Вариант № 2887193

1. B 1 № 26624. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 3 раза в день в течение 21 дня. В одной упаковке 10 таблеток лекарства по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

Решение.

Больному нужно выпить 0,5 · 3 · 21 = 31,5 г лекарства. В одной упаковке содержится 0,5 · 10 = 5 г лекарства. Разделим 31,5 на 5:

$$\frac{31,5}{5}=\frac{315}{50}=\frac{300+15}{50}=\frac{300}{50}+\frac{3}{10}=6,3.$$

Значит, на курс лечения необходимо 7 упаковок.

Ответ: 7.

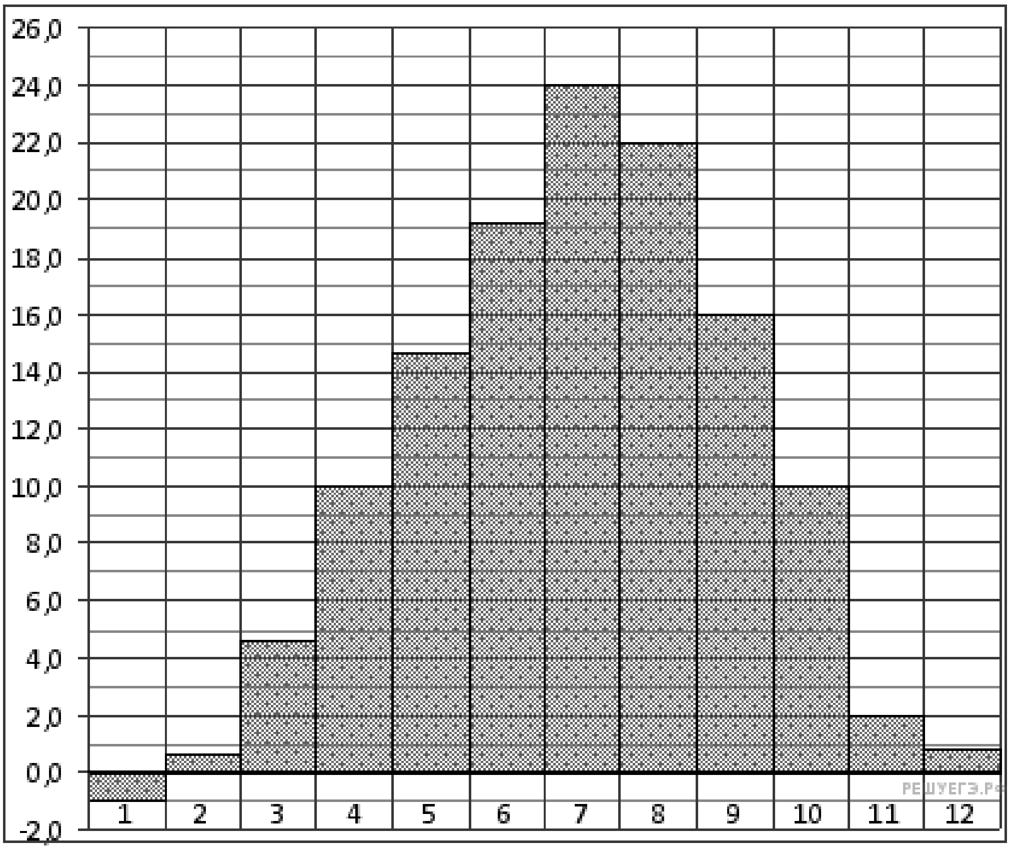
2. B 2 № 77365. Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 5%. Книга стоит 200 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

Решение.

Скидка на покупку составит 200 · 0,05 = 10 рублей. Значит, держатель дисконтной карты заплатит за книгу 200 − 10 = 190 рублей.

Ответ: 190.

3. B 3 № 27521. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура превышала 20 градусов Цельсия.



Решение.

Из диаграммы видно, что было 2 месяца, когда среднемесячная температура превышала 20 градусов Цельсия (см. рисунок).

Ответ: 2.

