Вариант № 2887135

1. B 1 № 77334. В обменном пункте 1 гривна стоит 3 рубля 70 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на гривны и купили 3 кг помидоров по цене 4 гривны за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

Решение.

За 3 кг помидоров отдыхающие заплатили $4 \cdot 3 = 12$ гривен. Значит, в рублях они заплатили: $12 \cdot 3{,}7 = 44{,}4$ рубля. Округляем до целого числа, получаем 44.

Ответ: 44.

2. B 2 № 26618. Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25% ?

Решение.

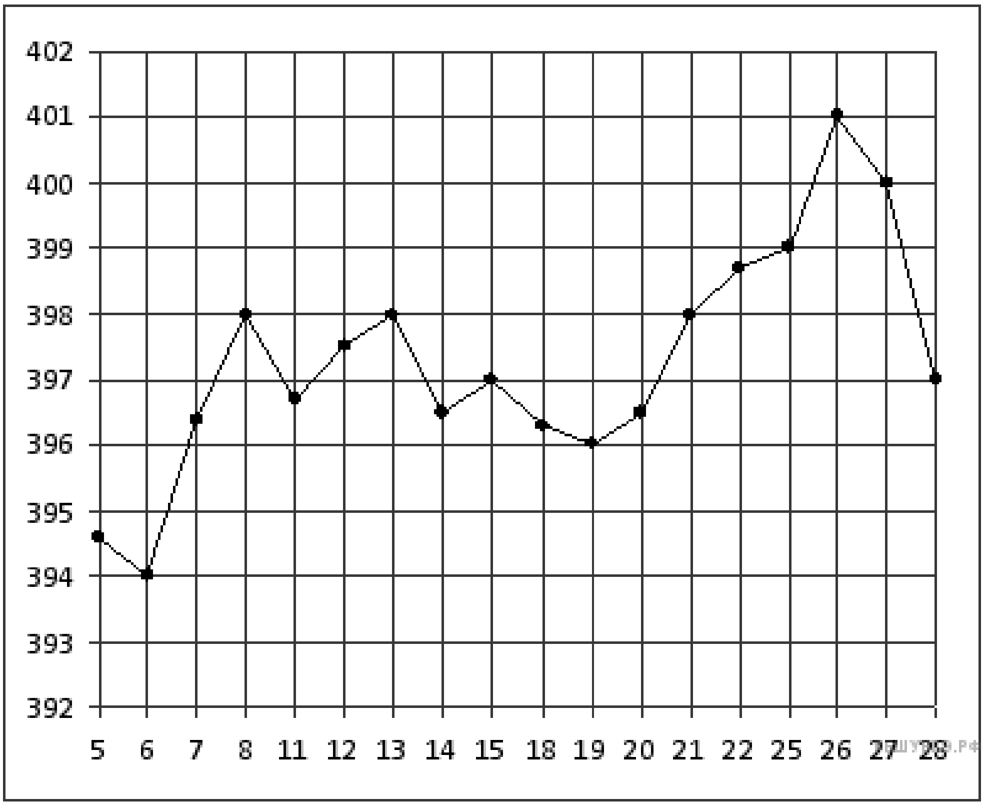
Во время распродажи шампунь станет стоить $160 - 0{,}25 \cdot 160 = 120$ рублей. Разделим 1000 на 120:

$$\frac{1000}{120} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}.$$

Значит, можно будет купить 8 флаконов шампуня.

Ответ: 8.

3. B 3 № 26874. На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 5 по 28 марта 1996 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена золота на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



Решение.

Из графика видно, что наименьшей цена была 6 марта (см. рисунок).

Ответ: 6.

4. B 4 № 26688. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок. Либо скидку 25% на звонки абонентам других сотовых компаний в своем регионе, либо скидку 5% на звонки в другие регионы, либо 15% на услуги мобильного интернета. Клиент посмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 300 рублей на звонки абонентам других компаний в своем регионе, 200 рублей на звонки в другие регионы и 400 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Какую скидку выбрал клиент? В ответ запишите, сколько рублей составит эта скидка.

Решение.

Рассмотрим различные варианты.

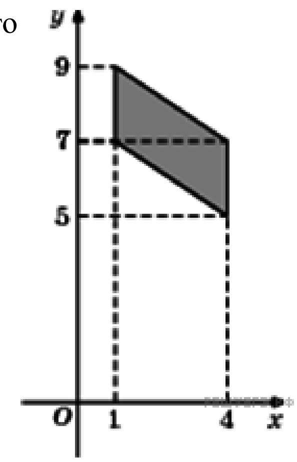
Скидка звонки абонентам других компаний в своем регионе составит $0{,}25 \cdot 300 = 75$ руб.

