ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДМЕТНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КОМИССИЯ
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Образцы олимпиадных заданий для муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2013/2014 учебном году

Москва 2013

Типовые задания муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников

6 класс

6.1. Замените в примере на сложение десятичных дробей каждую звездочку цифрой 2 или цифрой 3 так, чтобы получилось верное равенство:

$$0,**+0,**+0,**+0,**=1.$$

6.2. Маша ездит на велосипеде вдвое быстрее своего младшего брата Васи, а на самокате вдвое медленнее, чем он на велосипеде. Маша и Вася, стартовав вместе, поехали на велосипедах, и через две минуты Маша пересела на самокат. Через какое время Вася догонит Машу?

6.3. Участок 40×50 метров выделен под огороды и обнесен оградой снаружи. Как установить внутри участка 6 прямолинейных оград одинаковой длины, чтобы разбить участок на 5 прямоугольных участков одинаковой площади?

6.4. Ученики 6 класса отправились на праздник. У каждого мальчика было по 5 воздушных шариков, а у каждой девочки – по 4 шарика. По дороге дети стали баловаться и прокалывать шарики друг у друга. В итоге каждая девочка проколола по 1 шарику, а каждый мальчик – по 2 шарика. Дима сосчитал все оставшиеся шарики, и у него получилось 100. Докажите, что Дима ошибся.

6.5. Одиннадцать шестиклассников встали в круг. Они договорились, что некоторые из них всегда говорят правду, а все другие – всегда лгут. Каждому из них раздали по две карточки, и каждый сказал: «У меня карточки одного цвета». После этого каждый передал обе свои карточки своему соседу справа. Могли ли они все после этого сказать: «У меня теперь карточки разных цветов»?

7 класс

7.1. Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, меньших 1000, произведение которых делится на 9999.

7.2. В классе больше 20, но меньше 30 учеников. При этом в классе тех, кто ходит в шахматный кружок, в 2 раза меньше, чем тех, кто не ходит. А тех, кто ходит в шашечный кружок, в 3 раза меньше, чем тех, кто не ходит. Сколько учеников в классе?

7.3. Для нескольких точек, расположенных на прямой, вычисляются расстояния между каждыми двумя из них (например, для четырёх точек таких расстояний будет шесть). Отметьте на прямой восемь точек так, чтобы расстояние между крайними точками было равно 7, а среди расстояний между точками ровно три раза встречалось расстояние 1, ровно два раза – расстояние 2, ровно пять раз – расстояние 3.

7.4. В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега четыре конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 32, а Вася – 37 конфет. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

7.5. За круглым столом сидит 11 человек – лжецов и рыцарей (рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет). Каждому из них раздали по две карточки. Известно, что карточки только синие и красные. Каждый сказал: «У меня одноцветные карточки». После этого каждый передал одну из своих карточек соседу справа. Могли ли все после этого сказать: «У меня разноцветные карточки»?

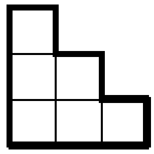
8 класс

8.1. Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2011. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

8.2. От шоссе к четырем поселкам A, B, C, D последовательно отходят четыре дороги. Известно, что путь по дороге-шоссе-дороге от A до B равен 9 км, от A до C – 13 км, от B до C – 8 км, от B до D – 14 км. Найдите длину такого пути от A до D.

8.3. Прогульщик Вася в каждый понедельник сентября некоторого года пропускал по одному уроку, в каждый вторник – по два урока, , в каждую пятницу – по пять уроков. Могло ли оказаться так, что за весь сентябрь он пропустил ровно 64 урока? (Все субботы и воскресенья сентября были выходными, а остальные дни – учебными. В сентябре 30 дней.)

8.4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Оказалось, что четырехугольник $FBDE$ – ромб. Докажите, что треугольник ABC – равносторонний.

