Вариант № 2887256

1. B 1 № 24805.
Сырок стоит 8 рублей 20 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 50 рублей?

Решение.
Разделим 50 на 8,2:

$$\frac{50}{8,2} = \frac{500}{82} = 6\frac{8}{82}.$$

Значит, на 50 рублей можно купить 6 сырков.

Ответ: 6.

2. B 2 № 26633. Клиент взял в банке кредит 12000 рублей на год под 16%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

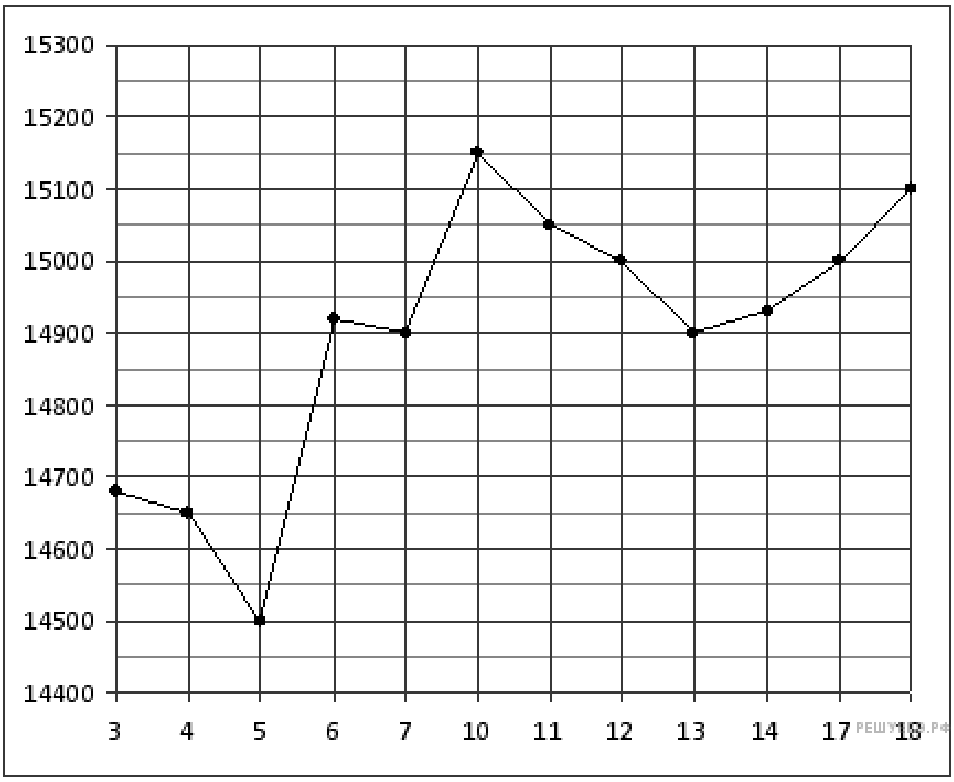
Решение.
Через год клиент должен будет выплатить 12 000 + 0,16 · 12 000 = 13 920 рублей. Разделим 13 920 руб. на 12 мес.:

$$\frac{13920}{12} = 1160 \text{ руб./мес.}$$

Значит, клиент должен вносить ежемесячно в банк 1160 рублей.

Ответ: 1160.

3. B 3 № 26875. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 18 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наибольшей за данный период.



Решение.

Из графика видно, что наибольшей цена была 10 сентября (см. рисунок).

Ответ: 10.

4. B 4 № 26685. В таблице даны тарифы на услуги трех фирм такси. Предполагается поездка длительностью 70 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	**Подача машины**	**Продолжительность и стоимость минимальной поездки ***	**Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки**
А	350	Нет	13
Б	Бесплатно	20 мин. — 300 руб.	19
В	180	10 мин — 150 руб.	15

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

Решение.

Рассмотрим различные варианты.

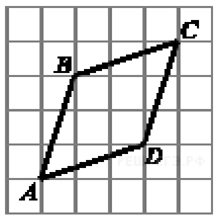
Стоимость поездки на такси фирмы *А* будет складываться из стоимости 70 минут поездки, то есть $70 \cdot 13 = 910$ руб., а также стоимости подачи такси и будет составлять $350 + 910 = 1\,260$ руб.

Стоимость поездки на такси фирмы *Б* будет складываться из стоимости минимальной поездки, а также стоимости 50 минут поездки сверх минимальной, то есть $300 + 50 \cdot 19 = 300 + 950 = 1\,250$ руб.

