# Вариант № 2887001

**1. B 1 № 77338.** В общежитии института в каждой комнате можно поселить четырех человек. Какое наименьшее количество комнат необходимо для поселения 83 иногородних студентов?

**Решение.**

Разделим 83 на 4:

$$\frac{83}{4}=20\frac{3}{4}.$$

Значит, для поселения 83 иногородних студентов необходима 21 комната.

Ответ: 21.

**2. B 2 № 77352.** При оплате услуг через платежный терминал взимается комиссия 5%. Терминал принимает суммы кратные 10 рублям. Аня хочет положить на счет своего мобильного телефона не меньше 300 рублей. Какую минимальную сумму она должна положить в приемное устройство данного терминала?

**Решение.**

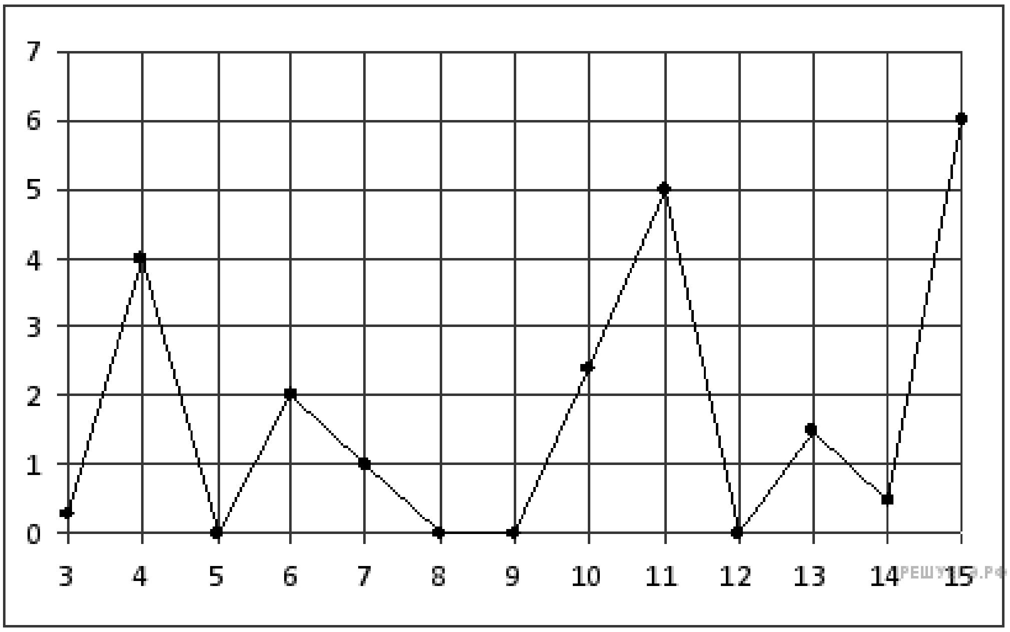
С учетом комиссии, Аня должна внести в приемное устройство сумму не менее $300 + 300 \cdot 0{,}05 = 315$ рублей. Значит, минимальная сумма, которую должна положить Аня в приемное устройство данного терминала — 320 рублей. Проверим, что этой суммы достаточно: 5% от нее составляют 16 руб. (это комиссия), оставшиеся 304 рубля пойдут на счет телефона.

*Приведем другое решение.*

После уплаты 5% комиссии на счет телефона остаётся 95% вносимой суммы, которая должна быть не меньше 300 рублей. Если нужно внести $x$ рублей, то $0{,}95x \geq 300$, откуда $x \geq 315{,}7\ldots$ Поэтому $x = 320$ руб.

Ответ: 320.

**3. B 3 № 27523.** На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода не выпадало осадков.




**Решение.**

Из графика видно, что 4 дня из данного периода (5, 8, 9, 12 февраля) не выпадало осадков (см. рисунок).

Ответ: 4.

