Вариант № 2887085

1. B 1 № 77334. В обменном пункте 1 гривна стоит 3 рубля 70 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на гривны и купили 3 кг помидоров по цене 4 гривны за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

Решение.

За 3 кг помидоров отдыхающие заплатили $4 \cdot 3 = 12$ гривен. Значит, в рублях они заплатили: $12 \cdot 3{,}7 = 44{,}4$ рубля. Округляем до целого числа, получаем 44.

Ответ: 44.

2. B 2 № 26630. Футболка стоила 800 рублей. После снижения цены она стала стоить 680 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

Решение.

Цена на футболку была снижена на 800 − 680=120 рублей. Разделим 120 на 800:

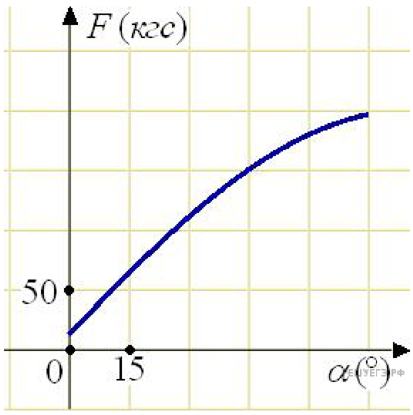
$$\frac{120}{800} = \frac{3}{20} = 0,15.$$

Значит, цена на футболку была снижена на 15%.

Ответ: 15.

3. B 3 № 263864.

В аэропорту чемоданы пассажиров поднимают в зал выдачи багажа по транспортерной ленте. При проектировании транспортера необходимо учитывать допустимую силу натяжения ленты транспортера. На рисунке изображена зависимость натяжения ленты от угла наклона транспортера к горизонту при расчетной нагрузке. На оси абсцисс откладывается угол подъема в градусах, на оси ординат – сила натяжения транспортерной ленты (в килограммах силы). При каком угле наклона сила натяжения достигает 150 кгс? Ответ дайте в градусах.



Решение.

Из графика видно, что сила натяжения достигает 150 кгс при угле наклона 45 градусов.

Ответ: 45.

4. B 4 № 77359. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает сертификат на 1000 рублей, который можно обменять в том же магазине на любой товар ценой не выше 1000 руб. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель И. хочет приобрести пиджак ценой 9500 руб., рубашку ценой 800 руб. и галстук ценой 600 руб. В каком случае И. заплатит за покупку меньше всего:

1) И. купит все три товара сразу.
2) И. купит сначала пиджак и рубашку, галстук получит за сертификат.
3) И. купит сначала пиджак и галстук, получит рубашку за сертификат.

В ответ запишите, сколько рублей заплатит И. за покупку в этом случае.

Решение.

Рассмотрим все случаи.

1) При покупке всех трёх товаров покупатель И. потратит 9500 + 800 + 600 = 10 900 руб.

2) При покупке пиджака и рубашки покупатель И. потратит 9500 + 800 = 10 300 руб. Поскольку эта сумма больше 10 000, галстук будет приобретён за сертификат. В этом случае покупатель потратит 10 300 руб.

3) При покупке пиджака и галстука покупатель И. потратит 9500 + 600 руб. = 10 100 руб. Поскольку эта сумма больше 10 000, рубашка будет приобретена за сертификат. В этом случае покупатель потратит 10 100 руб.

В третьем случае покупатель потратит меньше всего — 10 100 рублей.

5. B 5 № 27638. Основания трапеции равны 27 и 9, боковая сторона равна 8. Площадь трапеции равна 72. Найдите острый угол трапеции, прилежащий к данной боковой стороне. Ответ выразите в градусах.

Решение.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Пусть высота равна h, тогда

$$S=\frac{27+9}{2}\cdot h=72,$$

отсюда $h=4$. Высота в трапеции отсекает прямоугольный треугольник. Высота в прямоугольном треугольнике является катетом и равна половине гипотенузы, соответственно угол напротив высоты равен 30°.

Ответ: 30.

Примечание.

Внимательный читатель заметит, что трапеции описанной в условии и изображенной на рисунке не существует. Действительно, сумма длин меньшего основания и двух боковых сторон трапеции оказалась меньше длины большего основания, а это невозможно. Мы уже связались с составителями заданий и сообщили им об этом.

