб. пособие для 8–9 классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 2001.

29. Лурье М. В. Задачи на составление уравнений. Техника решения. М.: Учебно-научный центр довузовского образования, ФИЗМАТЛИТ, 2002.

30. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. М.: МЦНМО, 2004.

31. Варианты вступительных экзаменов в Школу имени А. Н. Колмогорова / Сост.: Н. Б. Алфутова, В. В. Загорский, Т. П. Корнеева, М. В. Смуров, А. В. Устинов. М.: Школа имени А. Н. Колмогорова, Самообразование, 2000.

32. Петраков И. С. Математика для любознательных. М.: Просвещение, 2000.

33. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Математические олимпиады Московской области. 1993–2002. М.: изд-во МФТИ, 2003.

34. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренко Ю. В., Резниченко С. В., Слинько А. М. Математические олимпиады школьников. 9 класс. М.: Просвещение, 1997.

35. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренко Ю. В., Резниченко С. В., Слинько А. М. Математические олимпиады школьников. 10 класс. М.: Просвещение, 1998.
36. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренко Ю. В., Резниченко С. В., Слинько А. М. Математические олимпиады школьников. 11 класс. М.: Просвещение, 1999.
37. LXIII Московская математическая олимпиада. М.: МЦНМО, 2000.
38. LXIV Московская математическая олимпиада. М.: МЦНМО, 2001.
39. Кордемский Б. А., Ахадов А. А. Удивительный мир чисел. М.: Просвещение, 1986.
40. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки. М.: Наука, 1978.
41. Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В., Потапов М. К. Старинные занимательные задачи. М.: Наука, 1988.
42. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. СПб.: Манускрипт, 1994.
43. Произволов В. В. Задачи на вырост. М.: Бюро Квантум, 2003. Приложение к журналу «Квант» № 5/2003.
44. Аменицкий Н. Н., Сахаров И. П. Забавная арифметика. М.: Наука, 1991.
45. Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад. М.: Просвещение, 1971.
46. Сборник задач московских математических олимпиад: Пособие для внеклассной работы по математике / Сост.: А. А. Леман / Под ред. В. Г. Болтянского. М.: Просвещение, 1965.
47. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады / Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Просвещение, 1986.
48. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Работ Ж. М., Тоом А. Л. Заочные математические олимпиады. М.: Наука, 1981.
49. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. Киров: АСА, 1994.
50. Каннель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2004.
51. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Толпыго А. К. Математические задачи. Библиотечка физико-математической школы. М.: Наука, 1971.

52. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л. Математические соревнования. Арифметика и алгебра. Библиотечка физико-математической школы. М.: Наука, 1970.
53. Васильев Н. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Савин А. П. Математические соревнования. Геометрия. Библиотечка физико-математической школы. М.: Наука, 1974.
54. Московские математические регаты. Сост.: А. А. Блинков. М.: МЦНМО, 2001.
55. Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб.: Политехника, 1994.
56. Рукшин С. Е. Математические соревнования в Ленинграде-Санкт-Петербурге. Первые пятьдесят лет. Ростов н/Д.: МарТ, 2000.
57. Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П. Петербургские математические олимпиады. СПб. – М. – Краснодар: Лань, 2003.
58. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2003 года. Сост.: К. П. Кохась, С. В. Иванов, А. И. Храбров и др. СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург, 2003.
59. Медников Л. Э., Мерзляков А. С. Математические олимпиады. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
60. Петров Н. Н. Математические игры // Математика в школе. М.: «Школа-Пресс», 1997. № 6.
61. Муштари Д. Х. Подготовка к математическим олимпиадам. Казань: Казанское математическое общество, 2000.
62. Олимпиады по математике, 2–3 классы. Сост.: Г. Т. Дьячкова. Волгоград: Изд-во торговый дом «Корифей», 2008.
63. Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2008 года. Сост.: С. Л. Берлов, К. П. Кохась, А. И. Храбров и др. СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург, 2008.
64. Фарков А. В. Математические олимпиады. Ко всем программам по математике за 5–6 классы. М.: Изд-во Экзамен, 2008.
65. Фарков А. В. Математические олимпиады. М.: Изд-во «ЭКЗАМЕН», 2008.
66. Чулков П. В. Математика. Школьные олимпиады: методическое пособие, 5–6 классы. Сост.: П. В. Чулков. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2007.
67. Барсуков Е. Г. Необычная математика: хитрые задачки для школьников всех возрастов. М.: ИКЦ «МарТ», Ростов н/Д: ИКЦ «МарТ», 2007.

68. Виленкин Н. Я., Чесноков А. С., Шварцбурд С. И., Жохов В. И. Математика. Учебник для 5 класса средней школы. СПб.: ИЧП «Хардфорд», 1995

69. Дорофеев Г. В., Шарыгин И. Ф. и другие. Учебник для 5 класса общеобразовательных школ. М.: Просвещение, 2000.

70. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки. М.: МИРОС, 1994.

71. Арнольд В. И. Задачи для детей от 5 до 15 лет. М.: МЦНМО, 2007.

72. Арнольд И. В. Принципы отбора и составления арифметических задач. М.: МЦНМО, 2008.

73. Ткачева М. В. Домашняя математика. М.: Просвещение, 1993.

74. Серегин Г. М. Понятие процента в школьном курсе математики. Новосибирск: НГПУ, 1994.

Оглавление

Учебное издание

Быковских Алла Михайловна,
Куклина Галина Яковлевна

Занимательные задачи по математике

Дополнительные занятия для учащихся 7 классов

Верстка Т. В. Ивановой

Подписано в печать 14.02.2010 Формат 60x84/16
Заказ № Усл. печ. л. 6,3
Уч.-изд. л. 5,1
Тираж 300 экз.

Редакционно-издательский центр НГУ
630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2