4. B 4 № 18763.
Для того, чтобы связать свитер, хозяйке нужно 800 граммов шерсти красного цвета. Можно купить красную пряжу по цене 80 рублей за 100 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 50 рублей за 100 г и окрасить ее. Один пакетик краски стоит 20 рублей и рассчитан на окраску 400 г пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

Решение.

Один моток пряжи весит 100 г., следовательно, на свитер нужно 8 мотков шерсти.

Рассмотрим два варианта.

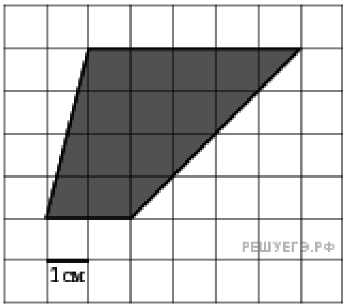
Если покупать готовую пряжу красного цвета, то стоимость свитера будет $80 \cdot 8 = 640$ руб.

На неокрашенную пряжу нужно потратить $50 \cdot 8 = 400$ руб. Но на окраску пряжи потребуется 2 пакетика краски по 20 руб., то есть еще 40 руб. Итого на свитер из самостоятельно окрашенной пряжи потратится 440 руб.

Второй вариант дешевле, чем первый.

Ответ: 440.

5. B 5 № 27558. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



Решение.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Поэтому

$$S = \frac{2+5}{2} \cdot 4 = 14 \text{ см}^2.$$

Ответ: 14.

6. B 6 № 320185. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что в первый раз выпадает орёл, а во второй — решка.

Решение.

Всего возможных исходов — четыре: орел-орел, орел-решка, решка-орел, решка-решка. Благоприятным является один: орел-решка. Следовательно, искомая вероятность равна 1 : 4 = 0,25.
Ответ: 0,25.

7. B 7 № 104023.
Решите уравнение $\sin \frac{\pi(2x-3)}{6} = -0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

Решение.

Решим уравнение:

$$\sin\frac{\pi(2x-3)}{6}=-0,5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi(2x-3)}{6}=-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\\ \frac{\pi(2x-3)}{6}=\frac{7\pi}{6}+2\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-3=-1+12k;\\ 2x-3=7+12k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+6k;\\ x=5+6k, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Если $k=0$, то $x=1$ и $x=5$.

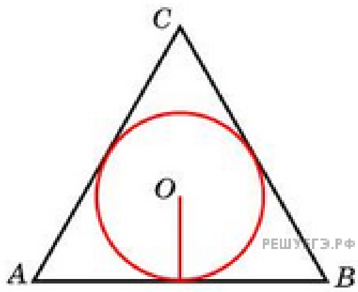
Значениям $k\geq 1$ соответствуют большие положительные корни.

Значениям $k\leq -1$ соответствуют отрицательные значения корней.

Наименьшим положительным решением является 1.

Ответ: 1.

8. B 8 № 27910. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Найдите сторону этого треугольника.

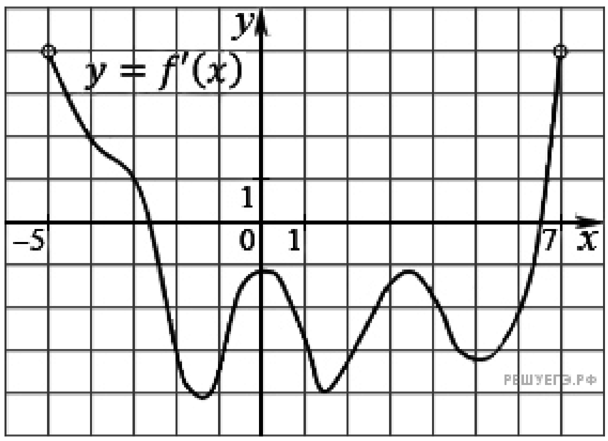


Решение.

Известно, что $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$, а по условию $r=\frac{\sqrt{3}}{6}$. Поэтому длина стороны треугольника $a=1$.