Стоимость поездки на такси фирмы *В* будет складываться из стоимости минимальной поездки, а также стоимости 60 минут поездки сверх минимальной и стоимости подачи машины, то есть $150 + 60 \cdot 15 + 180 = 330 + 900 = 1230$ руб.

Ответ: 1230.

5. B 5 № 27851. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{10}$.



Решение.

Стороны четырехугольника равны. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{10} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2} = 10.$$

Следовательно, периметр равен $4AB = 40$.

Ответ: 40.

6. B 6 № 320199. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.

Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение.

Для того, чтобы поступить хоть куда-нибудь, З. нужно сдать и русский, и математику как минимум на 70 баллов, а помимо этого еще сдать иностранный язык или обществознание не менее, чем на 70 баллов. Пусть A, B, C и D — это события, в которых З. сдает соответственно математику, русский, иностранный и обществознание не менее, чем на 70 баллов. Тогда поскольку

$$P(C+D)=P(C)+P(D)-P(C\cdot D),$$

для вероятности поступления имеем:

$$P(AB(C+D))=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C+D)=P(A)\cdot P(B)\cdot(P(C)+P(D)-P(C)\cdot P(D))$$
$$=0,6\cdot 0,8\cdot(0,7+0,5-0,7\cdot 0,5)=0,408.$$

Ответ: 0,408.

Приведем другую запись этого решения.

В силу независимости событий, вероятность успешно сдать экзамены на лингвистику: 0,6·0,8·0,7 = 0,336, вероятность успешно сдать экзамены на коммерцию: 0,6·0,8·0,5 = 0,24, вероятность успешно сдать экзамены и на лингвистику, и на коммерцию: 0,6·0,8·0,7·0,5 = 0,168. Успешная сдача экзаменов на лингвистику и на коммерцию — события совместные, поэтому вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения. Тем самым, поступить на одну из этих специальностей абитуриент может с вероятностью 0,336 + 0,24 − 0,168 = 0,408.

7. B 7 № 11649. Найдите корень уравнения: $\sqrt{59-x}=8$.

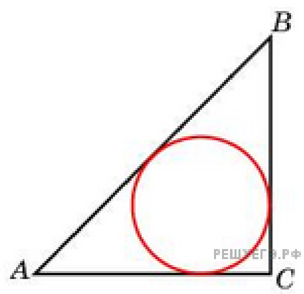
Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{59-x}=8\Leftrightarrow 59-x=64\Leftrightarrow x=-5.$$

Ответ: −5.

8. B 8 № 27931. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен 2. Найдите гипотенузу c этого треугольника. В ответе укажите $c(\sqrt{2}-1)$.



Решение.

Пусть длина катетов равна x, тогда длина гипотенузы равна $x\sqrt{2}$, а радиус вписанной окружности, вычисляемый по формуле $r = 0,5(a+b-c)$, равен

$$r = \frac{x+x-x\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}x.$$

По условию $r = 2$, откуда

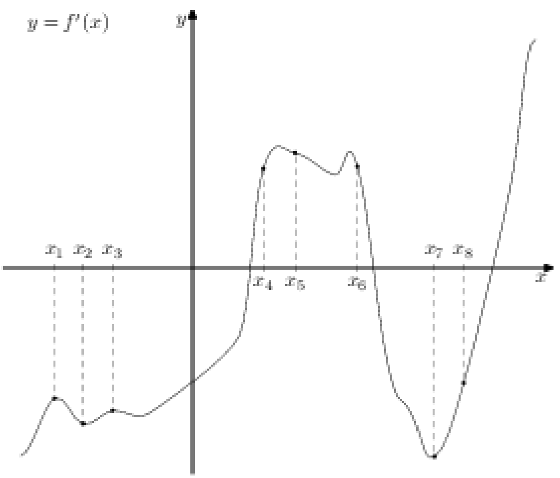
$$\frac{2-\sqrt{2}}{2}x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2-\sqrt{2}}.$$

Требовалось найти $c(\sqrt{2}-1)$, имеем:

$$c(\sqrt{2}-1) = x\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = x(2-\sqrt{2}) = \frac{4}{2-\sqrt{2}} \cdot (2-\sqrt{2}) = 4.$$

Ответ: 4.

9. B 9 № 317541. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?

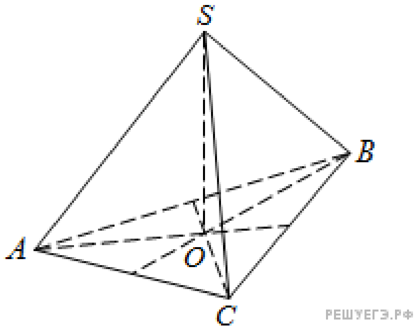


Решение.

