Вариант № 2887273

1. B 1 № 318579. Диагональ экрана телевизора равна 64 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах, если в одном дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

Решение.

Диагональ экрана телевизора равна $64 \cdot 2{,}54 = 162{,}56$ см. Округляя, получаем 163 см.

Ответ: 163.

2. B 2 № 26619. Шариковая ручка стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 900 рублей после повышения цены на 10%?

Решение.

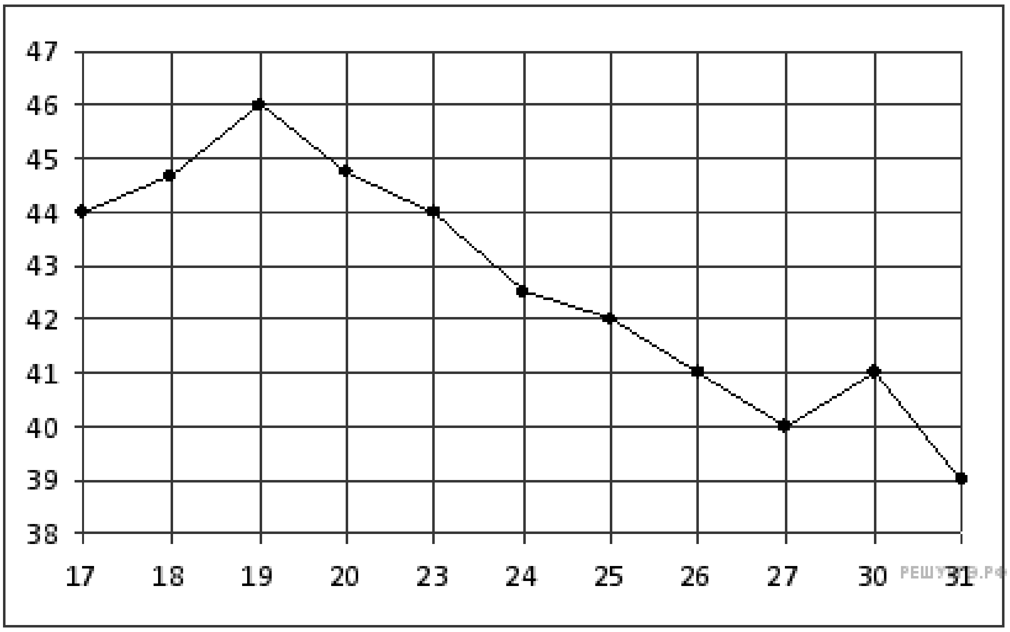
После повышения цены ручка станет стоить $40 + 0{,}1 \cdot 40 = 44$ рубля. Разделим 900 на 44:

$$\frac{900}{44} = \frac{225}{11} = \frac{220+5}{11} = \frac{220}{11} + \frac{5}{11} = 20\frac{5}{11}.$$

Значит, можно будет купить 20 ручек.

Ответ: 20.

3. B 3 № 26872. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



Решение.

Из графика видно, что наименьшая цена за баррель нефти составляла 39 долларов США (см. рисунок).

Ответ: 39.

4. B 4 № 41055.
При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 9 тонн природного камня и 13 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 7 тонн щебня и 50 мешков цемента. Тонна камня стоит 1450 рублей, щебень стоит 700 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 220 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешевый вариант?

Решение.

Рассмотрим два варианта.

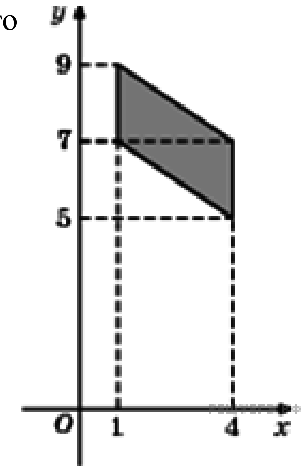
Стоимость каменного фундамента складывается из стоимости камня $9 \cdot 1450 = 13\ 050$ руб., а также стоимости цемента $13 \cdot 220 = 2860$ руб. Всего $2860 + 13\ 050 = 15\ 910$ руб.

Стоимость бетонного фундамента складывается из стоимости цемента $50 \cdot 220 = 11\ 000$ руб., а также стоимости щебня $7 \cdot 700 = 4900$ руб. Всего $4\ 900 + 11\ 000 = 15\ 900$ руб.