8.5. Клетчатая доска 100×100 разрезана на шестиклеточные «лесенки» (см. рис.) и прямоугольники 2×1. Может ли оказаться, что «лесенок» ровно 333? (Лесенки и прямоугольники могут быть повёрнуты как угодно.) 

9 класс

9.1. Ненулевые числа x, y, z, t таковы, что

$$\left(x+\frac{1}{yzt}\right)\left(y+\frac{1}{ztx}\right)\left(z+\frac{1}{txy}\right)\left(t+\frac{1}{xyz}\right)>0.$$

Докажите, что $xyzt>0$.

9.2. Из произведения трех последовательных натуральных чисел вычли их сумму и получили нечетное число N. Докажите, что число N является произведением каких-то трех последовательных нечетных чисел.

9.3. На городской олимпиаде по математике каждому участнику присваивается шифр – произвольное число, оканчивающееся номером класса, в котором он учится. В олимпиаде по 6 и 7 классам приняли участие 75 детей, и оказалось, что сумма шифров шестиклассников равна сумме шифров семиклассников. На следующий год в олимпиаде по 7 и 8 классам приняли участие эти же 75 ребят. Могли ли суммы шифров этих теперь уже семи- и восьмиклассников опять оказаться равными? Обоснуйте свой ответ. (Шифры следующего года не связаны с шифрами предыдущего.)

9.4. Точки A_1, B_1, C_1 – соответственно середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 – соответственно центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1, $A_1B_1C_1$. Докажите, что O_4 – точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$.

9.5. В классе на День защитника Отечества девочки принесли подарки для своих одноклассников-мальчиков: одна – 1 подарок, вторая – 2 подарка, третья – 3 подарка и т.д. Оказалось, что каждый мальчик получил одинаковое число подарков.

На 8 Марта мальчики поздравляли одноклассниц и принесли: первый – 1 подарок, второй – 2 подарка, третий – 3 подарка и т.д. Также оказалось, что каждая девочка получила одинаковое число подарков. Докажите, что мальчиков или девочек (или и тех и других) в классе нечетное число.

10 класс

10.1. Парабола $y = ax^2$ высекает на прямых $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$ три отрезка. Докажите, что из этих отрезков можно сложить прямоугольный треугольник.

10.2. Найдите все такие пары действительных чисел x и y ($y \neq 0$), что числа $x + \frac{1}{y}$, $2x + \frac{1}{y^2}$ и $3x + \frac{1}{y^3}$ являются последовательными натуральными числами (именно в этом порядке).

10.3. Найдите все тройки различных простых чисел, попарные разности которых (из большего числа вычитается меньшее) – также три простых числа.

10.4. На сторонах BC и BA треугольника ABC выбраны точки A_1 и C_1 соответственно так, что $\angle BAA_1 = \angle BCC_1$. Биссектриса BL треугольника ABC пересекает отрезок A_1C_1 в точке K. Докажите, что $A_1K \cdot CL = C_1K \cdot AL$.

10.5. Вершины правильного 11-угольника раскрашены в два цвета: красный и синий. Может ли оказаться так, что для каждой вершины A этого 11-угольника найдутся такие красные вершины B и C, а также синие вершины D и E, что выполняются равенства $AB = AC$ и $AD = AE$?

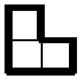
11 класс

11.1. Числа x, y, z и t таковы, что $x > y^3$, $y > z^3$, $z > t^3$, $t > x^3$. Докажите, что $xyzt > 0$.

11.2. Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит число $a > 1$ и его квадрат. Докажите, что она также содержит и куб числа a.

11.3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x) = x - 1$ и $f(x) = 2 - 2x$ имеют ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

11.4. Пусть α, β, γ – плоские углы трехгранного угла. Докажите, что числа $\sin\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\beta}{2}, \sin\frac{\gamma}{2}$ являются длинами сторон некоторого треугольника.

11.5. В клетках квадрата 7×7 расставлены действительные числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке  (повёрнутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем квадрате также положительна?