## Вариант № 2887164

**1. B 1 № 26634.** В летнем лагере на каждого участника полагается 40 г сахара в день. В лагере 166 человек. Сколько килограммовых упаковок сахара понадобится на весь лагерь на 5 дней?

**Решение.**

На 166 человек на 1 день полагается $166 \cdot 40 = 6640$ г сахара, на 5 дней — $6640 \cdot 5 = 33\,200$ г. Разделим 33 200 г на 1000 г в одной упаковке:

$$33\,200 : 1000 = 33{,}2.$$

Тем самым, на весь лагерь на 5 дней 33 упаковок не хватит, следовательно, понадобится 34 килограммовых упаковки сахара.

Ответ: 34.

**2. B 2 № 26644.** Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 9570 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?

**Решение.**

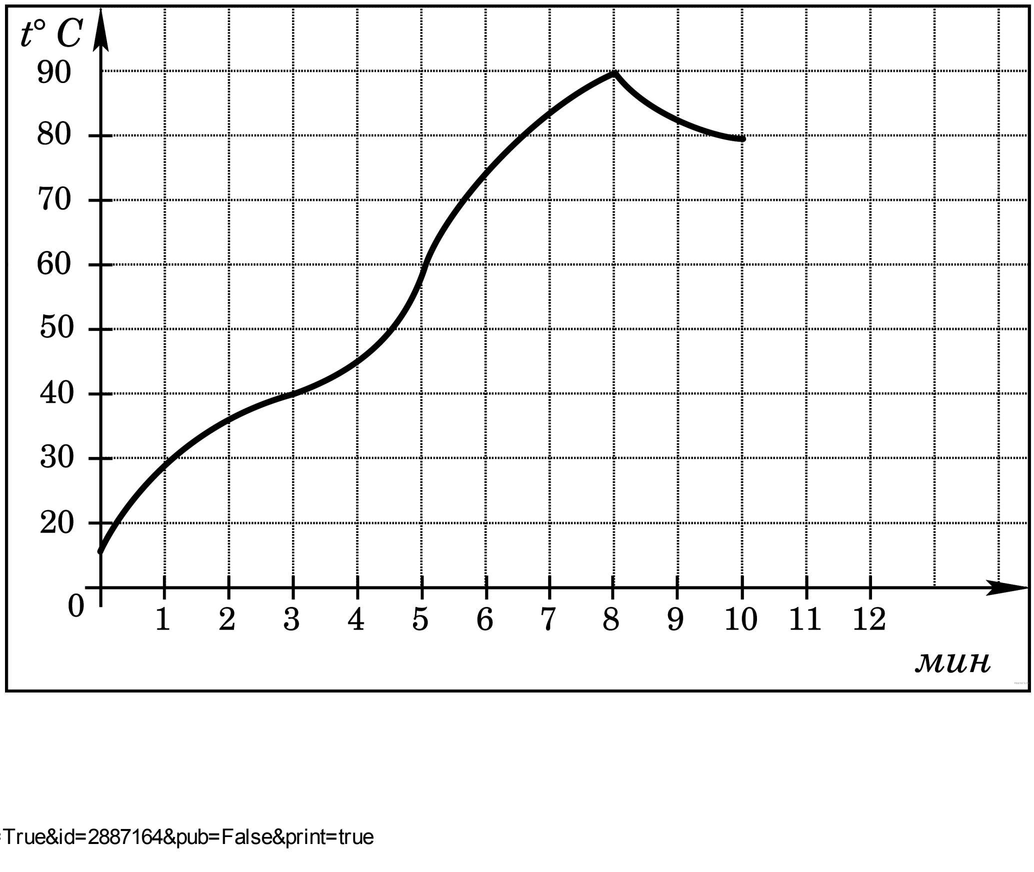
Пусть заработная плата Марии Константиновны составляет $x$ рублей. Тогда

$$x - 0,13x = 9570 \Leftrightarrow 0,87x = 9570 \Leftrightarrow x = 9570 : 0,87 \Leftrightarrow x = 11\,000.$$

Значит, зарплата Марии Константиновны составляет 11 000 рублей.