**4. B 4 № 282833.**

От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

| | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| Автобусом | От дома до автобусной станции — 5 мин. | Автобус в пути:<br>2 ч 5 мин. | От остановки автобуса до дачи пешком 10 мин. |
| Электричкой | От дома до станции железной<br>дороги — 30 мин. | Электричка в пути:<br>1 ч 40 мин. | От станции до дачи пешком 5 мин. |
| Маршрутным такси | От дома до остановки маршрутного<br>такси — 20 мин. | Маршрутное такси в дороге:<br>1 ч 30 мин. | От остановки маршрутного такси<br>до дачи пешком 35 мин. |

**Решение.**

При поездке на автобусе потребуется времени 5 мин. + 2 ч. 5 мин. + 10 мин. = 2 ч. 20 мин.

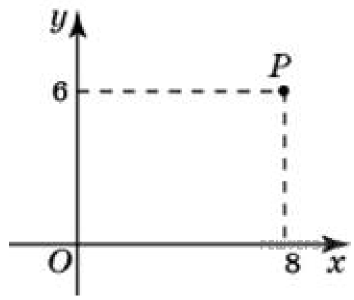
При поездке электричкой потребуется времени 30 мин. + 1 ч. 40 мин. + 5 мин. = 2 ч. 15 мин.

При поездке маршрутным такси потребуется времени 20 мин. + 1 ч. 30 мин. + 35 мин. = 2 ч. 25 мин.

Тем самым, наименьшее время составляет 2 часа 15 минут, то есть два с четвертью часа — 2,25 часа.

Ответ: 2,25.

**5. B 5 № 27694.** Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P$ (8; 6), чтобы она касалась оси ординат?




**Решение.**

Для того чтобы окружность касалась оси ординат, необходимо, чтобы расстояние от ее центра — точки $P$ до оси ординат было равно радиусу этой окружности. Расстояние точки $P$ до оси ординат равно абсциссе точки $P$, т. е. равно 8. Следовательно, радиус окружности должен быть равен 8.

Ответ: 8.

**6. B 6 № 282853.** В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

**Решение.**

Количество исходов, при которых в результате броска игральных костей выпадет 8 очков, равно 5: 2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2. Каждый из кубиков может выпасть шестью вариантами, поэтому общее число исходов равно 6·6 = 36. Следовательно, вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков, равна

$$\frac{5}{36}=0,138...$$

Ответ: 0,14.

**7. B 7 № 77366.** Решите уравнение $\frac{9}{x^2-16}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

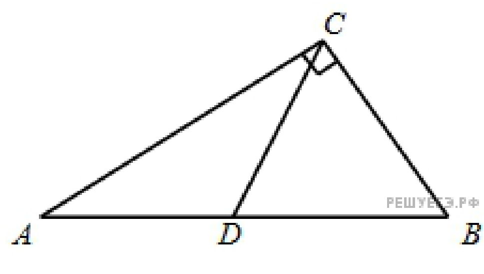
**Решение.**

Последовательно получаем:

$$\frac{9}{x^2-16}=1 \Leftrightarrow x^2-16=9 \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5; \\ x=-5. \end{array}\right.$$

Ответ: 5.

**8. B 8 № 27761.** В треугольнике $ABC$ $CD$ – медиана, угол $C$ равен 90°, угол $B$ равен $58^\circ$. Найдите угол $ACD$. Ответ дайте в градусах.




**Решение.**

$CD$ – медиана в прямоугольном треугольнике, значит, $CD=AD=BD$. Тогда треугольник $ACD$ – равнобедренный, углы при его основании равны.

$$\angle ACD=\angle A=90^\circ-58^\circ=32^\circ.$$

Ответ: 32.

**9. B 9 № 123715.**

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{6}t^2 + 5t - 19$ (где $x$ — расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 4 м/с?