Стоимость самого дешевого варианта составляет 15 900 рублей.

Ответ: 15 900.

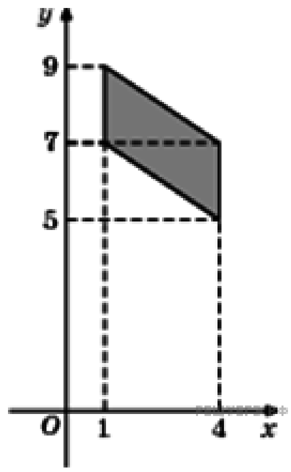
5. B 5 № 27577. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (1;7), (4;5), (4;7), (1;9).



Решение.
Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту. Поэтому

$$S = (9-7) \cdot (4-1) = 6.$$

Ответ: 6.



6. B 6 № 285928. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая.

Решение.

Вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая, равна

$$\frac{9}{25}=0,36.$$

Ответ: 0,36.

7. B 7 № 77381. Решите уравнение $\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1.$

Решение.

Заметим, что $1=\log_5 5$ и используем формулу $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$. Имеем:

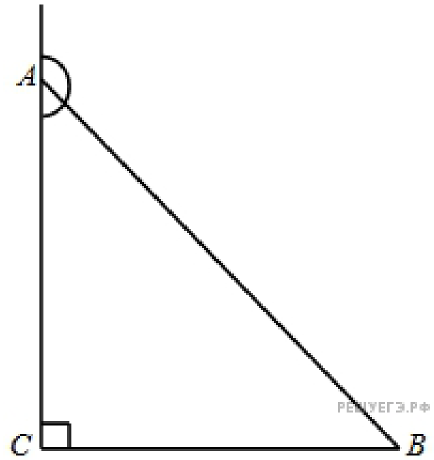
$$\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1 \Leftrightarrow \log_5(7-x)=\log_5(3-x)+\log_5 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x>0, \\ 7-x=5(3-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x>-3, \\ 7-x=15-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

8. B 8 № 27417.

В треугольнике ABC угол C равен $90°$, синус внешнего угла при вершине A равен $\frac{\sqrt{17}}{17}$, $BC=0,5$. Найдите AC.



Решение.

$$AC=\frac{BC}{\operatorname{tg}A}=\frac{BC\cdot\cos A}{\sin A}=\frac{BC\sqrt{1-\sin^2 A_{\text{внеш}}}}{\sin A}=$$

$$=\frac{BC\sqrt{1-\sin^2 A_{\text{внеш}}}}{\sin A_{\text{внеш}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{1}{17}}}{\frac{\sqrt{17}}{17}}=2.$$

Ответ: 2.

9. B 9 № 27486. Прямая $y=-4x-11$ является касательной к графику функции $y=x^3+7x^2+7x-6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

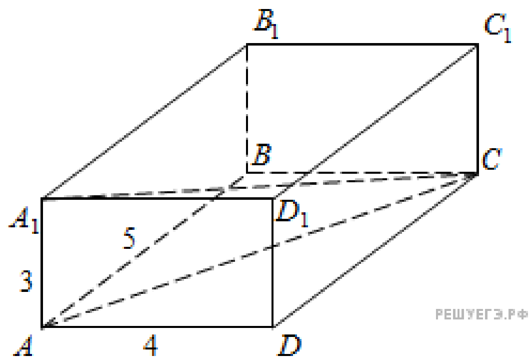
В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 3x^2 + 14x + 7 = -4, \\ x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 14x + 11 = 0, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{11}{3}, \\ x = -1, \end{array}\right. \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \ (*). \end{cases}$$

Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания −1.

Ответ: −1.

10. B 10 № 245359. Найдите квадрат расстояния между вершинами C и A_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$.



Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AA_1C, в котором A_1C является гипотенузой. По теореме Пифагора

$$A_1C^2 = AA_1^2 + AC^2.$$

В прямоугольнике $ABCD$ AC – диагональ, $AB=CD$. Значит,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 16 + 25 = 41,$$
$$A_1C^2 = 9 + 41 = 50.$$

Ответ: 50.

11. B 11 № 85983.

Найдите значение выражения $\dfrac{4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{x} + 4x + 5$ при $x = 1$.

Решение.