Возрастанию дифференцируемой функции $f(x)$ соответствуют положительные значения её производной. Производная положительна в точках x_4, x_5, x_6. Таких точек 3.

Ответ: 3.

10. B 10 № 903. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 5. Найдите длину отрезка OS.



Решение.
отрезок OS высотой треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO.$$

Таким образом,

$$SO = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7,5.$$

Ответ: 7,5.

11. B 11 № 26847. Найдите значение выражения $\log_4 8$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \log_2 2 = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

12. B 12 № 28013. Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = 0,5 \cos \pi t$, где t – время в секундах. Кинетическая энергия груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса груза (в кг), v – скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее $5 \cdot 10^{-3}$ Дж. Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $E \geq 5 \cdot 10^{-3}$ Дж при заданных значении массы груза $m = 0,08$ кг и законе изменения скорости:

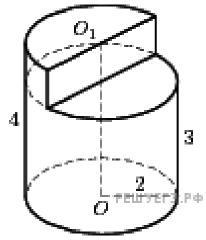
$$\frac{mv^2}{2} \geq 5 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{0,08 \cdot 0,25 \cos^2 \pi t}{2} \geq 5 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow \cos^2 \pi t \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos \pi t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \cos \pi t \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \underset{0<\pi t<\pi}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 0 \leq \pi t \leq \frac{\pi}{4}; \\ \frac{3\pi}{4} \leq \pi t \leq \pi \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq t \leq \frac{1}{4}; \\ \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{array} \right.$$

Таким образом, 0,5 с из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее $5 \cdot 10^{-3}$ Дж. Это составляет 0,5 первой секунды.

Ответ: 0,5.

13. B 13 № 27200. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π.



Решение.

Объем данной фигуры равен сумме объемов цилиндра с радиусом основания 2 и высотой 3 и половины цилиндра с тем же радиусом основания и высотой 1:

$$V = \pi R^2 (H_1 + \frac{1}{2} H_2) = \pi 2^2 (3 + 0,5) = 14.$$

Ответ: 14.

14. B 14 № 502311. Клиент *А.* сделал вклад в банке в размере 6200 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал *Б.* Ещё ровно через год клиенты *А.* и *Б.* закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент *А.* получил на 682 рубля больше клиента *Б.* Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Решение.

Если в банк под p процентов годовых положена сумма S_0, то через n лет она станет равной $S_n = S_0(1 + 0,01p)^n$. Поэтому клиент *А.* за два года получил $S_2 = 6200(1 + 0,01p)^2$ руб., а клиент *B.* за год получил $S_1 = 6200(1 + 0,01p)$. По условию, $S_2 - S_1 = 682$, откуда имеем:

$$6200(1+0,01p)^2 - 6200(1+0,01p) = 682 \Leftrightarrow 6200(1+0,01p)(1+0,01p-1) = 682 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 62p(1+0,01p) = 682 \Leftrightarrow p(1+0,01p) = 11 \Leftrightarrow p^2 + 100p - 1100 = 0 = \left[\begin{array}{l} p = 10, \\ p = -100. \end{array} \right.$$

Тем самым, банк начислял 10 процентов годовых.

Ответ: 10.

15. B 15 № 26718. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

Решение.

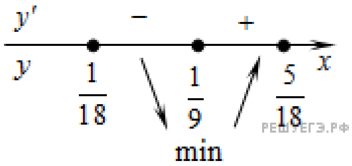
Функция определена и дифференцируема на заданном отрезке. Найдем ее производную:

$$y'(x) = 9 - \frac{1}{x}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 9 - \frac{1}{x} = 0, \\ \frac{1}{18} \le x \le \frac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9}, \\ \frac{1}{18} \le x \le \frac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке, и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = \frac{1}{9}$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} \cdot 9 - \ln 1 + 3 = 4.$$

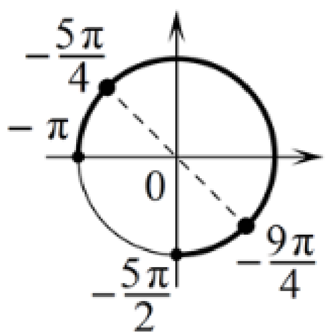
Ответ: 4.