**Решение.**

Найдем закон изменения скорости:

$$v(t) = x'(t) = -\frac{1}{3}t + 5.$$

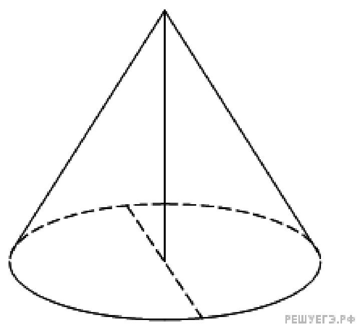
Чтобы найти, в какой момент времени $t$ скорость была равна 4 м/с, решим уравнение:

$$-\frac{t}{3} + 5 = 4 \Leftrightarrow t = 3\text{ с}.$$

Следовательно, скорость точки была равна 4 м/с на третьей секунде движения.

Ответ: 3.

**10. B 10 № 908.** Высота конуса равна 15, а диаметр основания – 16. Найдите образующую конуса.



**Решение.**

образующая конуса по теореме Пифагора равна

$$l = \sqrt{h^2 + R^2_{\text{осн}}} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{D_{\text{осн}}}{2}\right)^2} = \sqrt{225 + 64} = 17.$$

Ответ: 17.

**11. B 11 № 26805.** Найдите $\frac{a}{b}$, если $\frac{2a+5b}{5a+2b} = 1$.

**Решение.**

Выполним преобразования:

$$\frac{2a+5b}{5a+2b} = 1 \Rightarrow 2a + 5b = 5a + 2b \Rightarrow 3a = 3b \Rightarrow \frac{a}{b} = 1.$$

Ответ: 1.

**12. B 12 № 27974.** Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы, определяемой по формуле $A(\omega) = \frac{A_0\omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где $\omega$ – частота вынуждающей силы (в $c^{-1}$), $A_0$ – постоянный параметр, $\omega_p = 360c^{-1}$ – резонансная частота. Найдите максимальную частоту $\omega$, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину $A_0$ не более чем на $12,5\%$. Ответ выразите в $c^{-1}$.

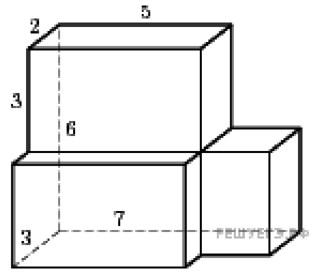
**Решение.**

Задача сводится к решению неравенства $A \le 1,125A_0$ при известном значении резонансной частоты $\omega_{\text{р}} = 360\ \text{с}^{-1}$ и условии, что частота $\omega$ меньше резонансной:

$$A \le 1,125A_0 \Leftrightarrow \frac{A_0 \cdot 360^2}{360^2 - \omega^2} \le 1,125A_0 \Leftrightarrow 360^2 \le 1,125 \cdot 360^2 - 1,125\omega^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,125\omega^2 \le 0,125 \cdot 360^2 \Leftrightarrow \omega \le 120\text{с}^{-1}.$$

Ответ: 120.

**13. B 13 № 27212.** Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).




**Решение.**

Объем многогранника равен сумме объемов параллелепипедов со сторонами (5, 3, 2), (3, 3, 5) и (2, 3, 2):

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 5 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 30 + 45 + 12 = 87.$$

Ответ: 87.

**14. B 14 № 26595.** На изготовление 99 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

**Решение.**

Обозначим $n$ — число деталей, которые изготавливает за час второй рабочий. Тогда первый рабочий за час изготавливает $n+1$ деталь. На изготовление 99 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей, отсюда имеем:

$$\frac{99}{n+1} + 2 = \frac{110}{n} \Leftrightarrow \frac{101+2n}{n+1} = \frac{110}{n} \Leftrightarrow 110(n+1) = n(101+2n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2n^2 - 9n - 110 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = \dfrac{9+\sqrt{81+4\cdot 2\cdot 110}}{4} = 10; \\ n = \dfrac{9-\sqrt{81+4\cdot 2\cdot 110}}{4} = -5,5 \end{array}\right. \underset{n>0}{\Leftrightarrow} n = 10.$$

Таким образом, второй рабочий делает 10 деталей в час.

