Выражение $-2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$ принимает наибольшее значение, равное $\frac{9}{2}$, при $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2=0$, т.е. при $a=\frac{3}{2}$.

3. *Найдите наименьшее значение функции*

$$y = 9 + 4\sin x - \cos^2 x.$$

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, преобразуем функцию:

$$y = 9 + 4\sin x - (1 - \sin^2 x),\ \ y = \sin^2 x + 4\sin x + 8.$$

Выражение $\sin^2 x + 4\sin x + 8$ — квадратный трехчлен относительно $\sin x$. Выделив в нем полный квадрат, получим

$$y = (\sin x + 2)^2 + 4.$$

Поскольку $-1 \le \sin x \le 1$, то $-1 + 2 \le \sin x + 2 \le \le 1 + 2$, т.е. $1 \le \sin x + 2 \le 3$. Отсюда, возведя в квадрат обе части каждого из неравенств, получим $1 \le (\sin x + 2)^2 \le 9$ и

$$5 \le (\sin x + 2)^2 + 4 \le 13.$$

Таким образом, наименьшее значение рассматриваемой функции равно 5.

4. *Найдите все значения параметра a, при которых сумма квадратов корней квадратного уравнения $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$ будет наименьшей.*

Решение. Итак, нужно найти все значения параметра a, при которых выражение $x_1^2 + x_2^2$ принимает наименьшее значение (x_1, x_2 — корни исходного уравнения).

Квадратное уравнение имеет корни, когда его дискриминант D больше или равен нулю:

$$D \ge 0 \iff (2a + 1)^2 - 4(a^2 + 2) \ge 0 \iff$$

$$\iff 4a - 7 \ge 0 \iff a \ge \frac{7}{4}.$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 2a + 1$, $x_1 \cdot x_2 = a^2 + 2$, а так как

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2, \text{ то } x_1^2 + x_2^2 = 2a^2 + 4a - 3 =$$

$$= 2(a^2 + 2a + 1) - 2 - 3 = 2\,(a + 1)^2 - 5.$$