Ответ: 11 000.

**3. B 3 № 26866.** На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 60 °C до температуры 90 °C.



**Решение.**

Из графика видно, что двигатель нагревался от температуры 60 °C до температуры 90 °C с 5-й по 8-ю минуту, таким образом, он нагревался 3 минуты.

Ответ: 3.

**4. B 4 № 26686.** В таблице даны условия банковского вклада в трех различных банках. Предполагается, что клиент кладет на счет 10 000 рублей на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

| **Банк** | **Обслуживание счета *** | **Процентная ставка (% годовых) **** |
|---|---|---|
| Банк *А* | 40 руб. в год | 2 |
| Банк *Б* | 8 руб. в месяц | 3,5 |
| Банк *В* | Бесплатно | 1,5 |

** В начале года или месяца со счета снимается указанная сумма в уплату за ведение счета.*
*** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.*

**Решение.**

Рассмотрим все варианты.

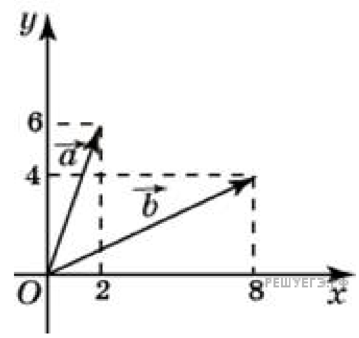
В банке *А* после снятия суммы в уплату за ведение счета на счету останется 10 000 − 40 = 9 960 руб. К концу года на счету окажется 9 960 + 0,02 · 9 960 = 10 159,2 руб.

В банке *Б* в качестве платы за ведение счета за год снимается со счета 12 · 8 = 96 руб. Таким образом, проценты начисляются на сумму 10 000 − 96 = 9 904 руб. К концу года на счету окажется 9 904 + 0,035 · 9 904 = 10 250,64 руб.

В банке *В* плата за ведение счета не взимается, таким образом, проценты будут начисляться на первоначальную сумму. К концу года на счету окажется 10 000 + 0,015 · 10 000 = 10 150 руб.

Ответ: 10 250,64.

**5. B 5 № 27734.** Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.




**Решение.**

Выпишем координаты векторов: $\vec{a}=(2;6), \vec{b}=(8;4)$. Скалярное произведение векторов равно

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b=2\cdot8+6\cdot4=40.$$

Ответ: 40.

**6. B 6 № 285928.** На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая.

**Решение.**

Вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая, равна

$$\frac{9}{25} = 0,36.$$

Ответ: 0,36.

**7. B 7 № 77379.** Решите уравнение $2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$.

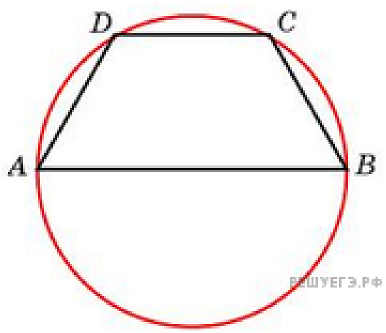
**Решение.**

Перейдем к одному основанию степени:

$$2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x} \Leftrightarrow \frac{2^{3+x}}{5^{3+x}} = 0,4 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{3+x} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1} \Leftrightarrow 3+x=1 \Leftrightarrow x=-2.$$

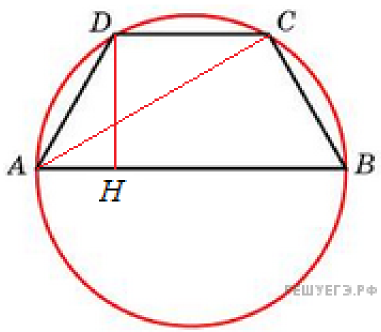
Ответ: −2.