16. С 1 № 501944. а) Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{-5\pi}{2}, -\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:



$$2^{\sin x} \cdot 5^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x} \Leftrightarrow 5^{\sin x} = 5^{-\cos x} \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} = -1,$$

откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

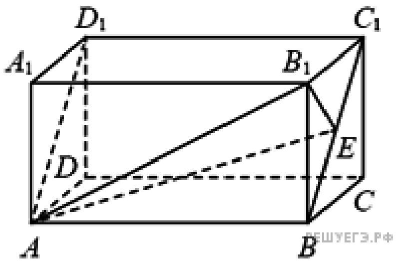
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{-5\pi}{2}, -\pi\right]$. Получим числа: $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, б) $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}$.

17. С 2 № 500024. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны $AB = 2, AD = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Решение.

Плоскости ABC_1 и BCC_1 перпендикулярны. Перпендикуляр из точки B_1 к плоскости ABC_1 лежит в плоскости BCC_1 и пересекает прямую BC_1 в точке E. Значит, искомый угол равен углу B_1AE. В прямоугольном треугольнике B_1AE катет $B_1E = \frac{\sqrt{2}}{2}$, гипотенуза $AB_1 = \sqrt{5}$. Поэтому



$$\sin\angle B_1AE = \frac{B_1E}{AB_1} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Тогда $\angle B_1AE = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Примечание.

Возможны другие формы ответа: $\angle B_1AE = \arccos\frac{3}{\sqrt{10}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arcctg} 3$.

18. C 3 № 502024. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^{2x-1} - 7\cdot 2^{x-1} + 5 \le 0, \\ \dfrac{x^2-2x-2}{x^2-2x} + \dfrac{7x-19}{x-3} \le \dfrac{8x+1}{x}. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$2^{2x-1} - 7\cdot 2^{x-1} + 5 \le 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 7\cdot 2^x + 10 \le 10.$$

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2 - 7t + 10 \le 0$, откуда

$$t \le 2^x \le 5 \Leftrightarrow 2 \le 2^x \le 5 \Leftrightarrow 1 \le x \le \log_2 5.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $1 \le x \le \log_2 5$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^2-2x-2}{x^2-2x} + \frac{7x-19}{x-3} \le \frac{8x+1}{x} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2-2x} + 7 + \frac{2}{x-3} - 8 - \frac{1}{x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x^2-2x} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x} \le 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x(x-2)} + \frac{2}{x-3} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-3)(x-2)} \le 0, \text{ где } x \ne 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x < 0;\ 0 < x \le 1;\ 2 < x < 3$.

3. Поскольку $2 < \log_2 5 < 3$, получаем решение исходной системы неравенств: $x = 1;\ 2 < x \le \log_2 5$.

Ответ: $1;\ (2;\ \log_2 5]$.

19. C 4 № 500003. Дан треугольник ABC. Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE, площадь которого равна 14, — равнобедренный с основанием AE и высотой BD. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$.

Решение.

Введем следующие обозначения: $AB = BE = c$, $BC = a$, $BD = h$.

1 случай (точка E лежит между точками A и C, см. рис. 1).

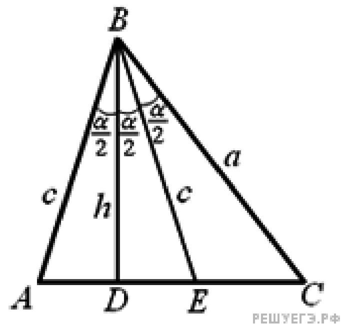


Рис.1

1. Треугольник ABE — равнобедренный, поэтому $\angle ABD = \angle DBE = \frac{\alpha}{2}$, а значит, $\angle CBE = \frac{\alpha}{2}$.

2. Углы ABE и CBD треугольников ABE и CBD равны. Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta DBE}}{S_{\Delta CBE}} = \frac{hc}{ac} = \frac{h}{a} = \cos\alpha,$$

откуда

$$S_{\Delta CBE} = \frac{S_{\Delta DBE}}{\cos\alpha}.$$

3. Поскольку

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{7}{25},$$

получаем:

$$S_{\Delta CBE} = \frac{25}{7} S_{\Delta DBE} = \frac{25}{7}\cdot 7 = 25.$$

4. Окончательно находим:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABE} + S_{\Delta CBE} = 14 + 25 = 39.$$

2 случай (точка A лежит между точками E и C (см. рис. 2).

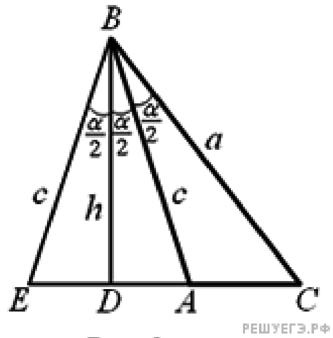


Рис. 2

Аналогично случаю 1 находим

$$S_{\Delta ABC} = \frac{25}{7} S_{\Delta DBE} = \frac{25}{7}\cdot 7 = 25.$$

Ответ: 25 или 39.