Ответ: 1.

9. B 9 № 27498. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−5; 7). Найдите промежутки убывания функции *f(x)*. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

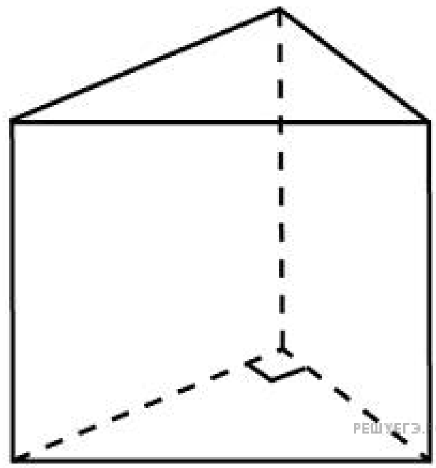


Решение.

Промежутки убывания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть интервалу (−2,5; 6,5). Данный интервал содержит следующие целые точки: –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 сумма которых равна 18.

Ответ: 18.

10. B 10 № 27083. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5. Объем призмы равен 30. Найдите ее боковое ребро.



Решение.

Объем прямой призмы равен $V = Sh$ где S – площадь основания, а h – боковое ребро. Тогда длина ее бокового ребра равна

$$h = \frac{V}{S} = \frac{30}{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5} = 4.$$

Ответ: 4.

11. B 11 № 26797. Найдите значение выражения $\frac{\left(5a^2\right)^3\cdot(6b)^2}{\left(30a^3b\right)^2}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{\left(5a^2\right)^3\cdot(6b)^2}{\left(30a^3b\right)^2} = \frac{5^3a^6\cdot 6^2b^2}{30^2a^6b^2} = \frac{5^3\cdot 6^2}{5^2\cdot 6^2} = 5.$$

Ответ: 5.

12. B 12 № 27994. Емкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 2\cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5\cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ – постоянная. Определите (в киловольтах), наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 21 с?

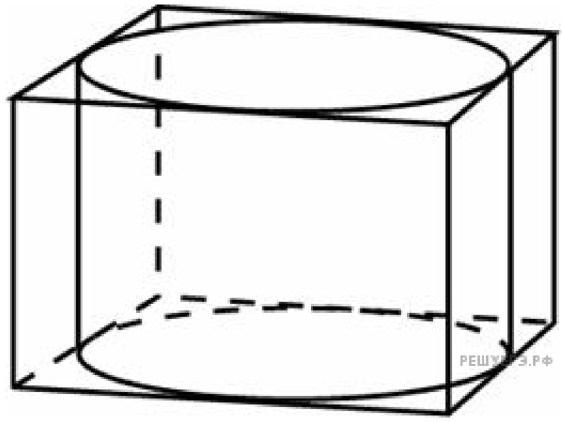
Решение.

Задача сводится к решению неравенства $t \geq 21$ при заданных значениях начального напряжения на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ, сопротивления резистора $R = 5\cdot 10^6$ Ом и ёмкости конденсатора $C = 2\cdot 10^{-6}$ Ф:

$$t \geq 21 \Leftrightarrow 0{,}7\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot 5\cdot 10^6\cdot\log_2\frac{16}{U} \geq 21 \Leftrightarrow \log_2\frac{16}{U} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{16}{U} \geq 8 \Leftrightarrow U \leq 2 \text{ кВ}.$$

Ответ: 2.

13. B 13 № 27064. Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Решение.

Высота призмы равна высоте цилиндра, а сторона ее основания равна диаметру цилиндра. Тогда площадь боковой поверхности

$$S = 4(2rH) = 4(2 \cdot 1 \cdot 1) = 8.$$

Ответ: 8.

14. B 14 № 99589. Из городов A и B, расстояние между которыми равно 330 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 3 часа на расстоянии 180 км от города B. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города A. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Автомобиль, выехавший из города A, преодолел расстояние (330 – 180) км = 150 км за 3 часа. Пусть v км/ч – скорость данного автомобиля. Таким образом,

$$v = \frac{150}{3} = 50 \text{ км/ч}.$$

Ответ: 50.

15. B 15 № 26732. Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - 8x + 8)e^{6-x}$.

Решение.

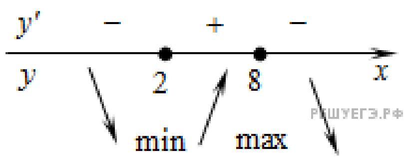
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x^2 - 8x + 8)'e^{6-x} + (x^2 - 8x + 8)(e^{6-x})' =$$
$$= (2x - 8)e^{6-x} - (x^2 - 8x + 8)e^{6-x} = (-x^2 + 10x - 16)e^{6-x}.$$

Найдем нули производной:

$$(x^2 - 10x + 16)e^{6-x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 8. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 2$.

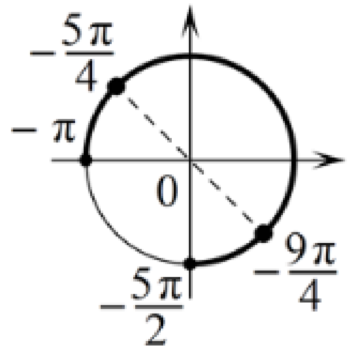
Ответ: 2.

16. C 1 № 501944. а) Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{-5\pi}{2}, -\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:



$$2^{\sin x} \cdot 5^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x} \Leftrightarrow \ 5^{\sin x} = 5^{-\cos x} \ \Leftrightarrow \ \sin x = -\cos x \ \Leftrightarrow \ \mathrm{tg} = -1,$$

откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

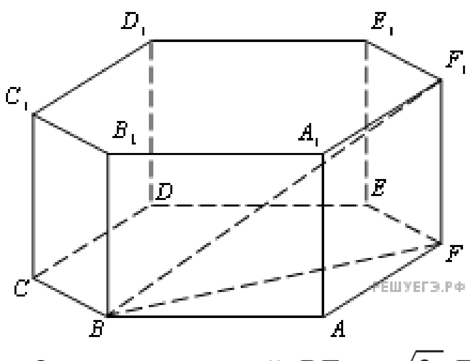
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{-5\pi}{2}, -\pi\right]$. Получим числа: $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, б) $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}$.

17. C 2 № 484566. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 найдите расстояние от точки B до прямой E_1F_1.

Решение.

Проведем отрезки BF и BF_1, $BF \perp BC$, поскольку $\angle CBA = 120^\circ$, а $\angle ABF = 30^\circ$. BF — проекция BF_1 на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $BF_1 \perp E_1F_1$. Таким образом искмое расстояние — длина отрезка BF_1.



Рассмотрим треугольник BFF_1. Он прямоугольный, $BF = \sqrt{3}$, $FF_1 = 1$.

По теореме Пифагора находим: $BF_1 = \sqrt{3+1} = 2$.

Ответ: 2.

18. C 3 № 485993. Решите систему

$$\begin{cases} 5^{3x-1} - 5^{3x+1} \leq -72, \\ \log_{\frac{x}{3}} \left(3x^2 - 2x + 1\right) \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство:

$$5^{3x-1}(1-25) \leq -72 \Leftrightarrow 5^{3x-1} \geq 3 \Leftrightarrow 3x-1 \geq \log_5 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{\log_5 3+1}{3}.$$

2. Решим второе неравенство. Заметим, что $3x^2-2x+1>0$ при всех x. При условиях $x>0$ и $x \neq 3$ получаем неравенство

$$\left(\frac{x}{3}-1\right)\left(3x^2-2x+1-1\right) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-3)(3x-2) \geq 0.$$

При указанных условиях получаем: $0<x \leq \frac{2}{3}$ или $x>3$.