Скидка на звонки в другие регионы составит $0{,}05 \cdot 200 = 10$ руб.

Скидка на мобильный Интернет составит $0{,}15 \cdot 400 = 60$ руб.

Ответ: 75.

5. B 5 № 27577. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (1;7), (4;5), (4;7), (1;9).

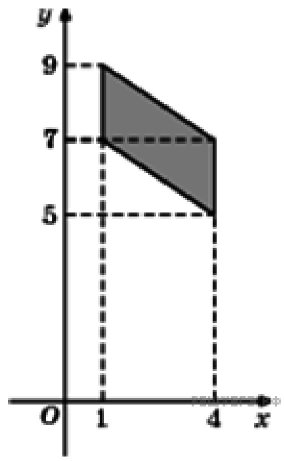


Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту. Поэтому

$$S = (9-7)\cdot(4-1) = 6.$$

Ответ: 6.



6. B 6 № 320198. Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

Решение.

Рассмотрим события A = «учащийся решит 11 задач» и В = «учащийся решит больше 11 задач». Их сумма — событие A + B = «учащийся решит больше 10 задач». События A и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем: 0,74 = P(A) + 0,67, откуда P(A) = 0,74 − 0,67 = 0,07.

Ответ: 0,07.

7. B 7 № 26667. Найдите корень уравнения: $x^2-17x+72=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Решение.

Решим квадратное уравнение:

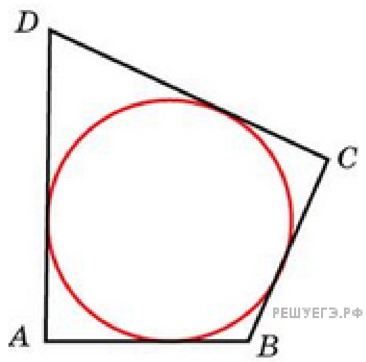
$$x^2-17x+72=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{17+\sqrt{289-288}}{2}, \\ x=\dfrac{17-\sqrt{289-288}}{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9; \\ x=8. \end{array}\right.$$

Примечание.

По теореме, обратной теореме Виета, сумма корней уравнения равна 17, а их произведение равно 72. Тем самым, это числа 8 и 9.

Ответ: 8.

8. B 8 № 27939. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=10, CD=16$. Найдите периметр четырехугольника.



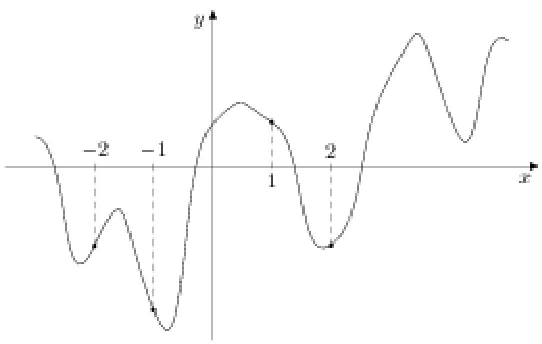
Решение.

В выпуклый прямоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB+CD=BC+AD$.Тогда

$$P_{ABCD}=AB+CD+BC+DA=2(AB+CD)=52.$$

Ответ: 52.

9. B 9 № 317543. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и отмечены точки −2, −1, 1, 2. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

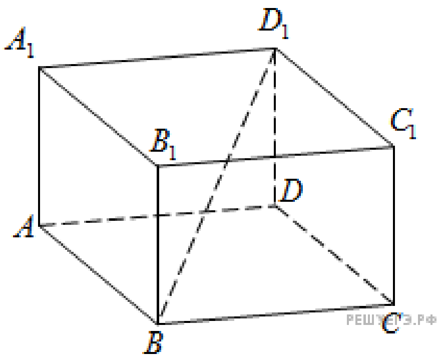


Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная положительна в точках −2 и 2. Угол наклона (и его тангенс) явно больше в точке −2.

Ответ:−2.

10. B 10 № 918. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $DB_1 = \sqrt{26}, AA_1 = 1, C_1B_1 = 3$. Найдите длину ребра CD.



Решение.