Но при этом в тексте нигде не сказано, что трапеция равнобедренная, а наоборот, слова "острый угол трапеции, прилежащий к данной боковой стороне" «говорят» о том, что боковые стороны разные.

6. B 6 № 320186. На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

Решение.

Общее количество выступающих на фестивале групп для ответа на вопрос неважно. Сколько бы их ни было, для указанных стран есть 6 способов взаимного расположения среди выступающих (Д — Дания, Ш — Швеция, Н — Норвегия):

...Д...Ш...Н..., ...Д...Н...Ш..., ...Ш...Н...Д..., ...Ш...Д...Н..., ...Н...Д...Ш..., ...Н...Ш...Д...

Дания находится после Швеции и Норвегии в двух случаях. Поэтому вероятность того, что группы случайным образом будут распределены именно так, равна

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 0{,}33.$$

Ответ: 0,33.

Замечание.

Пусть требуется найти вероятность того, что датские музыканты окажутся последними среди n выступающих от разных государств групп. Поставим команду Дании на последнее место и найдем количество перестановок без повторений из $n-1$ предыдущих групп: оно равно $(n-1)!$ Общее количество перестановок из всех n групп равно $n!$ Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}.$$

7. B 7 № 101879.

Решите уравнение $\frac{x-6}{7x+3}=\frac{x-6}{5x-1}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

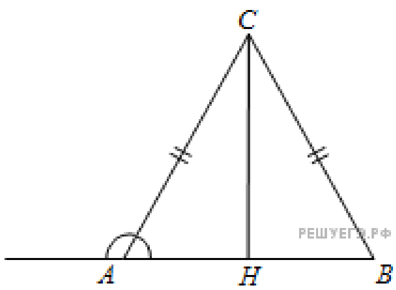
Решение.

Заметим, что числители дробей равны. Имеем:

$$\frac{x-6}{7x+3}=\frac{x-6}{5x-1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-6=0;\\7x+3=5x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6;\\x=-2.\end{array}\right.$$

Ответ: 6.

8. B 8 № 27427. В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=8$, тангенс внешнего угла при вершине A равен $-\frac{33}{4\sqrt{33}}$. Найдите AC.



Решение.

так как

$$AC=\frac{AH}{\cos A}=\frac{AH}{\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 A}}}=\frac{AH}{\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 A_{\text{внеш}}}}}=\frac{\frac{AB}{2}}{\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 A_{\text{внеш}}}}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\frac{1}{1+\frac{33}{16}}}}=\frac{4}{\sqrt{\frac{1}{\frac{49}{16}}}}=7.$$

Ответ: 7.

9. B 9 № 124215.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 - 4t + 3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 38 м/с?

Решение.

Найдем закон изменения скорости:

$$v(t) = x'(t) = \frac{1}{2}t^2 - 4t - 4.$$

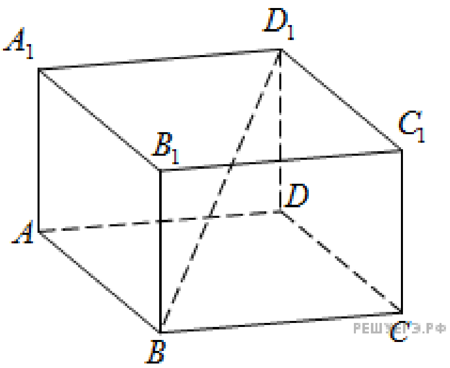
Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 38 м/с, решим уравнение:

$$\frac{1}{2}t^2 - 4t - 4 = 38 \Leftrightarrow t^2 - 8t - 84 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 14; \\ t = -6 \end{array}\right. \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t = 14 \text{ с}.$$

Следовательно, скорость точки была равна 38 м/с на четырнадцатой секунде движения.

Ответ: 14.

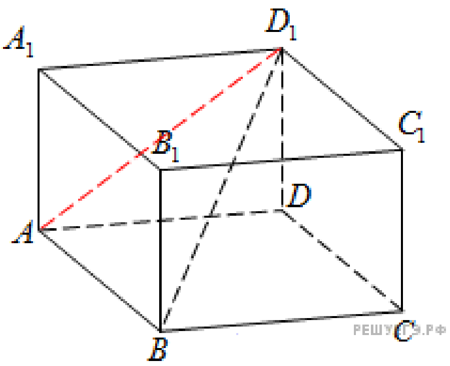
10. B 10 № 918. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $DB_1 = \sqrt{26}, AA_1 = 1, C_1B_1 = 3$. Найдите длину ребра CD.



Решение.

По теореме Пифагора

$$AD_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1D_1^2} = \sqrt{AA_1^2 + C_1B_1^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$



Тогда длина ребра CD равна

$$CD = AB = \sqrt{BD_1^2 - AD_1^2} = \sqrt{DB_1^2 - AD_1^2} = \sqrt{26 - 10} = 4.$$

Ответ: 4.

Другое решение.

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений. По условию даны длины двух измерений и длина диагонали. Осталось подставить в формулу и сосчитать.

11. B 11 № 26759. Найдите значение выражения $4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{3}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$4\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{7\pi}{3} = 4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

12. B 12 № 27996. Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\upsilon = 3$ моля воздуха объемом $V_1 = 8$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \upsilon T \log_2 \dfrac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 5,75$ – постоянная, а $T = 300$ – температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10350 Дж?

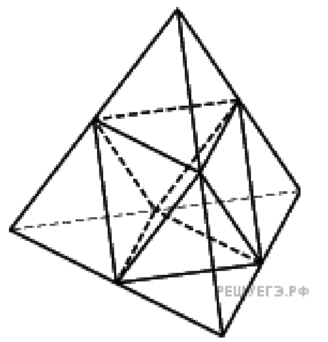
Решение.

Задача сводится к решению уравнения $\alpha \upsilon T \log_2 \dfrac{V_1}{V_2} = 10350$ при заданных значениях постоянной $\alpha = 5{,}75$, температуры воздуха $T = 300$ К, количества воздуха $\upsilon = 3$ моль и объема воздуха $V_1 = 8$ л:

$$5,75 \cdot 3 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{8}{V_2} = 10350 \Leftrightarrow \log_2 \frac{8}{V_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{8}{V_2} = 4 \Leftrightarrow V_2 = 2 \text{ л}.$$

Ответ: 2.

13. B 13 № 27215. Площадь поверхности тетраэдра равна 1,2. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.



Решение.

Искомая поверхность состоит из 8 равносторонних треугольников со стороной, вдвое меньшей ребра исходного тетраэдра. Поверхность исходного тетраэдра состоит из 16-ти таких треугольников (см. рис.), поэтому искомая площадь равна половине площади поверхности тетраэдра и равна 0,6.

Ответ: 0,6.

14. B 14 № 99620. В помощь садовому насосу, перекачивающему 5 литров воды за 2 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 3 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 25 литров воды?

Решение.

Скорость совместной работы насосов

$$(\frac{5}{2} + \frac{5}{3}) \text{л/мин} = \frac{25}{6} \text{л/мин}.$$

Для того, чтобы перекачать 25 литров воды, понадобится

$$\frac{25}{{}^{25}\!/_{6}} \text{ мин} = 6 \text{ мин}.$$

Ответ: 6.

15. B 15 № 77427. Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$.

Решение.

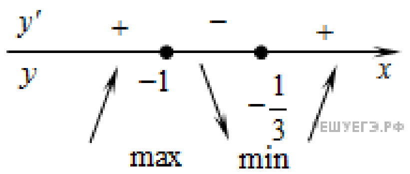
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 + 4x + 1.$$

Найдем нули производной:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -\frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -1$.

Ответ: -1.

16. C 1 № 484557. Решите уравнение $(2\sin x + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{\cos x} = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x \geq 0$.

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos x > 0$, то $2\sin x + \sqrt{3} = 0$, откуда $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая, что $\cos x > 0$, из уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

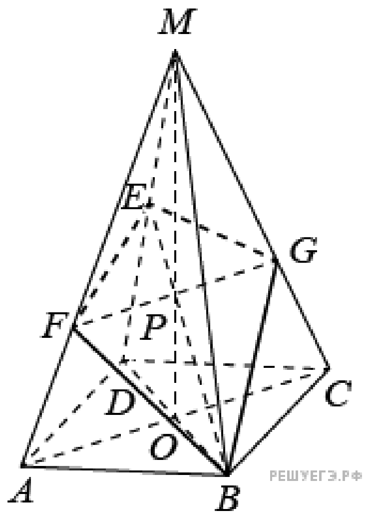
17. C 2 № 501945. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2 : 1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF : FA = MG : GC = MP : PO = 2 : 1,$$

$$FG = \frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$



Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MB^2}}{2} = 5.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{BFEG} = \frac{BE \cdot FG}{2} = 5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

18. C 3 № 484601. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_2(49 - x^2) \le 2 + \log_2(x+1), \\ \log_{0,4}(2|x-3| + |x-8| - 8) < 1. \end{cases}$

Решение.

Найдем ОДЗ первого неравенства

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ 49 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 7.$$

При этих значениях переменной во втором неравенстве: $|x-8| = 8 - x$ имеем:

$$\log_{0,4}(2|x-3| + |x-8| - 8) = \log_{0,4}(2|x-3| - x).$$

Тогда:

$$\begin{cases} -1 < x < 7, \\ \log_2(49 - x^2) \le \log_2 4 + \log_2(x+1), \\ \log_{0,4}(2|x-3| - x) < 1 \end{cases} \underset{0,4<1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -1 < x < 7, \\ \log_2(49 - x^2) \le \log_2 4(x+1), \\ 2|x-3| - x > \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underset{2>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -1 < x < 7, \\ 49 - x^2 \le 4x + 4, \\ 2|x-3| > x + \dfrac{2}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 7, \\ x^2 + 4x - 45 \ge 0, \\ 2|x-3| > x + \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 7, \\ (x+9)(x-5) \ge 0 \\ 2|x-3| > x + \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underset{x \ge 5}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5 \le x < 7, \\ 2(x-3) > x + \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \le x < 7, \\ x > 6\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 6\frac{2}{5} < x < 7.$$

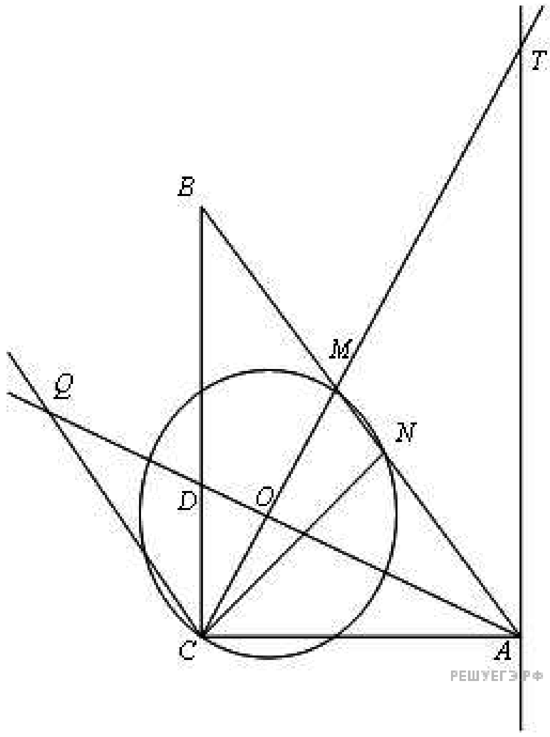
Ответ: $(6\frac{2}{5}, 7)$.

19. C 4 № 485990. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 15, AC = 9$ и $BC = 12$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD— точка O, причем $CD = 4$ и $AO = 3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

Решение.

Проведем через вершину A прямую, параллельную BC. Пусть T — точка ее пересечения с прямой CO, а M — точка пересечения AB и CT. Треугольник AOT подобен треугольнику DOC с коэффициентом $\frac{AO}{OD} = 3$, поэтому $AT = 3CD = 12$. Значит, треугольник AMT равен треугольнику BMC по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда M — середина стороны AB. Следовательно, CM — медиана треугольника ABC. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из прямого угла равна половине гипотенузы, значит $CM = \frac{1}{2}AB = 7,5$.