3. Решением системы является общая часть решений двух неравенств. $0<\log_5 3<1$, поэтому

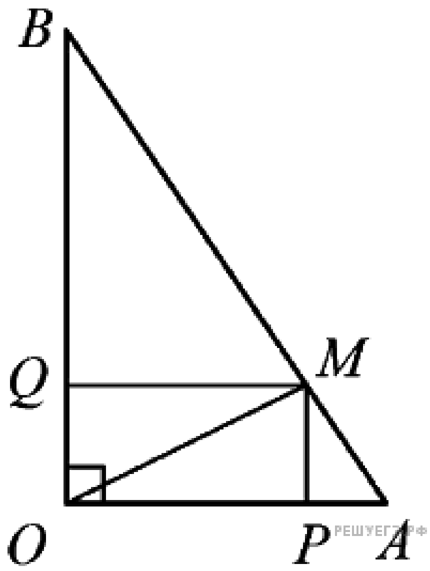
$\frac{1}{3}<\frac{\log_5 3+1}{3}<\frac{2}{3}$. Следовательно, $\frac{\log_5 3+1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ или $x>3$.

Ответ: $\left[\frac{\log_5 3+1}{3}; \frac{2}{3}\right], (3; +\infty)$.

19. C 4 № 501047. Расстояния от точки M, расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 3 и 6. Через точку M проведена прямая, отсекающая от угла треугольник, площадь которого равна 48. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри угла.

Решение.

Пусть O — вершина данного угла, P и Q — проекции точки M на стороны угла, $MP=3$, $MQ=6$, A и B — точки, в которых прямая, проходящая через точку M, пересекает стороны соответственно OP и OQ данного прямого угла. Обозначим $OA=x$, $OB=y$. Тогда $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}xy=48.$



С другой стороны,

$$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta AOM}+S_{\Delta BOM}=\frac{1}{2}OA\cdot MP+\frac{1}{2}OB\cdot MQ=\frac{1}{2}x\cdot 3+\frac{1}{2}y\cdot 6=\frac{3}{2}x+3y=48.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases}\frac{1}{2}xy=48,\\ \frac{3}{2}x+3y=48.\end{cases}$$

Находим, что $x=8$, $y=12$ или $x=24$, $y=4$. Следовательно,

$$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{862+12^2}=4\sqrt{13}$$

или

$$AB=\sqrt{24^2+4^2}=4\sqrt{37}.$$

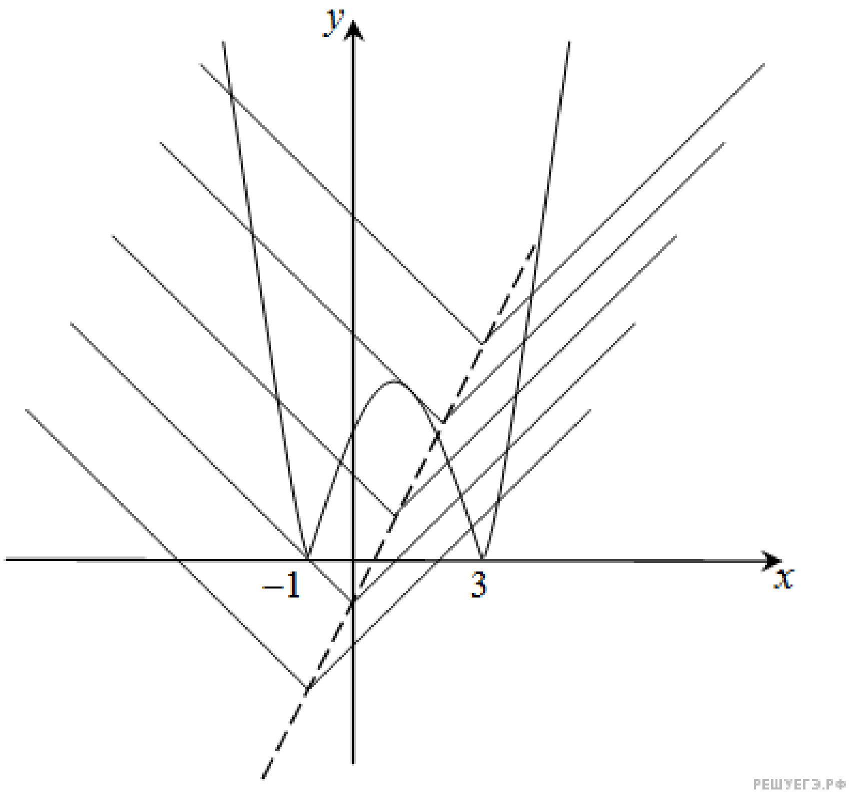
Ответ: $4\sqrt{13}$ или $4\sqrt{37}$.

