$$\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0.$$

Р е ш е н и е. В силу того, что $x^2 - 8x + 20 > 0$ для любого действительного значения x (поскольку $D = 64 - 80 < 0$), рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $mx^2 + 2(m + 1)x + 9m + 4 < 0$. Следовательно, задача сводится к нахождению значений параметра m, для которых неравенство $mx^2 + 2(m + 1)x + 9m + 4 < 0$ справедливо при всех действительных значениях x. Последнее, в свою очередь, возможно лишь при одновременном выполнении условий $D < 0$, $m < 0$:

$$\begin{cases} 4(m+1)^2-4m(9m+4)<0 \\ m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m^2+2m-1>0 \\ m<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4m-1)(2m+1)>0 \\ m<0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{1}{4} \\ m<-\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \\ m<0, \end{cases}$$

откуда следует, что $m<-\dfrac{1}{2}$.

Здесь опять надо обратить внимание учащихся на применение утверждения: неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ справедливо при любых действительных значениях x тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия $D < 0$, $a < 0$.

10. *При каких значениях параметра n квадратное уравнение $x^2 + 2(n + 1)x + 9n - 5 = 0$ имеет два действительных отрицательных корня?*

Р е ш е н и е. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$:

1) имеет два действительных положительных корня тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия:

$$D \geq 0, \quad \frac{c}{a}>0, -\frac{b}{a}>0;$$

2) имеет два действительных отрицательных корня тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия: