Рассмотрено на заседании ШМО	«Согласовано»	«Утверждено»
Руководитель ШМО _____________Е.А. Кушнир Протокол № ___ от «____»___________2014 г.	Заместитель директора школы по УВР Е _____________Н.И. Чистякова «____»___________2014 г.	Директор МАОУ «Средняя школа №24» _____________ С.А. Позёмина.

Рабочая программа

элективного курса по математике

для учащихся 9-го класса

«Дополнительные главы математики»

«Модуль»

Учитель математики Редькина О. А.

Срок реализации: 2014-15 учебный год

Пояснительная записка

Экзамен по математике сдают все учащиеся 9 классов. Подготовка к экзамену по математике проводится не только на уроках, но и на факультативных, элективных и индивидуальных занятиях. Курс предназначен для учащихся 9 класса. Программа расширяет школьный курс математики. Данной теме отводится недостаточно внимания и времени в школьной программе. Этот курс будет полезен не только тем учащимся, которые увлекаются математикой, но и всем желающим расширить свои знания по предмету. Кроме расширения научного кругозора, в данном материале повторяются важные вопросы алгебры. Это поможет им лучше подготовиться к итоговой аттестации. Курс содержит 19 часов. Он не охватывает всего материала по теме «Модуль». Продолжить её изучение можно будет на факультативе в 10 и 11 классах.

Цель элективного курса: подготовить учащихся к сдаче экзамена в новой форме в соответствии с требованиями, предъявляемыми новыми образовательными стандартами.

Задачи:

- Повторить и обобщить знания по алгебре за курс основной общеобразовательной школы;
- Расширить знания по отдельным темам курса алгебра 5-9 классы;
- Выработать умение пользоваться контрольно-измерительными материалами.

Ожидаемые результаты:

На основе поставленных задач предполагается, что учащиеся достигнут следующих результатов:

- Овладеют общими универсальными приемами и подходами к решению заданий с модулями.
- Усвоят основные приемы мыслительного поиска.
- Выработают умения:
    - самоконтроль времени выполнения заданий;
    - оценка объективной и субъективной трудности заданий и, соответственно, разумный выбор этих заданий;
    - прикидка границ результатов.

Основные методические особенности курса:

1. Подготовка по тематическому принципу - от простых типов заданий до заданий второй части экзаменационной работы.
2. Работа с заданиями, выстроенными в виде логически взаимосвязанной системы, где из одного вытекает другое, т.е. правильно решенное предыдущее задание готовит понимание смысла следующего.

Структура курса

Курс рассчитан на 19 занятий. Включенный в программу материал предполагает повторение и углубление следующих разделов алгебры:

- Выражения и их преобразования.
- Уравнения и системы уравнений.
- Неравенства.
- Координаты и графики.
- Функции.

Формы организации учебных занятий

Формы проведения занятий включают в себя лекции, практические работы, тренинги .Систематическое повторение способствует более целостному осмыслению изученного материала, поскольку целенаправленное обращение к изученным ранее темам позволяет учащимся встраивать новые понятия в систему уже освоенных знаний.

Контроль и система оценивания

Текущий контроль уровня усвоения материала осуществляется по результатам выполнения учащимися самостоятельных, практических работ. Присутствует как качественная, так и количественная оценка деятельности.
Качественная оценка базируется на анализе уровня мотивации учащихся, их общественном поведении, самостоятельности в организации учебного труда, а так же оценке уровня адаптации к предложенной жизненной ситуации (сдачи экзамена по алгебре в форме ОГЭ).
Количественная оценка предназначена для снабжения учащихся объективной информацией об овладении ими учебным материалом и производится по пятибалльной системе.
Итоговый контроль реализуется в следующих формах: зачёт, тестирование, контрольная работа, проектная деятельность.

Учебно-тематический план

№	**Тема**	К/ч	**Формы проведения**	**Образовательный продукт**
1	Модуль действительного числа.	1 ч.	Мини-лекция, урок-практикум.	Актуализация вычислительных навыков. Развитие навыков тождественных преобразований.
2	Преобразование выражений, содержащих модуль	2 ч.	Комбинированный урок, групповая работа	Развитие навыков тождественных преобразований, различных способов разложения на множители. Овладение умением снятия модуля методом интервалов. Развитие навыков решения квадратных уравнений, разложение квадратного трёхчлена на множители. Развитие коммуникативных способностей .
3	Уравнения с модулями	4 ч.	Мини-лекция, работа в парах	Овладение разными способами решения линейных и нелинейных уравнений, содержащих модули. Развитие навыков сотрудничества.
4	Неравенства с модулями.	3ч.	Комбинированный урок, тестирование	Овладение умениями решать неравенства различных видов, различными способами.

5	Графики функций, содержащие модули.	4 ч.	Мини-лекция, групповая работа	Обобщение знаний о различных функциях и их графиках.
6	Задания с модулем в тесте ОГЭ	3 ч.	Защита проекта. Работа в группах	Приобретение знаний в процессе решения проблемы, требующей исследовательского поиска. Овладение навыками самостоятельной работы.
7	Обобщающее повторение	2ч.	Зачёт	Умение планировать рабочее время.

Содержание программы

<u>Тема 1</u>. Модуль действительного числа.

Определение модуля. Геометрический смысл модуля. Основные свойства модулей. Числовые выражения, содержащие модуль.

<u>Тема 2</u>. Преобразование выражений, содержащих модули.

Упрощение буквенных выражений, содержащих модули. Область определения выражения с модулем.

<u>Тема 3</u>. Уравнения с модулями.

Различные методы решения уравнений. Метод интервалов. Уравнения с вложенными модулями. Иррациональные уравнения.

<u>Тема 4</u>. Неравенства с модулями.

Способы решения различных неравенств (линейных, квадратных). Метод интервалов.

<u>Тема 5</u>. Графики функций, содержащие модули.

Функции и их графики. Свойства функций. Чтение графиков.

<u>Тема 6</u>. Задания с модулем в тесте ОГЭ

<u>Тема 7</u>. Обобщающее повторение

Зачётная работа. Тест (задания из открытого банка ФИПИ).

Список литературы.

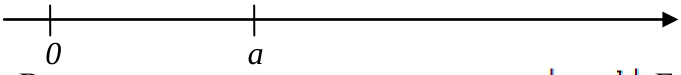
1. К. Петров. Сборник задач по алгебре. Москва «Просвещение» 1984 г.
2. М.И.Сканави. Сборник конкурсных задач по математике. Москва , «Высшая школа» 1978 г.
3. С. В. Павлов. Вся математика для поступающих в вузы. Москва, Инфра-М 2005 г.
4. Сборник заданий для проведения письменного экзамена за курс средней школы. Дрофа. Москва., 2006 г.
5. http://sdamgia.ru/

Модуль действительного числа.

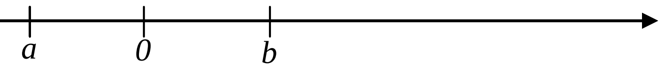
Занятие № 1, 2, 3.

Модуль (абсолютное значение) действительного числа a обозначается символом $|a|$. По определению
$|a|=\begin{cases} a, \text{если } a \geq 0 \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$'

Следовательно, по определению модуль действительного числа является неотрицательным числом. Величина $|\boldsymbol{a}|$ имеет простой геометрический смысл-расстояние от точки a на координатной оси до начала отсчета (точки О).



В задачах часто встречается величина $|a-b|$. Ее геометрический смысл- расстояние между точками a и b на координатной прямой.



Основные свойства модулей.

1. $|a| \geq 0$. Модуль любого числа - неотрицательное число. При этом $|a|=0$, если $a=0$.
2. $|a|=|a|$.Модули противоположных чисел равны.
3. $|ab|=|a|\cdot|b|$. Модуль произведения двух чисел равен произведению модулей этих чисел.
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.Модуль частного двух чисел равен частному модулей этих чисел. Очевидно , что $b \neq 0$.
5. $|a|^2=a^2$. Квадрат модуля числа равен квадрату самого числа.

ЗАДАНИЯ.

I. Устно.

1) Сравните.
   а) $|6|$и 0; $|-3|$ и 0; $|a|+0$, 1 и 0.
   б) $|5|$ и$|-5|$; $|-7, 5|$и $|7, 5|$; $|-6, 2|$и 6, 2; $-|-2|$и -2.
   в) Что можно сказать о числе b, если: а)$|a|=b$; б) $|a|=-b$.
   (*Ответ*. а) b является неотрицательным числом; б) b является неположительным числом.)

II. Работа письменно.

1) Найдите значение выражения.
   а) $|a|+2|b|$, если $a=-3$, $b=5$;
   б) $|-a|-2|b|$, если $a=-1$, $b=-2$;
   в) $\frac{-1-|-3a|+4|b|}{2|a|+|b|}$, если $a=-4$, $b=0$;
   г) $\frac{4-|a|+2|b+1|}{|-a||b+3||b+1|}$, если $a=2$, $b=-4$;
   д) $(-|-a|)^3+2|-в|^3$, если $a=1$, $b=2$.

Решение.

а) $|-3|+2|5|=3+2\cdot5=13$;
б) $|-(-1)|-2|-2|=1-2\cdot2=-3$;
в) $\frac{-1-|-3\cdot(-4)|+|0|}{2|-4|+|0|}=\frac{-13}{8}=-1,625$;
г) $\frac{4-|2|+2|-4+1|}{|-2||-4+3||-4+1|}=\frac{4}{3}$;
д) $(-|-1|)^3+2|-2|^3=15$.

Преобразование выражений, содержащих модули.

Записать без знака модуля каждое из выражений.

а) $A=|x|+|2-x|+3|x-3|$, если $x \in (2;3)$.

б) $A=|x+1|-3|x-2|$, если $x \in(-\infty;-1)$; $x \in(-1;2)$; $x \in(2;+\infty)$.

а) Если $x \in (2;3)$, то $|x|=x$, $|2-x|=-(2-x)$, $|x-3|=-(3-x)$. Имеем

$A= x-(2-x)-3(x-3)$.

б) Составим таблицу. Определим знак выражений $x+1$, $x-2$ на каждом из промежутков.

	$(-\infty;-1)$	$[-1;2)$	$[2;+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$

1. $(-\infty;1)$ $A=-(x+1)+3(x-2)=-x-1+3x-6=2x-7$.

2.$(-1;2)$ $A=(x+1)+3(x-2)=x+1+3x-6=4x-5$.

3.$(2;\infty)$ $A=(x+1)-3(x-2)=x+1-3x+6=-2x+7$.

в) $A=|3x-3|-|2x+6|-|x|$. Здесь промежутков не задано. Найдем нули модулей.