20. C 5 № 485982. При каких a уравнение $\left|x^2-2x-3\right|-2a=|x-a|-1$ имеет ровно три корня?

Решение.

Запишем уравнение в виде $\left|x^2-2x-3\right| = |x-a|+2a-1.$

Построим графики левой и правой частей уравнения (см. рис.) Из рисунка видно, что подходящих значений a ровно два — при одном из них график правой части проходит через точку $(-1,0)$ при другом — касается отраженного участка параболы.



Первое происходит при $a=0$, а второе — когда уравнение $3+2x-x^2=3a-1-x$ имеет единственный корень. Приравнивая дискриминант к нулю, находим $a=\dfrac{25}{12}.$

Ответ: $a=0, a=\dfrac{25}{12}.$

21. C 6 № 500391. Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 17.

а) Может ли число S быть равным 34?

б) Может ли число S быть больше $33\dfrac{1}{18}$?

в) Найдите максимально возможное значение S.

Решение.

а) Рассмотрим разбиение числа 34 на 35 слагаемых, равных $\frac{34}{35}$. При разделении этих слагаемых на две группы в одной из них окажется не менее 18 чисел, сумма которых равна $18\cdot\frac{34}{35}=\frac{612}{35}=17\frac{17}{35}>17$. Значит, S не может быть равным 34.

б) Поскольку S является суммой двух чисел, не больших 17, получаем $S\le 34$. Пусть $33\frac{1}{18}<S\le 34$. Рассмотрим разбиение числа S на 35 слагаемых, равных $\frac{S}{35}\le\frac{34}{35}<1$. При разделении этих слагаемых на две группы в одной из них окажется не менее 18 чисел, сумма которых равна

$18\cdot\frac{S}{35}>18\cdot\frac{33\frac{1}{18}}{35}=17$. Значит, S не может быть больше $33\frac{1}{18}$.

в) Докажем, что число $33\frac{1}{18}$ удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим произвольное представление $33\frac{1}{18}$ в виде суммы положительных слагаемых, не превосходящих 1: $S=x_1+x_2+\ldots+x_n$. Можно считать, что слагаемые упорядочены по убыванию: $x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_{n-1}\ge x_n$. Первую группу составим из k небольших слагаемых так, чтобы $S_1=x_1+x_2+\ldots+x_k\le 17<x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}$. Вторую группу составим из оставшихся слагаемых.

Пусть $S_1<16\frac{1}{18}=33\frac{1}{18}-17$. В этом случае $\frac{17}{18}<17-S_1<x_{k+1}\le x_k\le\ldots\le x_1$ и $\frac{17}{18}k<x_1+\ldots+x_k=S_1<16\frac{1}{18}$. Поэтому $k<17$, $k\ge 16$ и $S_1=x_1+x_2+\ldots+x_k\le 16$. Тогда $1\le 17-S_1<x_{k+1}\le 1$.

Полученное противоречие доказывает, что $S_1=16\frac{1}{18}$. Поэтому сумма слагаемых во второй группе $S_2=x_{k-1}+x_{k+2}+\ldots+x_n=33\frac{1}{18}-S_1\le 17$.

Таким образом, число $S=33\frac{1}{18}$ удовлетворяет условию задачи. В предыдущем пункте было показано, что ни одно из чисел $S>33\frac{1}{18}$ не удовлетворяет условию задачи, значит, максимально возможное значение S — это $33\frac{1}{18}$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) $33\frac{1}{18}$.