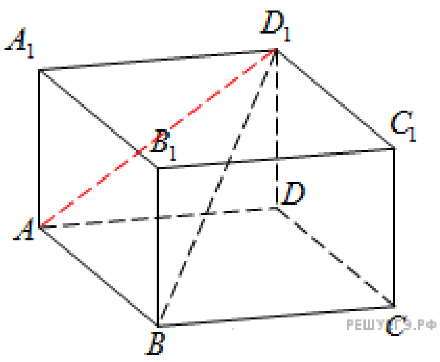
По теореме Пифагора

$$AD_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1D_1^2} = \sqrt{AA_1^2 + C_1B_1^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

Тогда длина ребра CD равна

$$CD = AB = \sqrt{BD_1^2 - AD_1^2} = \sqrt{DB_1^2 - AD_1^2} = \sqrt{26-10} = 4.$$

Ответ:4.



Другое решение.

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений. По условию даны длины двух измерений и длина диагонали. Осталось подставить в формулу и сосчитать.

11. B 11 № 26756. Найдите значение выражения $\dfrac{24(\sin^2 17° - \cos^2 17°)}{\cos 34°}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{24(\sin^2 17° - \cos^2 17°)}{\cos 34°} = \frac{24(-\cos 34°)}{\cos 34°} = -24.$$

Ответ: -24.

12. B 12 № 27958. Если достаточно быстро вращать ведерко с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\dfrac{v^2}{L} - g\right)$, где m – масса воды в килограммах, v скорость движения ведерка в м/с, L – длина веревки в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

Решение.

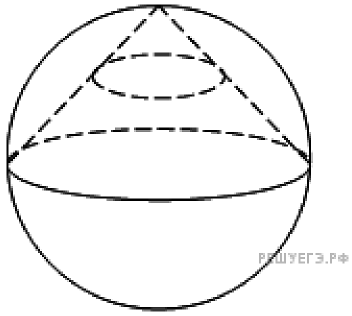
Задача сводится к решению неравенства $P(v) \geq 0$ при заданной длине верёвки $L = 0,4$ м:

$$P \geq 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{v^2}{0{,}4} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow v^2 \geq 4 \Leftrightarrow v \geq 2 \text{ м/с}.$$

Ответ: 2.

13. B 13 № 245351.

Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем шара равен 28. Найдите объем конуса.



Решение.

Запишем формулу для объёма шара:

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 28.$$

Объём конуса в 4 раза меньше:

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{1}{3}\pi R^3 = 7.$$

Ответ: 7.

14. B 14 № 99570. Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200 000 рублей. Митя внес 14% уставного капитала, Антон – 42 000 рублей, Гоша – 12% уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1 000 000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях.

Решение.

Антон внес $\frac{42000}{200000} \cdot 100$ уставного капитала. Тогда Борис внес $100 - 12 - 14 - 21 = 53\%$ уставного капитала. Таким образом, от прибыли 1000000 рублей Борису причитается $0,53 \cdot 1\,000\,000 = 530\,000$ рублей.

Ответ: 530000.

15. B 15 № 77451. Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$.

Решение.

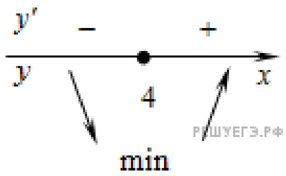
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 4$.
Ответ: 4.

16. С 1 № 484548. Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x + 2\sin x\cos 2x - 1}{\sqrt{\cos x}} = 0.$

Решение.

$$\frac{2\sin^2 x + 2\sin x\cos 2x - 1}{\sqrt{\cos x}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x\cos 2x - \cos 2x = 0, \\ \cos x > 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Решим уравнение $2\sin x\cos 2x - \cos 2x = 0$:

$$2\sin x\cos 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right.$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

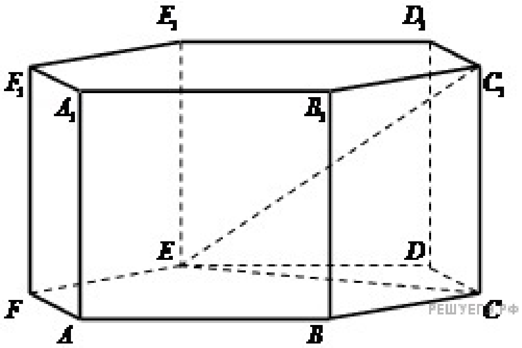
Из найденный решений условию (*) удовлетворяет только $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$ и $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

17. С 2 № 485955. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF\ A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра которой равны 10, найдите расстояние от точки E до прямой B_1C_1.

Решение.

Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, прямые BC и CE перпендикулярны. Поскольку прямые BC и B_1C_1 параллельны, CE перпендикулярно B_1C_1. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах EC_1 перпендикулярна B_1C_1, поэтому длина отрезка EC_1 равна искомому расстоянию.



По условию $CC_1 = 10$, диагональ правильного шестиугольника $CE = 10\sqrt{3}$. Тогда по теореме Пифагора для треугольника ECC_1 находим, что $EC_1 = 20$.