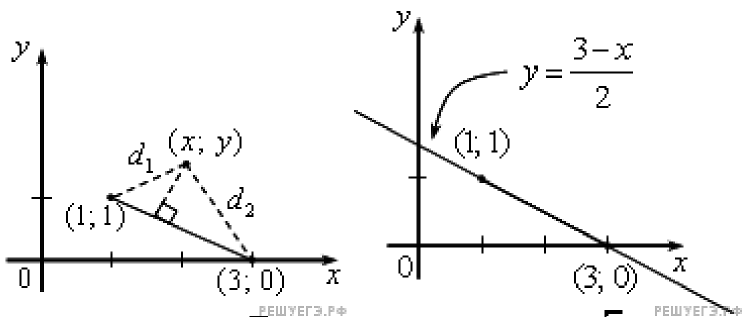
20. C 5 № 484640. При каждом a решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32a\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+a^2+2-2x-2a} + \sqrt{x^2+a^2-6x+9} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Решение.

Запишем второе уравнение в виде

$$\sqrt{(x-1)^2+(a-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+a^2}=\sqrt{5}.$$

Геометрический смысл уравнения состоит в том, что сумма расстояний от точек $(x;\ a)$ до точек $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$ равно $\sqrt{5}$. Поскольку расстояние между точками $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$ тоже равно $\sqrt{5}$, это означает, что точка $(x;\ a)$ должна лежать на отрезке, соединяющем точки $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$. Другими словами, она удовлетворяет уравнению $a=\dfrac{3-x}{2}$ и условию $x\in[1;\ 3]$.



$d_1+d_2>\sqrt{5}$ $\qquad$ $d_1+d_2=\sqrt{5}$

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases}2^{1+x}=32a\sqrt{2},\\ 2a=3-x,\ x\in[1;\ 3].\end{cases}$$

Подставив $2a$ в первое уравнение, получаем

$$2^{1+x}=16(3-x)\sqrt{2}\Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}}=3-x\Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}}+x=3.$$

Поскольку функция $y=2^{x-\frac{7}{2}}+x$ возрастающая (как сумма двух возрастающих), каждое значение она принимает ровно один раз. Поэтому решение $x=\dfrac{5}{2}$ — единственное, ему соответствует $a=\dfrac{1}{4}$.

Ответ: если $a=\dfrac{1}{4}$, то $x=\dfrac{5}{2}$, при остальных a нет решений.

21. C 6 № 500478. Натуральные числа от 1 до 20 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

Решение.

Обозначим суммы чисел в группах S_1, S_2, S_3, S_4 а указанную в условии сумму модулей их попарных разностей через A. Можно считать, что $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq S_4$.

а) Чтобы число A равнялось 0, необходимо, чтобы каждая из разностей $S_i - S_j$ равнялась 0, то есть $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Сумма всех двадцати чисел $1+2+\ldots+19+20 = \dfrac{20\cdot 21}{2} = 210$. С другой стороны, она равна $S_1+S_2+S_3+S_4 = 4S_1$, но 210 не делится на 4. Значит, $A \neq 0$.

б) Чтобы число A равнялось 1, необходимо, чтобы все, кроме одной, разности $S_i - S_j$ равнялись 0. Значит, $S_1 < S_4$, но в этом случае каждая из сумм S_2, S_3 не равна хотя бы одной из сумм S_1, S_4 поэтому хотя бы три разности $S_i - S_j$ не равны 0 и число A не меньше 3. Значит, $A \neq 1$.

в) Выразим число A явно через S_1, S_2, S_3, S_4:

$$A = (S_2-S_1)+(S_3-S_1)+(S_4-S_1)+(S_3-S_2)+(S_4-S_2)+(S_4-S_3) = 3(S_4-S_3)+4(S_3-S_2)+3(S_2-S_1).$$

В предыдущих пунктах было показано, что $A \geq 3$. Если $A = 3$, то $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 - 1$ или $S_4 = S_2 = S_3 = S_1 + 1$. В этом случае сумма всех двадцати чисел равна $4S_1 + 1$ или $4S_4 - 1$, то есть нечётна, что неверно.

Для следующего разбиения чисел на группы: $20; 19; 13$; $18; 17; 9; 8$; $16; 15; 14; 5; 3$; $12; 11; 10; 7; 6; 4; 2; 1$ — число A равно 4.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.