$3x-3=0$

$x=1$

$2x+6=0$

$x=-3$

$x=0$

Множество действительных чисел разделяем на промежутки: $(-\infty;-3)$; $[-3;0)$; $[0;1)$; $[1;+\infty)$. В каждом из этих промежутков определяем знаки выражений $3x-3$;$2x-6$; x и таким образом освобождаемся от модуля.

	$(-\infty;-3)$	$[-3;0)$	$[0;1)$	$[1;+\infty)$
$3x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$2x+6$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$

1. $(-\infty;-3)$ $A=-(3x-3)+(2x+6)+x=-3x+3+2x+6+x=9$

2. $[-3;0)$ $A=-(3x-3)-(2x+6)+x=-3x+3-2x-6+x=-4x-3$.

3.$(1;+\infty)$ $A=(3x-3)-(2x+6)-x=3x-3-2x-6-x=-9$.

г) Упростить выражение.

$\frac{m\cdot|m-3|}{(m^2-m-6)\cdot|m|}$.

Решение.

$A=\frac{m\cdot|m-3|}{(m^2-m-6)\cdot|m|}$ $m^2-m-6=0$, $m=-2$; $m=3$

$m^2-m-6=(m-3)(m+2)$.

	$(-\infty;0)$	$[0;3)$	$[3;+\infty)$
$m-3$	$-$	$-$	$+$
m	$-$	$+$	$+$

1.$(-\infty;0)$ $A=\frac{-m(m-3)}{(m+2)(m-3)\cdot(-m)}=\frac{1}{m+2}$. $m\neq0$, $m\neq-2$, $m\neq3$. $\underline{m\neq-2.}$

2. $[0;3)$ $A=\frac{-m(m-3)}{(m+2)(m-3)m}=-\frac{1}{m+2}$. $m\neq0$, $m\neq-2$, $m\neq3$. $\underline{m\neq0}$

3.$[3;+\infty)$ $A=\frac{m(m-3)}{(m+2)(m-3)m}=\frac{1}{m+2}$. $m\neq0$, $m\neq-2$, $m\neq3$. $\underline{m\neq3.}$

<u>Ответ</u>. $m\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(3;+\infty)$ $A=\frac{1}{m+2}$.

$m\in(0;3)$ $A=-\frac{1}{m+2}$.

Упростить выражения.

а) $\frac{x^5-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}\cdot|x-3|$.

б)$\frac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$.

в)$\left(\frac{|x-1|}{x-1}\cdot x^2-2x\cdot\frac{|x+1|}{x+1}+2x-4\right):|x-2|$

Ответ: а) $x\in(-\infty;1)$; $(1;3)$ A=$-(x^2+x+1)$; $x\in(3;+\infty)$ A=x^2+x+1.

б) $a\in(-\infty;-2)$ A= $--\frac{a}{2}$; a $\in(-2;+\infty)$ A=$\frac{a}{2}\cdot(a-1)$.

в)Здесь $x\neq 1, x\neq 2, x\neq 3.$ Имеем

1) $x\in(-\infty;-1)$ A= $(-x^2+2x+2x-4):(2-x)=\frac{x^2-4x+4}{x-2}=x-2;$

2)$x\in(-1,1)$ A= $(-x^2-2x+2x-4):(2-x)=\frac{x^2+4}{x-2};$

3)$x\in(1;\ 2)$ A= $(x^2-2x+2x-4):(2-x)=-(x+2);$

4)$x\in(2;+\infty)$ A= $(x^2-2x+2x-4):(x-2)=x+2.$

Ответ. $x\in(-\infty;-1)$ A= $x-2; x\in(-1;1)$ A= $\frac{x^2+4}{x-2}; x\in(1;2)$ A= $-(x+2); x\in(2;+\infty)$ A= $x+2$

.

Уравнения с модулями.

Занятия № 4, 5, 6.

Простейшими уравнениями с модулями называются уравнения вида **|f(*X*)|=a**. Если a<0, уравнение не имеет решений, поскольку модуль не может быть отрицательной величиной; при a≥ 0 раскрытие модуля (т.е. избавление от знака абсолютной величины) приводят к двум равносильным уравнениям: $f(x)$=a и $f(x)$=- a.

Рассмотрим несколько уравнений простейшего вида.

1. Решить уравнение $|x-5|=3$.

Решение. Равносильные уравнения

$x-5=3$,

$x-5=-3$.

Ответ: $x_1=8$, $x_2=2$.

2. Решить уравнение $|x+5|=-3$.

Решение. Данное уравнение решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

3. решить уравнение $|x+4|=0$.

Решение. Равносильное уравнение $x+4=0$.

Ответ. $x=-4$.

4. Решить уравнение $|x^2+7x+3|=3$.

Решение. $x^2+7x+3=3$,

$x^2+7x+3=-3$.

Ответ. $x_1=0, x_2=-7; x_3=-6; x_4=-1$.

Уравнение вида **|f(*x*)|=|g(*x*)|** заменяется на равносильное $[f(x)]^2=[g(x)]^2$

5. Решить уравнение $|x+1|=2|x-2|$.

Решение. Возводя обе части уравнения в квадрат. получаем квадратное уравнение $(x+1)^2=4(x+2)^2$,

$x^2+2x+1=4x^2-16x+16$, $x^2-6x+5=0$,

$x_1=1, x_2=5$.

Ответ. $x_1=1, x_2=5$.

6. Решить уравнение $|x^2+6|-|5x|=0$.