**8. B 8 № 27925.** Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.




**Решение.**

Окружность, описанная вокруг трапеции, описана и вокруг треугольника $ADC$. Это треугольник равнобедренный, угол при вершине равен 120°, углы при основании равны 30°. Найдем его боковую сторону:




$$AD = AB - 2AH = AB - 2AD\cos 60^\circ = 12 - AD,$$

откуда $AD = 6$. Тогда по теореме синусов:

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle DCA} = \frac{6}{2\sin 30^\circ} = 6.$$

Ответ: 6.

*Приведем другое решение (Р. А., СПб.).*

Хорды $AD$, $DC$ и $CB$ равны, поэтому равны и стягиваемые ими дуги. Вписанный угол $A$ равен 60°, он опирается на две из этих дуг и равен половине их суммы. Поэтому каждая из дуг равна 60°, их сумма равна 180°, а хорда $AB$ является диаметром. Отсюда получаем, что искомый радиус равен 6.

**9. B 9 № 123715.**

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{6}t^2 + 5t - 19$ (где $x$ — расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 4 м/с?

**Решение.**

Найдем закон изменения скорости:

$$v(t) = x'(t) = -\frac{1}{3}t + 5.$$

Чтобы найти, в какой момент времени $t$ скорость была равна 4 м/с, решим уравнение:

$$-\frac{t}{3} + 5 = 4 \Leftrightarrow t = 3\,\text{с}.$$

Следовательно, скорость точки была равна 4 м/с на третьей секунде движения.

Ответ: 3.

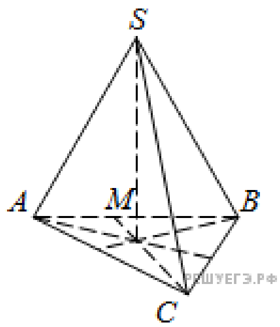
**10. B 10 № 284355.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке $M$. Площадь треугольника $ABC$ равна 3, $MS = 1$. Найдите объем пирамиды.

**Решение.**

Основание пирамиды — равносторонний треугольник, поэтому, $M$ является центром основания, а $MS$ — высотой пирамиды $SABC$. Тогда

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot MS = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.$$

Ответ: 1.




**11. B 11 № 62385.**

Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$.

**Решение.**

Выполним преобразования:

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6}{3}} = \sqrt{4} = 2.$$

Ответ: 2.

**12. B 12 № 27994.** Емкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 2\cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5\cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения $U$ (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}7$ – постоянная. Определите (в киловольтах), наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 21 с?

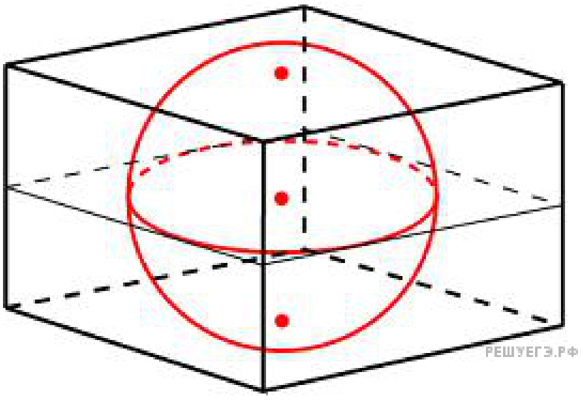
**Решение.**

Задача сводится к решению неравенства $t \geq 21$ при заданных значениях начального напряжения на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ, сопротивления резистора $R = 5\cdot 10^{6}$ Ом и ёмкости конденсатора $C = 2\cdot 10^{-6}$ Ф:

$$t \geq 21 \Leftrightarrow 0{,}7\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot 5\cdot 10^{6}\cdot \log_2\frac{16}{U} \geq 21 \Leftrightarrow \log_2\frac{16}{U} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{16}{U} \geq 8 \Leftrightarrow U \leq 2\,\text{кВ}.$$

Ответ: 2.