Поскольку $\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, имеем:

$$\frac{4\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+4x+5=\frac{4\sqrt{x}-1+1}{\sqrt{x}}+4x+5=4+4x+5=9+4x=13.$$

Ответ: 13.

Приведем другое решение.

По условию $x=1$, поэтому $\sqrt{x}=1$. Тогда имеем:

$$\frac{4-1}{1}+\frac{1}{1}+4+5=13.$$

12. B 12 № 27969. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры: $P=\sigma ST^4$, где $\sigma=5,7\cdot10^{-8}$ – постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S=\frac{1}{16}\cdot10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $9,12\cdot10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Решение.

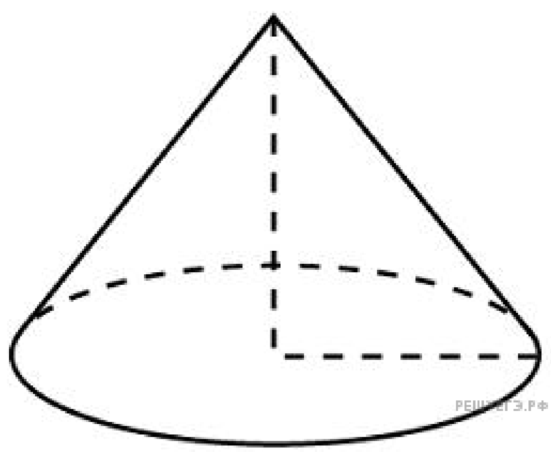
Задача сводится к нахождению наименьшего решения неравенства $P\geq 9,12\cdot10^{25}$ при известном значениях постоянной $\sigma=5,7\cdot10^{-8}$ и заданной площади звезды $S=\frac{1}{16}\cdot10^{20}$:

$$P\geq 9,12\cdot10^{25}\Leftrightarrow \sigma ST^4\geq 9,12\cdot10^{25}\Leftrightarrow T^4\geq\frac{9,12\cdot10^{25}}{\sigma S}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T\geq\sqrt[4]{\frac{9,12\cdot10^{25}}{5,7\cdot10^{-8}\cdot\frac{1}{16}\cdot10^{20}}}\Leftrightarrow T\geq\sqrt[4]{256\cdot10^{12}}=4000\text{ К}.$$

Ответ: 4000.

13. B 13 № 27135. Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Решение.

Площадь боковой поверхности конуса равна $S = \pi R l = \frac{1}{2}Cl$, где C – длина окружности основания, а l – образующая. Тогда

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = 3.$$

Ответ: 3.

14. B 14 № 99582. Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

Решение.

В первый день турист прошел $a_1 = 10$ км, во второй – a_2, …, в последний – a_6 км. Всего он прошел $S_n = 120$ км. Каждый день турист проходил больше, чем в предыдущий день, на d км, $S_n = \frac{2a_1 + d\cdot(n-1)}{2}n$, $n = 6$ дней. Таким образом,

$$d = \frac{\left(\frac{2S_n}{n} - 2a_1\right)}{n-1} = \frac{\frac{240}{6} - 20}{5} = 4 \text{ км}.$$

Тогда за третий день турист прошел

$$a_3 = a_1 + 2d = 10 + 2\cdot 4 = 18 \text{ км}.$$

Ответ: 18.

15. B 15 № 26727. Найдите точку минимума функции $y = (x-2)^2 e^{x-5}$.

Решение.

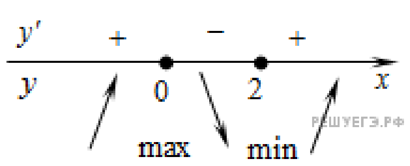
Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x-2)^2)'e^{x-5} + ((x-2)^2)(e^{x-5})' = (2(x-2))e^{x-5} + ((x-2)^2)e^{x-5} =$$
$$= x(x-2)e^{x-5}.$$

Найдем нули производной:

$$x(x-2)e^{x-5} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 2$.

Ответ: 2.