Решение. $|x^2+6|=|5x|$. Возводим в квадрат: $x^4+12x^2+36=25x^2$,

$x^4-13x+36=0$, $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_3=3$; $x_4=-3$.

Ответ. $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_3=3$; $x_4=-3$.

Если $f(x)$ и (или) $g(x)$ в исходном уравнении имеют сложный вид, например представлены квадратными трехчленами, то возведение в степень приводит к уравнению четвертой степени и выше, которые далеко не всегда решаются заменой переменных, тогда уравнение $|f(x)|=|g(x)|$ сводится к двум равносильным уравнениям $f(x)=g(x)$ и $f(x)= - g(x)$.

6. Решить уравнение $|2x-3|=|x^2-2x-6|$.

Решение. Раскроем модули по схеме $f(x)=g(x)$ и $f(x) = -g(x)$.

$x^2-2x-6=2x-3$; $x^2-4x-3=0$ $x_1=2+\sqrt{7}$; $x_2=2-\sqrt{7}$.

$x^2-2x-6=-2x+3$; $x^2-9=0$; $x_3=-3$; $x_4=3$.

Ответ. $x_{1,2}=2\pm\sqrt{7}$; $x_{3,4}=\pm 3$.

Уравнения вида $|f(x)|=g(x)$ преобразуются в два равносильных уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)=-g(x)$, но в отличие от предыдущего случая из решений первого уравнения выбираются только те, для которых $f(x)\geq 0$, а из решений второго - те, для которых $f(x)< 0$.

8. Решить уравнение $|x+1|= -3x$.

Решение. Первое равносильное уравнение $x+1=-3x$ при условии $x+1\geq 0$. Тогда $x= - 0, 75$. Второе равносильное уравнение $x+1=3x$ при $x+1< 0$. Второй корень не является решением исходного уравнения т. к. не удовлетворяет неравенству $x+1< 0$.
Ответ. $x = - 0, 75$.

Уравнения вида $F(|f(x)|, x) = 0$ сводятся к двум равносильным системам

$$\begin{cases} F(f(x),x) = 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F(-f(x),x) = 0, \\ f(x) < 0. \end{cases}$$

9. Решить уравнение $x^2 + 4|x-3| - 7x + 11 = 0$
Решение. Решим системы

$$\begin{cases} x^2 + 4(x-3) - 7x + 11 = 0, \\ x - 3 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4(x-3) - 7x + 11 = 0, \\ x - 3 < 0. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \quad ,x_2 = \frac{11-\sqrt{29}}{2}$$

Ответ. $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}\, x_2 = \frac{11-\sqrt{29}}{2}$.

Задания.
1. $|x+2|$=5.
2. $|2x+1| = 5$.
3. $|\boldsymbol{x+8}|$=$|\boldsymbol{x+20}|$.
4. $|x^2 + 2x - 3| = 3$.
5. $|3x+6| - |2x = 4| = 0$.
6. $|x^2 - 13x + 36| = |36 - x^2|$.
7. $x^2 + 3x + |x+3| = 0$.
8. $x^2 - 6x + |x-4| + 8 = 0$.
9. $x^2 - 7|x|$+12= **0.**
10. $x^2 - 3|x|$ +2= **0.**

Метод интервалов.

Уравнения вида $|f_1(x)|\pm|f_2(x)|\pm|f_3(x)|\pm...\pm|f_n(x)|=g(x)$ решаются методом интервалов.

1. Решить уравнение $|x-1|+|x-2|=1$.

Найдем нули модулей.

$x-1=0$ $x-2=0$

$x=3$ $x=2$

	$(-\infty, 1)$	[1, 2)	$[2;+\infty)$
x-1	-	+	+
x-2	-	-	+

1.$x<1$ $-(x-1)-(x-2)=1$, $-x+1-x+2=1$, $-2x=-2$, $x=1$ не принадлежит $x<0$, значит не корень.

2. $1\le x<2$ $(x-1)-(x-2)=1$, $0x=1$, x-любое число.

3. $x\ge 2$ $x-1+x-2=1$, $2x=4$, $x=2$ принадлежит $x\ge 2$, значит - корень.

Ответ. [1;2].

2. Решить уравнение. $|x-1|-2|x-2|+|x-3|=4$.

	$(-\infty;\ 1)$	[1;2)	[2;3)	$[3;+\infty)$
x-1	-	+	+	+
x-2	-	-	+	+
x-3	-	-	-	+

1. $(-\infty\ ;1)$ $-(x-1)+2(x-2)-3(x-3)=4; x=1$ **не корень.**
2. $[1;2)$ $(x-1)+2(x-2)-3(x-3)=4; 0x=4;\ x\in[1;\ 2)$.
3. $[2;\ 3)$ $(x-1)-2(x-2)-3(x-3)=4;\ \ x=2$ **корень.**
4. $[3;+\infty)$ $(x-1)-2(x-2)+3(x-3)=4; x=5$ корень.

Ответ. $[1;\ 2]\cup 5$.

Задания.

1. $|10-x|+|x-20|=10$.
2. $|x+2|+|x+3|+|x+6|=1$.
3. $|x-3|+2|x+1|=4$.
5. $|x|+|x-7|+2|x-4|=2$.
6. $|2x-3|=3-2x$
7. $|4-5x|=5x-4$
8. $|5x-13|-|6-5x|=7$

Уравнения с вложенными модулями

Занятие № 7

Решаются последовательным раскрытием модулей, начиная, как правило, с внутренних. Хотя, из любого правила бывают исключения

Решить уравнение $||||x|-2|-1|-2|=2$.