Ответ: 20.

18. C 3 № 500409. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{8^{-x} - 5 \cdot 0,5^x}{2^{-x} - 2^{x+4}} \geq 0, \\ \log_{x^2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) \leq 0. \end{cases}$$

.

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 2^{-x}$, $y > 0$.

$$\frac{y^3 - 5y}{y - \dfrac{16}{y}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y^2(y^2-5)}{y^2-16} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-\sqrt{5})(y+\sqrt{5})}{(y-4)(y+4)} \geq 0 \Leftrightarrow |y| \in [0, \sqrt{5}] \cup (4, +\infty)$$

Учитывая, что $y = 2^{-x} > 0$, получаем $0 < 2^{-x} \leq \sqrt{5}$ или $2^{-x} > 4$, откуда находим решение первого неравенства системы: $x \in (-\infty, -2) \cup [-\log_4 5, +\infty)$.

2. Решим второе неравенство системы: $\log_{x^2} \dfrac{x+2}{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \log_{x^2}(x+2) \leq 1$.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2}(x+2) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x+2 \leq x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1) \geq 0, \\ x+2 > 0, \end{cases}$$

откуда, учитывая условие $x^2 > 1$, получаем: $x \in (-2, -1) \cup [2, +\infty)$.

Второй случай: $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2}(x+2) \leq 1 \Leftrightarrow x+2 \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем: $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Решение второго неравенства исходной системы: $x \in (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup [2, +\infty)$.

3. Поскольку $-2 < -\log_4 5 < -1$, получаем решение исходной системы неравенств.

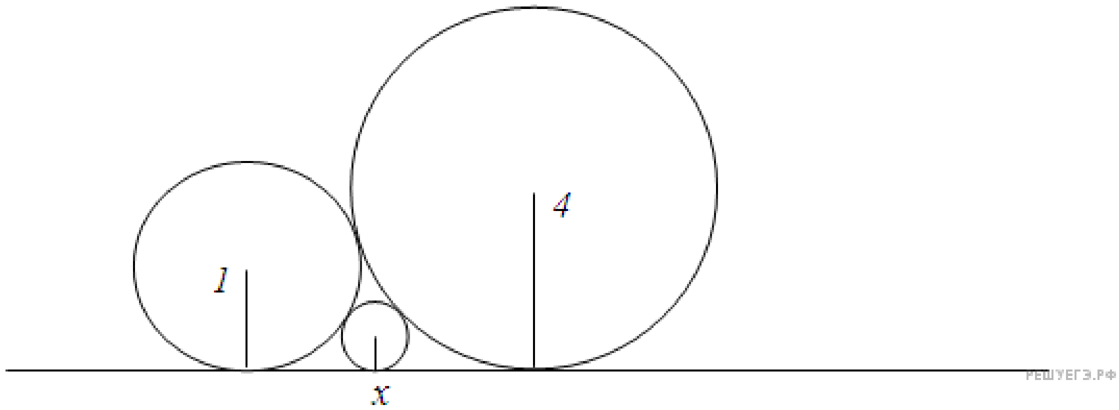
Ответ: $[-\log_4 5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup [2; +\infty)$.

19. C 4 № 484607. Две окружности, радиусы которых равны 9 и 4, касаются внешним образом. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных окружностей и их общей внешней касательной.

Решение.

Возможны два случая взаимного расположения прямой и окружностей.

Первый случай. Пусть окружность с центром O_1 имеет радиус $r = 4$, окружность центром O_2 имеет радиус $R = 9$, а окружность с центром O имеет радиус x и касается двух данных окружностей и их общей внешней касательной a.



Обозначим через A, B и C точки касания окружностей с прямой a, а через K, M и N — точки касания самих окружностей. Отрезки O_1A, O_2B и OC перпендикулярны прямой a как радиусы, проведенные в точки касания.

Опустим перпендикуляр O_1D из центра меньшей из данных окружностей на радиус O_2B большей окружности и перпендикуляры OE и OF из точки O на радиусы O_1A и O_2B. Поскольку $O_1A \parallel O_2B$, точки E, O и F лежат на одной прямой, а так как O_1DFE — прямоугольник, то $O_1D = EF$.