**13. B 13 № 27105.** Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.



**Решение.**

Прямоугольный параллелепипед, описанный вокруг сферы, является кубом. Тогда длина его ребра

$$a = V^{\frac{1}{3}} = 6.$$

Радиус сферы равен половине длины ребра $r = 3$.

Ответ: 3.

**14. B 14 № 99614.** Один мастер может выполнить заказ за 12 часов, а другой — за 6 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

**Решение.**

Первый мастер выполняет 1/12 работы в час, а второй — 1/6 работы в час. Следовательно, работая вместе, мастера выполняют $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$ работы в час. Поэтому всю работу мастера выполнят за 4 часа.

*Другое рассуждение.*

Время работы равно отношению объёма к скорости её выполнения. Поэтому два мастера, работая вместе, выполнят заказ за

$$\frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \text{ часа.}$$

Ответ: 4.

**15. B 15 № 77464.** Найдите наибольшее значение функции $y = 3x - 2x\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 4]$.

**Решение.**

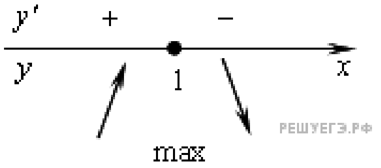
Заметим, что $y = -2x^{\frac{3}{2}} + 3x$ и найдем производную этой функции:

$$y' = -2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + 3 = -3\sqrt{x} + 3.$$

Найдем нули производной:

$$-3\sqrt{x} + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:




Наибольшим значением функции на отрезке [0; 4] является ее значение в точке максимума. Найдем его:

$$y(1) = -2 + 3 = 1.$$

Ответ: 1.

**16. C 1 № 502053.** а) Решите уравнение $1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1, \frac{8}{9}\right]$.

**Решение.**

а) Заметим, что уравнение определено при любом $x$. Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_2(9x^2 + 5) = \log_2(8x^4 + 14) - \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(9x^2 + 5) = \log_2(4x^4 + 7) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9x^2 + 5 = 4x^4 + 7 \Leftrightarrow 4x^4 - 9x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0.$$

Значит, либо $4x^4 - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$ или $x = -\frac{1}{2}$ либо $x^2 - 2 = 0$, откуда $x = \sqrt{2}$ или $x = -\sqrt{2}$.

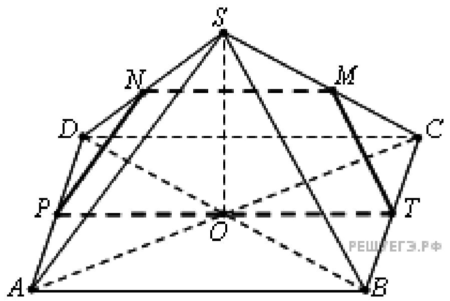
б) Поскольку $-\sqrt{2} < -1 < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{8}{9} < \sqrt{2}$, отрезку $\left[-1, \frac{8}{9}\right]$ принадлежат корни $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: а) $x = \pm\sqrt{2}, x = \pm\frac{1}{2}$; б) $\pm\frac{1}{2}$.

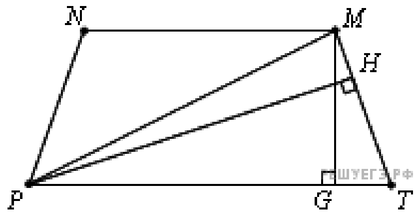
**17. C 2 № 484572.** Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной $S$. Ребро основания пирамиды равно $\sqrt{6}$, высота — $\sqrt{33}$. Найдите расстояние от середины ребра $AD$ до прямой $MT$, где точки $M$ и $T$ — середины ребер $CS$ и $BC$ соответственно.

**Решение.**

Пусть $O$ — центр основания, а $N$ — середина ребра $SD$, $P$ — середина ребра $AD$. Тогда $MN||CD||TP$, поэтому точки $P$, $N$, $M$, $T$ лежат в одной плоскости и являются вершинами трапеции.