Решение. $|||x|-2|-1|-2=2$ или $|||x-2|-1|-2=-2$

$|||x|-2|-1|=4$ $\quad$ $|||x|-2|-1|=0$

$||x|-2|-1=4$ *или* $||x|-2|-1=-4$ $\quad$ $||x|-2|-1=0$

$||x|-2|=5$ $\quad$ $||x|-2|=-3$ $\quad$ $||x|-2|=1$

|x|-2=5 или |x|-2=-5 $\quad$ решений нет $\quad$ |x|-2=1 или |x|-2=-1

|x|=7 $\quad$ |x|=-3 $\quad$ |x|=3 $\quad$ |x|=1

$x=\pm 7$ $\quad$ решений нет $\quad$ $x=\pm 3$ $\quad$ $x=\pm 1$

Ответ. $x=\pm 7$; $x=\pm 3$; $x=\pm 1$.

Задания.

1. $||||x-1|+2|-1|+1|=2$. *Ответ.* $x=1$.

2. $|x-|4-x||-2x=4$. *Ответ.* $x=0$.

Существуют иррациональные уравнения, которые с помощью простых преобразований приводятся к уравнениям с модулями. Воспользуемся тождеством

$$|f(x)|=\sqrt{(f(x))^2}$$

Решить уравнение $\sqrt{x^2-20x+100}+\sqrt{x^2+40x=400}=40$,

$\sqrt{(x-10)^2}+\sqrt{(x+20)^2}=40$,

$$|x-10|+|x-20|=40,$$

Ответ. $x_1=25$; $x_2=15$.

Неравенства с модулями.

Занятия №8,9,10.

Неравенства вида $|\boldsymbol{f(x)}| > \boldsymbol{a}$ при $\boldsymbol{a \leq 0}$ имеют решением всю область определения функции $\boldsymbol{f(x)}$. При $\boldsymbol{a > 0}$ исходное неравенство равносильно двум неравенствам: $\boldsymbol{f(x) > 0}$ *и* $\boldsymbol{f(x) < -a}$, при этом решения обоих неравенств являются решениями исходного. Это справедливо и для нестрогих неравенств.
Неравенства вида $|\boldsymbol{f(x)}| < \boldsymbol{a}$ при $\boldsymbol{a \leq 0}$ решений не имеют, $\boldsymbol{a}$ при $a >$ $\boldsymbol{0}$ равносильно двойному неравенству.
$\boldsymbol{-a < f(x) < a}$. Заметим, что если неравенство нестрогое $|\boldsymbol{f(x)}| \leq$ $\boldsymbol{a}$, то при $\boldsymbol{a = 0}$ оно равносильно уравнению $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

Решить неравенство.
1. $|3 - 8x^2| > -3$

Ответ. x$\in (-\infty; +\infty)$.

2. $|7x^2 + 8| \leq -3$.

Ответ. Неравенство решений не имеет.

3.Решить неравенство $\left|\frac{3x+1}{x-3}\right| \leq 3$.

Решение.$\begin{cases} \frac{3x+1}{x-3} \geq -3 \\ \frac{3x+1}{x-3} \leq 3, \end{cases}$

$$\frac{3x+1}{x-3} \geq -3, \frac{3x+1}{x-3} + 3 \geq 0, \frac{3x+1+3x-9}{x-3} \geq 0, \frac{6x-8}{x-3} \geq 0.$$

$$\begin{cases} (6x-8)(x-3) \geq 0, \\ x \neq 3, \end{cases}$$

Откуда $x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

$$\frac{3x+1}{x-3} \leq 0, \quad \frac{3x+1-3x+9}{x-3} \leq 0, \quad \frac{10}{x-3} \leq 0,$$

$x - 3 < 0$, откуда $x \in (-\infty\,; 3)$.

Пересечением решений обоих неравенств будет интервал $x \in -\infty;\ \frac{4}{3}]$

Ответ. $x \in (-\infty; \frac{4}{3}]$.

Неравенства вида $|\boldsymbol{f(x)}| \le \boldsymbol{g(x)}$ сводятся к равносильной системе

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x) \le g(x)} \\ \boldsymbol{f(x) \ge -g(x)}, \end{cases}$$

а неравенства вида $|\boldsymbol{f(x)}| \ge \boldsymbol{g(x)}$ – системе

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x) \ge g(x)} \\ \boldsymbol{f(x) \le -g(x)}. \end{cases}$$

4. Решить неравенство $|x^2 - 8x + 15| < x - 3$.

Решение. $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 < x - 3 \\ x^2 - 8x + 15 > 3 - x \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 18 < 0 \\ x^2 - 7x + 12 > 0 \end{cases}$$

Пересечение решений данных неравенств $x \in (4;\ 6)$.

5. Решить неравенство $|x^2 - 2x - 3| > 3x - 3$.

Решение. $\begin{cases} \mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} - 3 > 3x - 3 \\ \mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} - 3 < 3 - 3x \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 5x > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$$

Пересечение решений данных неравенств $x \in (-3;\ 0)$.

Ответ. $x \in (-3;\ 0)$.

Неравенства вида $|\boldsymbol{f_1(x)}| \pm |\boldsymbol{f_2(x)}| \pm |\boldsymbol{f_3(x)}| \pm \cdots \pm |\boldsymbol{f_n(x)}|$ $\boldsymbol{a}$ решаются методом интервалов.

6. *Решить неравенство.* $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| \ge 4$.