Ответ: 10.

**15. B 15 № 26695.** Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 3\sin x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

**Решение.**

Найдем производную заданной функции: $y' = 15 - 3\cos x$. Уравнение $y' = 0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей.

Следовательно, наибольшим значением функции на заданном отрезке является

$$y(0) = 15 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 5 = 5.$$

Ответ: 5.

**16. C 1 № 500967.**

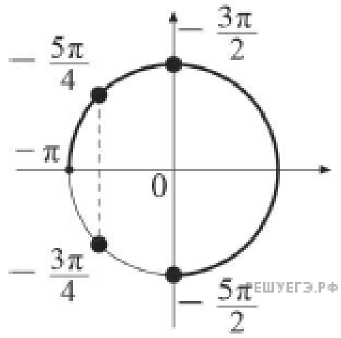
а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2},-\pi\right]$.

**Решение.**

а) Заметим, что $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\cos^2 x.$ Поэтому уравнение можно переписать в виде $\sqrt{2}\cos^2 x+\cos x=0,$ откуда $\cos x\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0.$ Значит, либо $\cos x=0,$ откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ либо $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2},$ откуда $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

б) Отберем с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2},-\pi\right]$: $x=-\frac{5\pi}{2},\ x=-\frac{3\pi}{2},\ x=-\frac{5\pi}{4}.$



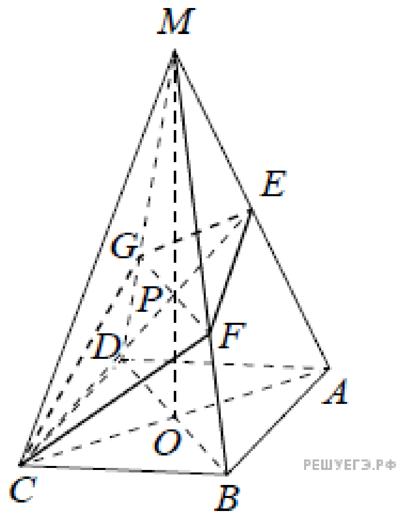

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{4}.$

**17. C 2 № 501985.** В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной $M$ стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку $C$ и середину ребра $MA$ параллельно прямой $BD$.

**Решение.**

Пусть точка $E$— середина ребра $MA$. Отрезок $CE$ пересекает плоскость $MBD$ в точке $P$. В треугольнике $MAC$ точка $P$ является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP : PO = 2 : 1$, где $O$ — центр основания пирамиды. Отрезок $FG$ параллелен $BD$ и проходит через точку $P$ (точка $F$ принадлежит ребру $MB$, $G$ —ребру $MD$), откуда

$$MF : FB = MG : GD = MP : PO = 2 : 1,$$
$$FG = \frac{2}{3}BD = \frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3} = 4\sqrt{2}.$$




Четырёхугольник $CFEG$ — искомое сечение. Отрезок $CE$ — медиана треугольника $MAC$, значит,

$$CE = \frac{\sqrt{2AC^2 + 2MC^2 - MA^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MC^2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

Поскольку прямая $AC$ перпендикулярна плоскости $MBD$, диагонали $CE$ и $FG$ четырёхугольника $CFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{CFEG} = \frac{CF \cdot FG}{2} = 24.$$

Ответ: 24.

**18. C 3 № 502055.** Решите систему неравенств $\begin{cases} 5\cdot 2^{2x+2} - 21\cdot 2^{x-1} + 1 \le 0, \\ \dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x} + \dfrac{3x+1}{x-1} \le \dfrac{4x+1}{x}. \end{cases}$

**Решение.**

1) Решим первое неравенство системы:

$$5\cdot 2^{2x+2}-21\cdot 2^{x-1}+1\le 0 \Leftrightarrow 40\cdot 2^{2x}-21\cdot 2^{x}+2\le 0.$$