По теореме о средней линии треугольника $NP = \frac{1}{2}AS = \frac{1}{2}BS = MT$, так что трапеция равнобокая.




Так как

$$AO = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}, AS = \sqrt{OA^2 + OS^2} = \sqrt{3+33} = 6, \text{ а } NP = MT = 3.$$

Основания трапеции равны $PT = \sqrt{6}$, $MN = \frac{\sqrt{6}}{2}$. В треугольнике $PMT$ проведем высоты $MG$ и $PH$.

Тогда

$$GT = \frac{PT - MN}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}, \text{ а } MG = \sqrt{MT^2 - GT^2} = \sqrt{9 - \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{69}{8}}.$$

Заметим, что $MG \cdot PT = 2 \cdot S_{PMT} = PH \cdot MT$, поэтому

$$PH = \frac{MG \cdot PT}{MT} = \frac{1}{2}\sqrt{23}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{23}$.

**18. C 3 № 484582.** Решите неравенство $\frac{\log_{2(x-1)^2-1}\left(\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3)\right)}{\log_{2(x-1)^2-1}(x^2+4x+5)} \geq 0.$

**Решение.**

Чтобы был определен логарифм по основанию $2^{(x-1)^2-1}$, это выражение должно быть положительно и отлично от 1. Находим: $(x-1)^2-1\neq 0$, откуда $x\neq 0$, $x\neq 2$. Упростим неравенство: $\log_{x^2+4x+5}\left(\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3)\right)\geq 0$.

Заметим, что $x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$, причем равенство достигается только при $x=-2$. При $x\neq -2$ получаем: $\log_{2x^2-2x+3}\left(x^2-4x+3\right)\geq 1$.

Выделим полный квадратв основании логарифма: $2x^2-2x+3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$.

Это выражение больше 1 при всех допустимых $x$. Таким образом, $x^2-4x+3\geq 2x^2-2x+3$.

Тогда $x^2+2x\leq 0$, откуда $-2\leq x\leq 0$. Учитывая, что $x\neq 0$ и $x\neq -2$, получаем $-2<x<0$.

Ответ: $x\in(-2,0)$.

**19. C 4 № 501947.** Окружности радиусов 3 и 5 с центрами $O_1$ и $O_2$ соответственно касаются в точке $A$. Прямая, проходящая через точку $A$, вторично пересекает меньшую окружность в точке $B$, а большую — в точке $C$. Найдите площадь треугольника $BCO_2$, если $\angle ABO_1 = 15°$.

**Решение.**

Точки $O_1$, $O_2$, и $A$ лежат на одной прямой. Поскольку треугольники $BO_1A$ и $CO_2A$равнобедренные, $\angle ABO_1=\angle BAO_1=\angle CAO_2=\angle ACO_2=15^\circ$, откуда

$$AB=2O_1A\cos 15^\circ=10\cos 15^\circ.$$

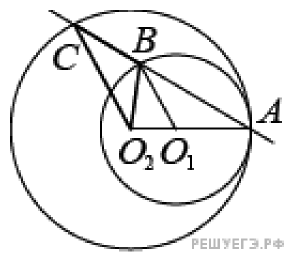


Рис. 1

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис.1), тогда точка $B$ лежит между точками $A$ и $C$, откуда $BC=AC-AB=4\cos 15^\circ$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=10\cos 15^\circ\sin 15^\circ=2,5.$$

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка $A$ лежит между точками $B$ и $C$, $BC=AC+AB=16\cos 15^\circ$.

$$S_{BCO_2}=\frac{BC\cdot CO_2\cdot\sin\angle BCO_2}{2}=40\cos 15^\circ\sin 15^\circ=10.$$

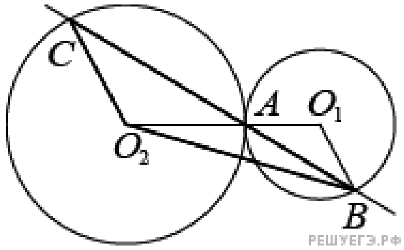


Рис. 2

Ответ: 2,5 или 10.