	$(-\infty; -2)$	[-2; 1)	[-1; 0)	[0 ; +∞)
x	-	-	-	+
$x + 1$	-	-	+	+
$x + 2$	-	+	+	+

1.$(-\infty; -2)$ $(-\infty; -2)$ $-x + 2(x+1) - 3(x+2) \geq 4, x \leq -4$, $x \in (-\infty; -4]$- решение.

2.$[-2;\ 1)$ $-x + 2(x+1) + 3(x+2)\ \geq 4,\ x \geq -1, x = -1$ – решение.

3. $[-1;\ 0) - x - 2(x+1) + 3(x+2) \geq 4; 0x \geq 0, x \in [-1;\ 0)$.

4. $[0; +\infty)$ $-x - 2(x+1) + 3(x+2) \geq 4; x \geq 0$.

Ответ. $x \in (-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$.

Задания.

1. $2|x+1| > x = 4$,

2. $4|x+2| < 2x + 10$,

3. $3x^2 - |x-3| > 9x - 2$,

4. $|x-2| - x < 2x^2 - 9x + 9$,

5. $\left|\frac{3-2x}{1=x}\right| < 2$.

Графики функций.

Занятия № 11,12

Построить трафики функций.

1. $y = |x|$.

2. $y = \frac{1}{|x|}$.

3. $y = 4|x| - |x^2| - 3$.

4. $y = 2x^2 - 6|x|$.

5. $y = \left|1 - |x|\right|$.

6. $y = |2|x| - 3|$.

7. $y = \left|1 - \frac{1}{|x|}\right|$.

8. $y = \left|x^2 - 5|x|\right|$.

9. $y = ||x|^3 - 2|$.

10. $y = \sqrt{\left(\sqrt{x^2} + 2\right)^2}$.

11. $|y| = \frac{1}{2}x + 1$.

Графики

1. Постройте график функции

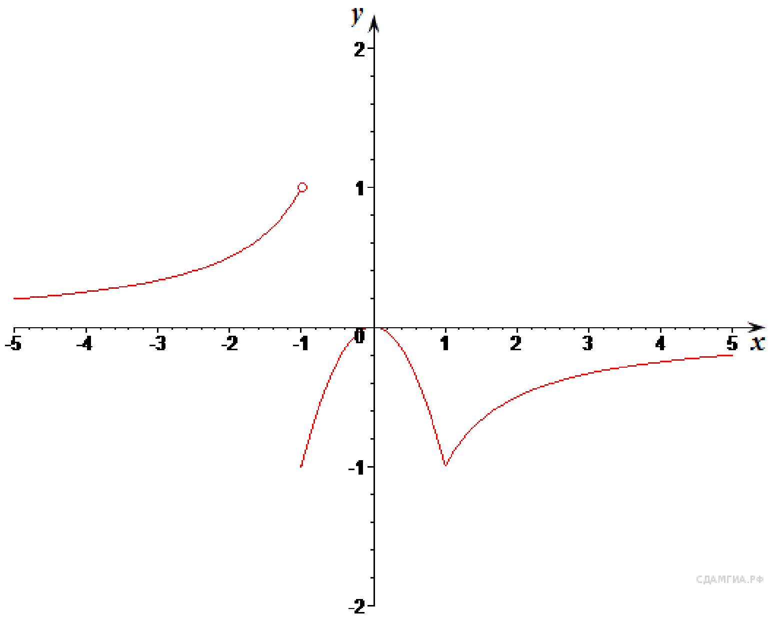
$$y=\begin{cases}-x^2, |x|\le 1,\\ -\dfrac{1}{x}, |x|>1.\end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y=c$ будет иметь с графиком единственную общую точку.

Решение.

Построим график функции (см. рисунок).

$$y=\begin{cases}-x^2, |x|\le 1,\\ -\dfrac{1}{x}, |x|>1.\end{cases}$$



Из графика видно, что прямая $y=c$ будет иметь с графиком функции единственную точку пересечения при c принадлежащем множеству [0; 1).

Ответ: [0; 1).

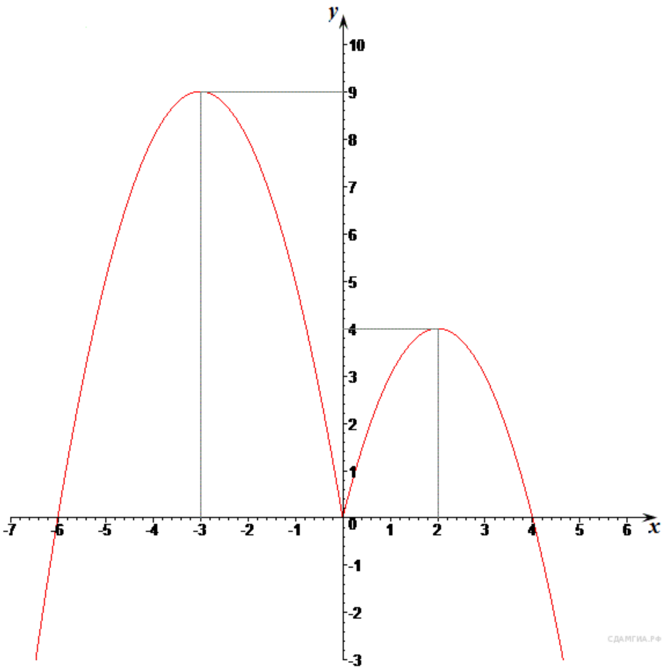
2. Постройте график функции $y=-x+5|x|-x^2$ и определите, при каких значениях c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

Раскрывая модуль, получим, что график функции можно представить следующим образом:

$$y=\begin{cases}-x^2-6x, \text{ при } x<0,\\ -x^2+4x, \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = c$ имеет с графиком функции ровно три общие точки при $c = 0$ и $c = 4$.