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид: $40t^2-21t+2\le 0$, откуда

$$\frac{1}{8}\le t\le\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{1}{8}\le 2^x\le\frac{2}{5}\Leftrightarrow -3\le x-\log_2\frac{5}{2}.$$

Решение первого неравенства исходной системы:

$$-3\le x-\log_2\frac{5}{2}.$$

2) Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x}+\frac{3x+1}{x-1}\le\frac{4x+1}{x}\Leftrightarrow 1+\frac{2}{x^2+2x}+3+\frac{4}{x-1}-4-\frac{1}{x}\le 0\Leftrightarrow\frac{2}{x^2+2x}+\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x}\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{x}{x(x+2)}=\frac{4}{x-1}\le 0\Leftrightarrow\frac{x+3}{(x-1)(x+2)}\le 0,\text{ где } x\ne 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -3;\;\; -2<x<0;\;\; 0<x<1.$

3) Поскольку $-2<-\log_2\frac{5}{2}<0$, получаем решение исходной системы неравенств: $x=-3$; $-2<x\le -\log_2\frac{5}{2}<0.$

Ответ: $x=-3;\; -2<x\le -\log_2\frac{5}{2}<0.$

**19. C 4 № 484625.** Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 12, а косинус острого угла равен $\frac{3}{5}$.

**Решение.**

Обозначим данный треугольник $ABC$, $\cos\angle ABC = \frac{3}{5}$, $AB = 5x$, — гипотенуза, $BC = 3x$, $AC = 4x$. Заметим, что окружность, о которой говорится в условии, — окружность, вписанная в треугольник $ABC$. Пусть $O$ — её центр, а $D$ и $E$ — точки касания с катетами $AC$ и $BC$ соответственно. Тогда, так как $ODCE$ — квадрат, радиус этой окружности

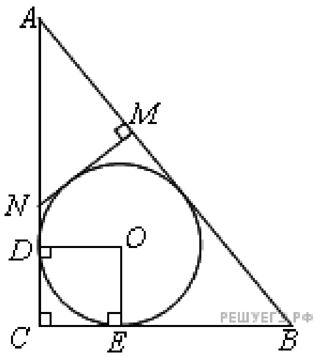
$$OD = EC = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{4x + 3x - 5x}{2} = x.$$

Пусть прямая $MN$ перпендикулярна $AB$, касается окружности, пересекает $AB$ в точке $M$, а $AC$ в точке $N$ (рис. 1). Прямоугольный треугольник $ANM$ подобен треугольнику $ABC$. В нём $MN = 12$, $AM = 16$, $AN = 20$.

У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны:

$$BC + MN = BM + CN, 3x + 12 = (5x - 16) + (4x - 20),$$

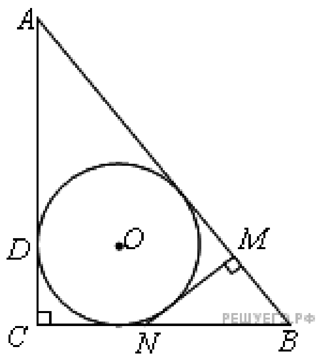
откуда находим: $x = 8$.




Пусть прямая $MN$ перпендикулярна $AB$, касается окружности, пересекает $AB$ в точке $M$, а $BC$ в точке $N$ (рис. 2). Прямоугольный треугольник $NBM$ подобен треугольнику $ABC$. В нём $MN = 12$, $BM = 9$, $BN = 15$. У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны:

$$AC + MN = AM + CN, 4x + 12 = (5x - 9) + (3x - 15),$$

откуда находим: $x = 9$.