16. C 1 № 485977. а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

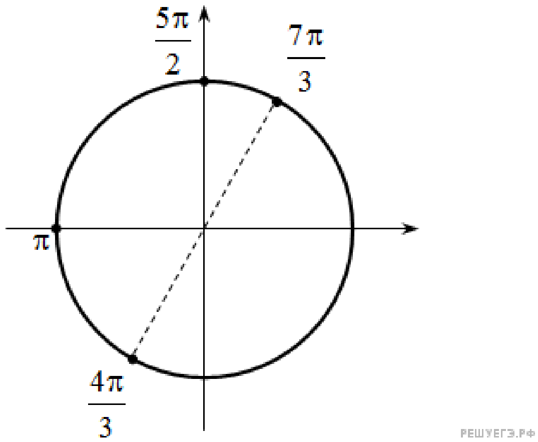
Решение.
а) Разложим левую часть на множители:

$$2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x-4\sin x+4\sqrt{3}\cos x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x(\cos x-2)-\sqrt{3}\cos x(\cos x-2)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos x-2)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)=0.$$

Уравнение $\cos x-2=0$, не имеет корней. Имеем
$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=0.$$

Если $\cos x=0$, то $\sin x=0$, это невозможно. Это однородное уравнение первой степени, разделим обе его части на $\cos x$. Получаем:
$$\operatorname{tg} x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

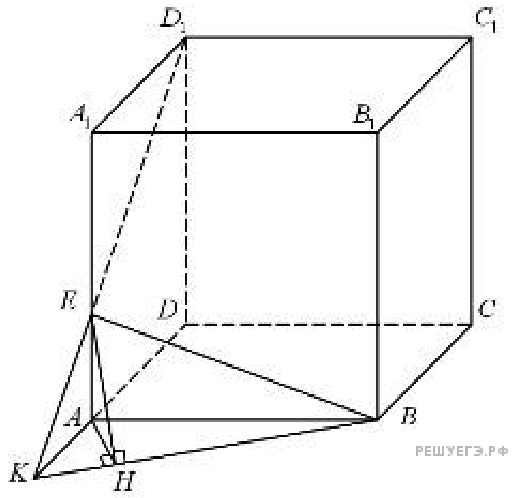
б) Отрезку $\left[\pi,\ \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{7\pi}{3}$.
(см. рис.)



Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, б) $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{7\pi}{3}$.

17. C 2 № 500367. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=2:1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Решение.



Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K. Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB.

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB, тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB. Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1.

Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 1$, получаем:

$$AE = \frac{2AA_1}{3} = 2,\ EA_1 = AA_1 - AE = 1.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 2.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом $A : AB = 1, AK = 2, BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота $AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \angle AHE = \operatorname{arctg} \sqrt{5}.$$

Ответ может быть представлен и в другой форме: $\angle AHE = \arcsin \frac{\sqrt{30}}{6}$ или $\angle AHE = \arccos \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{5}$.

18. C 3 № 501946. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{5-x} \dfrac{x+4}{(x-5)^{10}} \geq -10, \\ x^3 + 8x^2 + \dfrac{50x^2 + x - 7}{x - 7} \leq 1. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{5-x}\frac{x+4}{(x-5)^{10}} \geq -10 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+4) - \log_{5-x}(x-5)^{10} \geq -10 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+4) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 5-x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+4) \leq 0, \\ 0 < 5-x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+4 \leq 1, \\ 4 < x < 5. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений.

Второй случай: $5-x > 1$. Имеем:

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+4) \leq 0, \\ 5-x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 > 1, \\ x < 4. \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < 4.$$

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2 + x - 7}{x-7} \leq 1 \Leftrightarrow x^3 + 8x^2 + \frac{50x^2}{x-7} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^4 + x^3 - 6x^2}{x-7} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-2)(x+3)}{x-7} \leq 0.$$

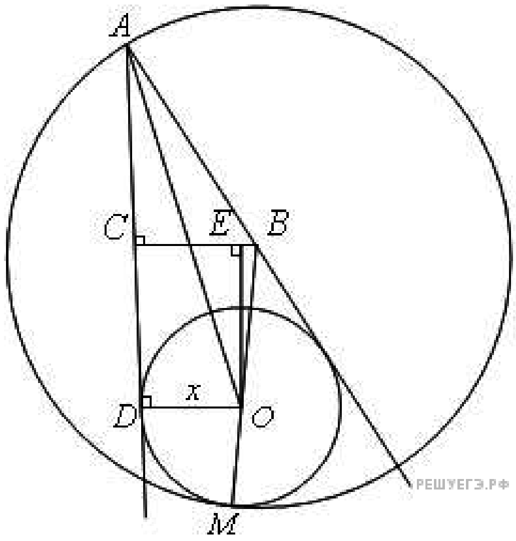
Решение второго неравенства исходной системы: $x \leq -3,\ x = 0,\ 2 \leq x < 7.$

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -3,\ x = 0,\ 2 \leq x < 4.$

Ответ: −3; 0; [2; 4).