Ответ: 0; 4.

3.Постройте график функции $y = |x-2| - |x+1| + x - 2$ и найдите значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с ним ровно две общие точки.

Решение.

Раскрывая модули, получаем, что график функции совпадает с прямой $y = x + 1$ при $x < -1$, совпадает с прямой $y = -m - 1$ при $-1 \leq x \leq 2$ и совпадает с прямой $y = x - 5$ при $x > 2$.

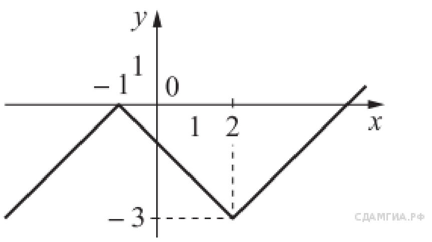


График изображен на рисунке.

Прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки при $m = -3$ и $m = 0$.

Ответ: $m = -3,\ m = 0$.

3. Постройте график функции

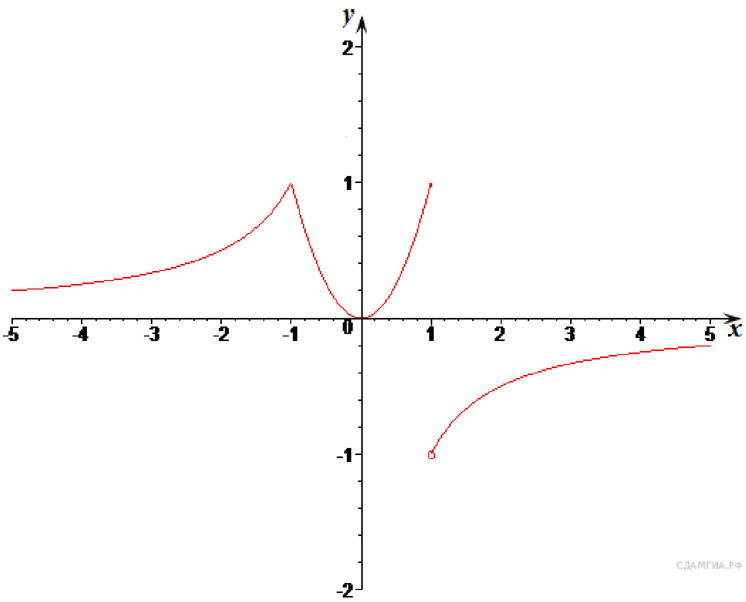
$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } |x| \leq 1, \\ -\dfrac{1}{x}, \text{ если } |x| > 1. \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ будет иметь с графиком единственную общую точку.

Решение.

Построим график функции (см. рисунок).

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } |x| \leq 1, \\ -\dfrac{1}{x}, \text{ если } |x| > 1. \end{cases}$$

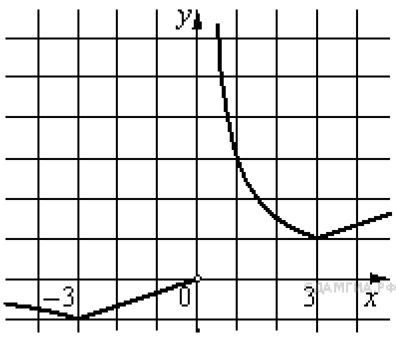


Из графика видно, что прямая $y=c$ будет иметь с графиком функции единственную точку пересечения при c принадлежащем множеству $(-1;\,0]$.

Ответ: $(-1;\,0]$.

5.Постройте график функции $y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right|+\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.



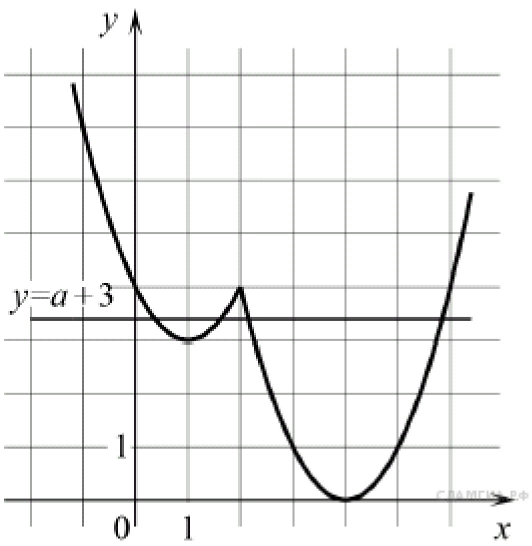
Значение выражения $\frac{x}{3}-\frac{3}{x}$ неотрицательно при $-3\le x<0$ и $x\ge 3$, а при $x<-3$ и $0<x<3$ значение этого выражения отрицательно. Построим график функции $y=\frac{x}{3}$ при $-3<0$ и $x\ge 3$ и график функции $y=\frac{3}{x}$ при $x<-3$ и $0<x<3$. Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $m = 1$ и $m = -1$.

6. Постройте график функции $y=x^2-5x+10-3|x-2|$ и найдите все значения a, при которых он имеет ровно три общие точки с прямой $y=a+3$

Решение.