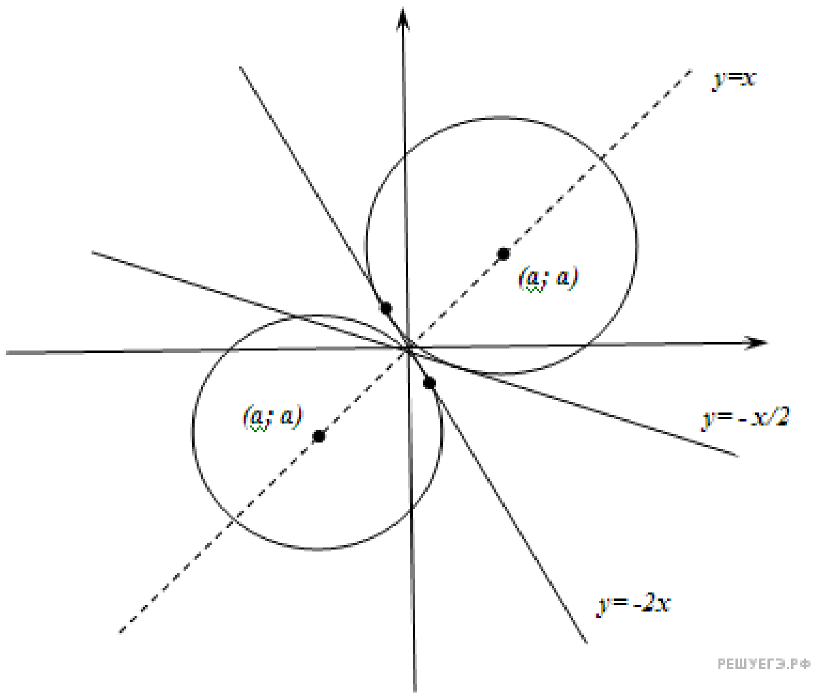

Ответ: 8 или 9.

**20. C 5 № 500010.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (y+2x)(2y+x) \le 0, & (1) \\ \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} = \dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}} & (2) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

**Решение.**




Неравенство (1) задает пару вертикальных углов на координатной плоскости $Oxy$ (см. рисунок). Графиком уравнения (2) является окружность радиуса $R = \dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}}$, центр которой — точка $P(a, a)$ — лежит на прямой $y = x$. Поскольку оба графика симметричны относительно прямой $y = x$, система будет иметь ровно два решения тогда и только тогда, когда расстояние $PK$ от центра окружности до прямой $y = -2x$ будет равняться радиусу $R = \dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}}$ данной окружности.

Из треугольника $POK$ находим: $PK = PO\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$, где $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$ — угловой коэффициент прямой

$y = -\dfrac{1}{2}x$. Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, откуда

$$PK = PO\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) = |a|\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3|a|}{\sqrt{5}}.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{3|a|}{\sqrt{5}} = \frac{|a+1|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 3a = \pm(a+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Ответ: $a = \dfrac{1}{2}$ или $a = -\dfrac{1}{4}$.

**21. C 6 № 484658.** Ученик должен перемножить два трехзначных числа и разделить их произведение на пятизначное. Однако он не заметил знака умножения и принял два записанных рядом трехзначных числа за одно шестизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в 3 раза больше истинного. Найдите все три числа.

**Решение.**

Обозначим эти числа за $a,$ $b$ и $c$. Имеем

$$\frac{1000a+b}{c}=3\cdot\frac{ab}{c},$$

а значит $1000a+b=3ab.$

Так как правая часть полученного равенства делится на $a,$ значит , левая часть тоже делится на $a$ и $b=ka.$ Получаем

$$1000a+ka=3ka^2,$$

что равносильно

$$1000+k=3ka.$$

Обратим внимание, что $k$ не превосходит 9, так как $a$ и $b$ — трехзначные числа, а $1000+k$ делится на 3. Значит, возможны только варианты $k=2,$ $k=5,$ $k=8.$

Если $k=2,$ то $a=167,$ $b=334,$ а $c=27889$ или $c=55778$ (других пятизначных делителей у $ab$ нет).

Если $k=5,$ то $a=67,$ что противоречит условию.

Если $k=8,$ то $a=42,$ что противоречит условию.

Ответ: 167, 334 и 27889 или 167, 334 и 55778.