Через вершину C проведем прямую, параллельную AB. Пусть Q— точка ее пересечения с прямой AO. Треугольник CDQ подобен треугольнику BDA с коэффициентом $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}$, поэтому $CQ = \frac{1}{2}AB = 7,5 = AM$. Тогда треугольники AMO и QCO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Поэтому O — середина CM.



Окружность с центром O проходит через точку C, и при этом $OM = OC$. Следовательно, OM — радиус этой окружности. Треугольник ABC прямоугольный, $CM = \frac{1}{2}AB = 7,5$, а точка M — одна из точек пересечения прямой AB и окружности.

Пусть N — вторая точка пересечения окружности с прямой AB. Тогда угол CNM — вписанный и опирающийся на диаметр CM, так что $CN \perp AB$, то есть CN — высота треугольника ABC.

Отсюда $CN = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{9 \cdot 12}{15} = \frac{36}{5} = 7,2.$

Ответ: 7,5 или 7,2.

20. C 5 № 502078. Найдите все значения a, при которых уравнение $|\cos^2 x + 2 - 2a| = \cos^2 x + +2a$ имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ единственный корень.

Решение.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $\cos^2 x + 2\sin x - 2a \geq 0$. Исходное уравнение примет вид

$$\cos^2 x + 2\sin x - 2a = \cos^2 x + \sin 2x + 2a \Leftrightarrow \sin x = 4a.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ единственный корень при $-1 \leq 4a < 0$, откуда $-\frac{1}{4} \leq a < 0$. Подставив $\sin x = 4a$ в неравенство $\cos^2 x + 2\sin x - 2a \geq 0$, получим: $1 - 16a^2 + 8a - 2a \geq 0$, откуда $-\frac{1}{8} \leq a \leq \frac{1}{2}$.

В этом случае уравнение $\sin x = 4a$ при условии $\cos^2 x + 2\sin x - 2a \geq 0$ имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ единственный корень $x = \arcsin(4a)$ при $-\frac{1}{8} \leq a < 0$. и не имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ корней при $a < -\frac{1}{8}$ и при $a \geq 0$.

Второй случай: $\cos^2 x + 2\sin x - 2a < 0$. Исходное уравнение примет вид

$$\cos^2 x + 2\sin x - 2a = -\cos^2 x - \sin x - 2a \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ единственный корень $x = -\frac{\pi}{6}$. Подставив $x = -\frac{\pi}{6}$ в неравенство $\cos^2 x + 2\sin x - 2a < 0$, получим: $\frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2a < 0$, откуда $a > -\frac{1}{8}$.

В этом случае уравнение $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ при условии $\cos^2 x + 2\sin x - 2a < 0$ имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ единственный корень $x = -\frac{\pi}{6}$ при $a > -\frac{1}{8}$ и не имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ корней при $a \leq -\frac{1}{8}$.

Уравнение $|\cos^2 x + 2 - 2a| = \cos^2 x + +2a$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$:

- при $a < -\frac{1}{8}$ не имеет корней;
- при $a = -\frac{1}{8}$ имеет единственный корень $x = -\frac{\pi}{6}$;
- при $-\frac{1}{8} < a < 0$ имеет два различных корня $x = -\frac{\pi}{6}$ и $x = \arcsin(4a)$;
- при $a \geq 0$ имеет единственный корень $x = -\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $a = -\frac{1}{8}$; [0; +∞)

21. C 6 № 484655. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения чисел a и b на 32.

Решение.

$\overline{ab} = ab + 32 \Leftrightarrow a \cdot 10^k + b = ab + 32$,
где $k \in \mathbb{N}$ — число цифр в числе b.

Тогда $(10^k - b)a = 32 - b \Rightarrow k = 1$, иначе

$$(10^k - b)a > 32 - b \Rightarrow b = 1, 2, ..., 9.$$

Непосредственно проверяем: $b_1 = 8;\ \ b_2 = 9$. Соответственно, $a_1 = 12,\ \ a_2 = 23$.

Ответ: 12 и 8; 23 и 9.