Построим график функции

$$y=\begin{cases}x^2-2x+4, x<2,\\ x^2-8x+16, x\ge 2.\end{cases}$$



Прямая $y = a + 3$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $a = 0$ и $a = 1$.

Ответ:0; 1.

Задание 23 № 314722. Постройте график функции $y = -2x + 4|x| - x^2$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки.

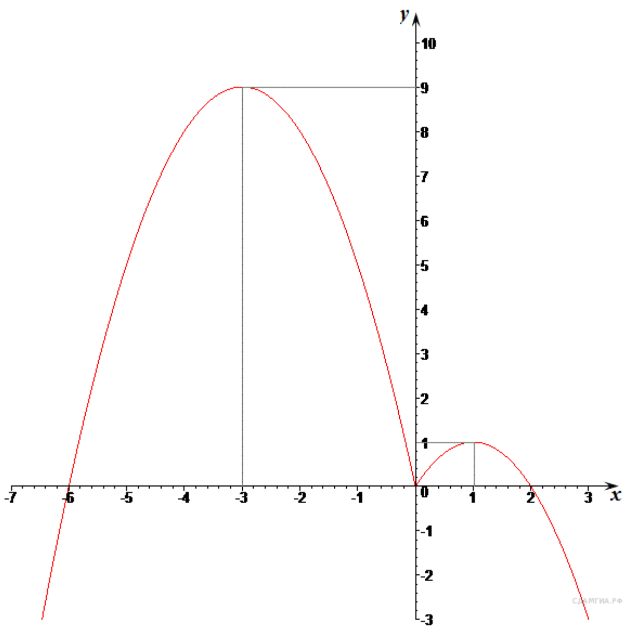
Решение.

Раскрывая модуль, получим, что график функции можно представить следующим образом:

$$y = \begin{cases} -x^2 - 6x, \text{ при } x < 0, \\ -x^2 + 2x, \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$$

Этот график изображён на рисунке:

Аналогичные задания: 314673 314678 314680 314701 314705 314710 314714 314715 314719 314722 ..



Из графика видно, что прямая $y = c$ имеет с графиком функции ровно три общие точки при $c = 0$ и $c = 1$.

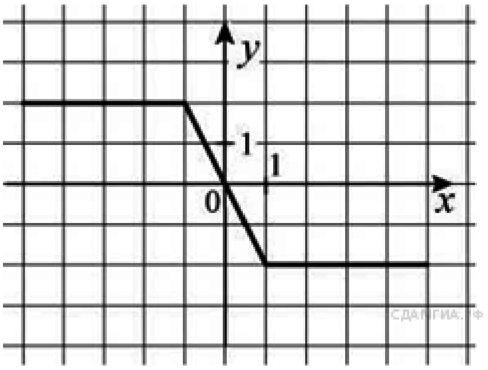
Ответ: 0; 1.

Задание 23 № 311827. Постройте график функции $y = |x - 1| - |x + 1|$ и найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

Решение.

Раскрывая модули, получаем, что при $x \geq 1$ функция принимает вид $y = -2$, при $-1 < x < 1$ функция принимает вид $y = -2x$, а при $x \leq -1$ функция принимает вид $y = 2$.

График функции изображён на рисунке.



Прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку при k принадлежащем множеству $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

Аналогичные задания: 311611 311771 311827 311859 316242 316295 316332 316269

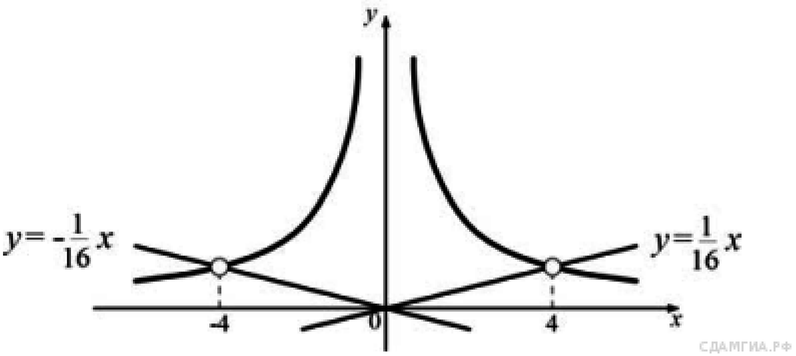
7.Постройте график функции $y = \frac{|x| - 4}{x^2 - 4|x|}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не будет иметь с построенным графиком ни одной общей точки.

Решение.

Преобразуем выражение: $\frac{|x| - 4}{x^2 - 4|x|} = \frac{|x| - 4}{|x|(|x| - 4)} = \frac{1}{|x|}$ при $|x| \neq 4$.

Значит, $y = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, \text{ если } x \neq \pm 4, \\ \text{не определена при } x = -4 \text{ или } x = 4. \end{cases}$

Построим ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$ при $x > 0$ и удалим точку $(4; \frac{1}{4})$. Затем построим вторую часть графика симметрично первой относительно оси ординат.



На рисунке видно, что прямая $y = kx$ не имеет с построенным графиком общих точек, если она горизонтальна, либо проходит через одну из удаленных точек $(4; \frac{1}{4})$ или $(-4; \frac{1}{4})$. Этим случаям соответствуют значения $k = 0,\ k = -\frac{1}{16}$ и $k = \frac{1}{16}$.

Ответ: $0,\ -\frac{1}{16},\ \frac{1}{16}$.

Аналогичные задания: 338162