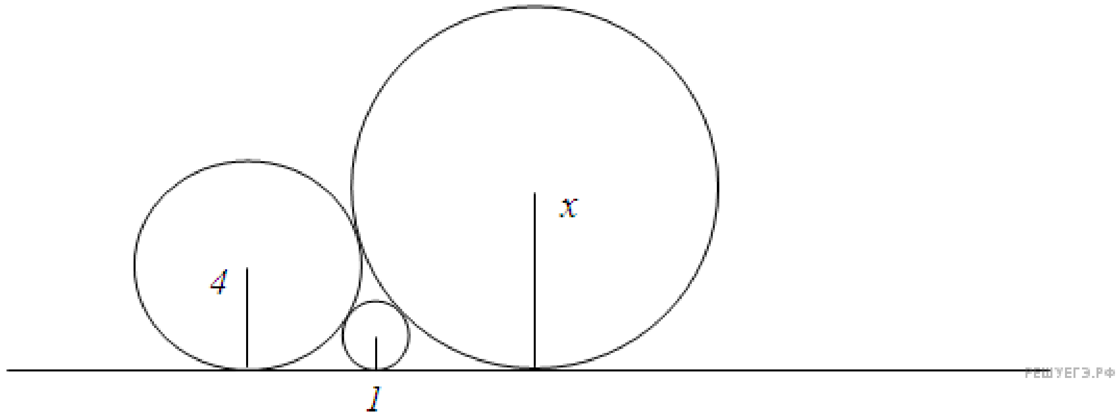
Кроме того,

$O_1O = r + x$, $O_1O_2 = r + R$, $O_2O = R + x$, $O_1E = r - x$, $O_2F = R - x$, $O_2D = R - r$, $O_1D = EF = EO + OF$.

Далее имеем:

$$\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = \sqrt{(r+x)^2-(r-x)^2} + \sqrt{(R+x)^2-(R-x)^2} \Leftrightarrow$$
$$2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{rx} + 2\sqrt{Rx} \Leftrightarrow 2\cdot 3 = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1,44.$$

Второй случай. Пусть теперь окружность с центром O_1 имеет радиус $R = 9$, окружность с центром О имеет радиус $r = 4$, а окружность центром O_2 имеет радиус x и касается двух данных окружностей и их общей внешней касательной a.



Аналогично случаю 1 имеем:

$$\sqrt{(x+R)^2-(x-R)^2} = \sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} + \sqrt{(x+r)^2-(x-r)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{Rx} = 2\sqrt{Rr} + 2\sqrt{rx} \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 2\cdot 3 \Leftrightarrow x = 36.$$

Ответ: 1,44 или 36.

20. C 5 № 500819. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x^2-8x+7\geq 0: f(x)=x^2+2(a-4)x+7$, а ее график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4-a$;

б) при $x^2-8x+7<0: f(x)=-x^2+(2a+8)x-7$, а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

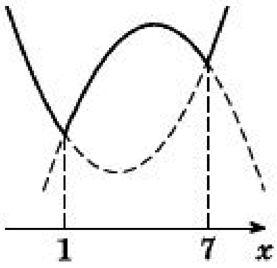


Рис. 1

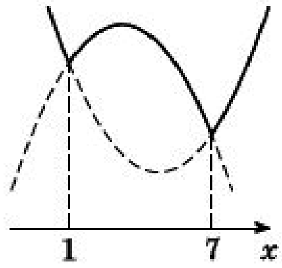


Рис. 2

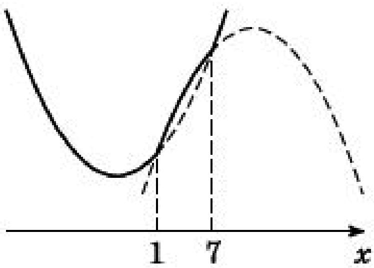


Рис. 3

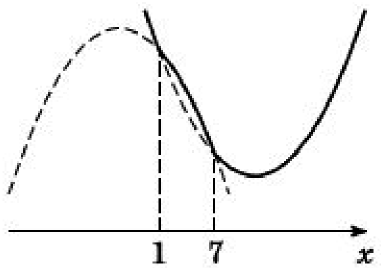


Рис. 4

2. Наименьшее значение функции $f(x)$ может принять только в точках $x=1$ или $x=7$, а если $4-a\notin[1;7]$ – то в точке $x=4-a$.

3. Наименьшее значение функции f больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1)>1, \\ f(7)>1, \\ f(4-a)>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a>1, \\ 14a>1, \\ 2a(4-a)+|a^2-9|>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{1}{2}, \\ a>\dfrac{1}{14}, \\ 2a^2-8a+1-|a^2-9|<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [$$

21. C 6 № 500023. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение.

а) Среди восьми данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю.

б) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 1.

в) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4.

Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: (1; -2); (-2; 1); (-3; 4); (4; -3); (-5; 7); (7; -5); (-8; 9); (9; -8).

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.