19. C 4 № 485985. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 15$ и $BC = 8$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 17. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

Решение.



Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{15}$, $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\sin\alpha = \frac{8}{17}$. Пусть x — радиус искомой окружности, O — ее центр, D — точка касания с лучом AC, M — точка касания с окружностью S, E — проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$\operatorname{ctg}\angle OAD = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = 4.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что $AD = 4OD$, и тогда $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 4.$

Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: одна из них касается окружности S внутренним образом, а вторая — внешним.

В первом случае:

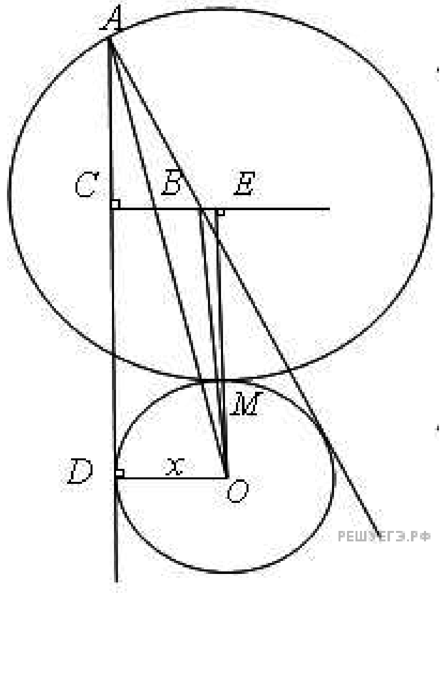
$$BO = BM - OM = 17 - x,$$
$$OE = CD = |AD - AC| = |4x - 15|,$$
$$BE = |BC - CE| = |BC - OD| = |8 - x|.$$

По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$:

$$(17-x)^2 = (4x-15)^2 + (8-x)^2, 16x^2 - 102x = 0,$$

откуда находим, что $x = \frac{51}{8}$.

Во втором случае:



$$BO = BM + MO = 17 + x,$$
$$OE = CD = |AD - AC| = |4x - 15|,$$
$$BE = |CE - BC| = |OD - BC| = |x - 8|.$$

Тогда $(17+x)^2 = (4x-15)^2 + (x-8)^2$, $16x^2 - 170x = 0$, откуда находим, что $x = \frac{85}{8}$.

Ответ: $\frac{51}{8}$ или $\frac{85}{8}$.

20. C 5 № 484632. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$ имеет решения?

Решение.

Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} (x-1)^2 = y+1, \\ (y-a)^2 + (x-1)^2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда приходим к системе

$$\begin{cases} (y-a)^2 + y + 1 = 1, \\ y + 1 \geq 0, \end{cases}$$

или к системе

$$\begin{cases} y^2 + (1-2a)y + a^2 = 0, \\ y \geq -1. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, находим, что $y = \dfrac{2a - 1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$.

Требование задачи будет выполнено, если последняя смешанная система имеет хотя бы одно решение. Искомые значения a находятся из неравенства

$$\frac{2a - 1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} \geq -1,$$

решая которое, получаем $a \in \left[-2, \dfrac{1}{4}\right]$.

Ответ: $a \in \left[-2, \dfrac{1}{4}\right]$.

21. C 6 № 502298. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Решение.

а) Задуманные числа 3, 3, 3, 3, 3 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $23 - 1 = 22$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 8 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части числа $\frac{47}{8}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 10 меньше, чем сумма двух восьмёрок, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $47 - 8 - 9 - 10 = 20$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 8, оставшиеся задуманные числа — это 10 и 10 или 20 (если бы 20 получалось как $8 + 12$ или $9 + 11$, то были бы выписаны числа 12 или 11, но их нет). Для задуманных чисел 8, 9, 10, 10, 10 и 8, 9, 10, 20 на доске будет записан набор, данный в условии. (Для чисел 8, 9, 10, 20 это можно проверить непосредственно, а для чисел 8, 9, 10, 10, 10 — заметить, что они будут давать точно те же суммы, что и числа 8, 9, 10, 20.)

Ответ: а) 3, 3, 3, 3,3; б) нет; в) 8, 9, 10, 10, 10 или 8, 9, 10, 20.