**20. C 5 № 484644.** Найти все значения $a$, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-2|x-a^2|-8x$ имеет более двух точек экстремума.

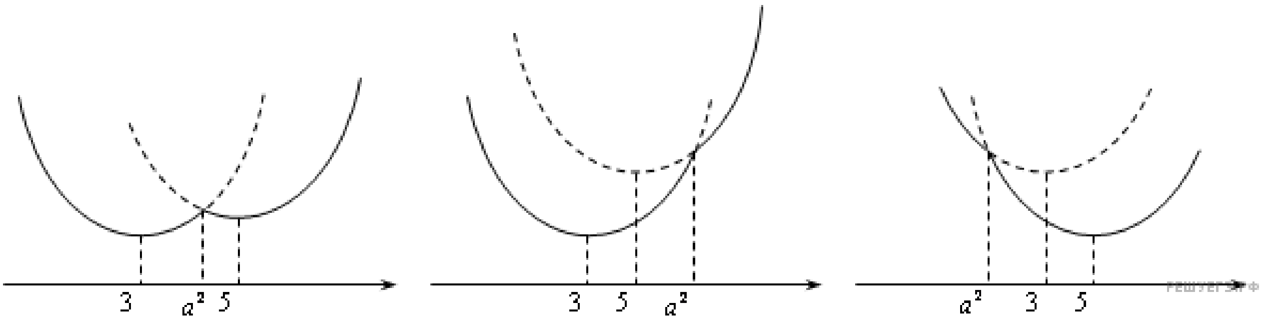
**Решение.**

1. Функция $f$ имеет вид

а) при $x \geq a^2$: $f(x) = x^2 - 10x + 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 5$;

б) при $x \leq a^2$: $f(x) = x^2 - 6x - 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 3$.

Все возможные виды графиков функции показаны на рисунках:




Графики обеих квадратичных функции проходят через точку $(a^2;\ f(a^2))$.

3. Функция $y = f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно три, в единственном случае (рис. 1):

$$3 < a^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}.$$

Ответ: $-\sqrt{5} < a < -\sqrt{3}$; $\sqrt{3} < a < \sqrt{5}$.

**21. C 6 № 484672.** На доске написано более 36, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно $-5$, среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно $-12$.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

**Решение.**

Пусть среди написанных чисел $k$ положительных, $l$ отрицательных и $m$ нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому

$$6k-12l+0\cdot m=-5(k+l+m).$$

а) Заметим, что в левой части каждое слагаемое делится на 6, поэтому $k+l+m$ — количество целых чисел — делится на 6. По условию $36<k+l+m<48$, поэтому

$$k+l+m=42.$$

Таким образом, написано 42 числа.

б) Приведём равенство $6k-12l=-5(k+l+m)$ к виду

$$7l=11k+5m.$$

Так как $m\geq 0$, получаем, что $7l\geq 11k$, откуда $l>k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) (оценка) Подставим $k+l+m=42$ в правую часть равенства

$$6k-12l=-5(k+l+m):\ \ 6k-12l=-210,$$

откуда

$$k=2l-35.$$

Так как $k+l\leq 42$, получаем:

$$3l-35\leq 42, 3l\leq 77, l\leq 25, k=2l-35\leq 15;$$

то есть положительных чисел не более 15.

в) (пример) Приведём пример, когда положительных чисел ровно 15. Пусть на доске 15 раз написано число 6, 25 раз написано число −12 и два раза написан 0.

Тогда

$$\frac{6\cdot 15-12\cdot 25}{42}=\frac{90-300}{42}=-5$$

указанный набор удовлетворяет веем условиям задачи.

Ответ: а) 42; б) отрицательных; в) 15.