Вариант № 2887181

1. B 1 № 77351. В доме, в котором живет Маша, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 4 квартиры. Маша живет в квартире № 130. В каком подъезде живет Маша?

Решение.

В доме, в котором живет Маша, на девяти этажах каждого подъезда $9 \cdot 4 = 36$ квартир. Разделим 130 на 36:

$$\frac{130}{36} = \frac{65}{18} = 3\frac{11}{18}.$$

Значит, Маша живет в 4-м подъезде.

Ответ: 4.

2. B 2 № 26628. Железнодорожный билет для взрослого стоит 720 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 15 школьников и 2 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

Решение.

Билет для ребенка стоит $720 \cdot 0{,}5 = 360$ руб. Стоимость билетов на 15 школьников и двух взрослых составляет

$360 \cdot 15 + 720 \cdot 2 = 5400 + 1440 = 6840$ руб.

Ответ: 6840.

3. B 3 № 26869. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 27 апреля. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Решение.

Из графика видно, что наименьшая температура воздуха 27 апреля составляла −7 °C (см. рисунок).

Ответ: −7.

4. B 4 № 26672. Для транспортировки 45 тонн груза на 1300 км можно воспользоваться услугами одной из трех фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

Перевозчик	**Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)**	**Грузоподъемность автомобилей (тонн)**
А	3200	3,5
Б	4100	5
В	9500	12

Решение.

Рассмотрим все варианты.

Для перевозки 45 тонн груза перевозчику *А* понадобится 13 автомобилей. Стоимость перевозки каждым из них составит $32 \cdot 1300 = 41\,600$ руб. Полная стоимость перевозки $41\,600 \cdot 13 = 540\,800$ руб.

Для перевозки 45 тонн груза перевозчику *Б* понадобится 9 автомобилей. Стоимость перевозки каждым из них составит $41 \cdot 1300 = 53\,300$ руб. Полная стоимость перевозки $53\,300 \cdot 9 = 479\,700$ руб.

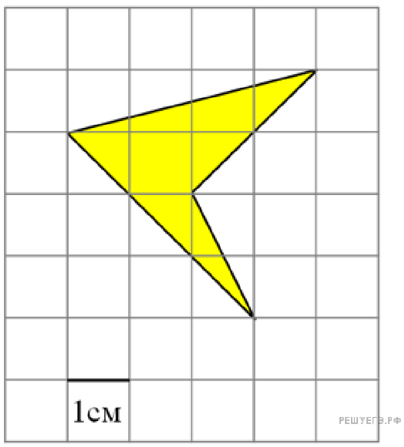
Для перевозки 45 тонн груза перевозчику *В* понадобится 4 автомобиля. Стоимость перевозки каждым из них составит $95 \cdot 1300 = 123\,500$ руб. полная стоимость перевозки $123\,500 \cdot 4 = 494\,000$ руб.

Стоимость самой дешевой перевозки составит 479 700 руб.

Ответ: 479 700.

5. B 5 № 245007.

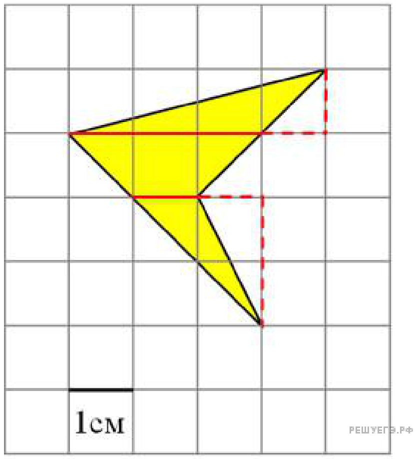
Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение.

Площадь четырёхугольника состоит из площадей двух треугольников и площади трапеции. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (3+1) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 4{,}5\ \text{см}^2.$$



6. B 6 № 320201. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Решение.

Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три продавца заняты равна $(0,3)^3=0,027$.

Ответ: 0,027.

7. B 7 № 10135.

Найдите корень уравнения: $\frac{5}{8}x=-5\frac{5}{8}$.

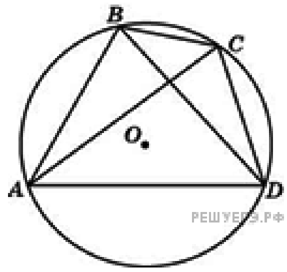
Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{5}{8}x=-5\frac{5}{8}\Leftrightarrow\frac{5}{8}x=-\frac{45}{8}\Leftrightarrow 5x=-45\Leftrightarrow x=-9.$$

Ответ: –9.

8. B 8 № 27874. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 105°, угол CAD равен 35°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



Решение.

вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит

$$\angle ABD=\frac{1}{2}\cup AD=\frac{1}{2}(\cup ADC-\cup CD)=\frac{1}{2}(2\angle ABC-2\angle CAD)=70^\circ.$$

Ответ: 70.

9. B 9 № 119972. Прямая $y=3x+1$ является касательной к графику функции ax^2+2x+3. Найдите a.

Решение.

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда одновременно $f(x_0) = y(x_0)$ и $f'(x_0) = k$. В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2 = 3, \\ ax_0^2 + 2x_0 + 3 = 3x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 = 0,5, \\ 0,5x_0 - x_0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,125, \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

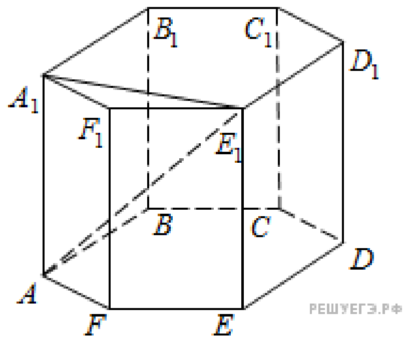
Искомое значение a равно 0,125

Ответ: 0,125.

Приведем другое решение.

По смыслу задачи $a \neq 0$, а значит, график заданной функции — парабола. Касательная к параболе (а также и к гиперболе) имеет с ней единственную общую точку. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы уравнение $ax^2 + 2x + 3 = 3x + 1$ имело единственно решение. Для этого дискриминант $1 - 8a$ уравнения $ax^2 - x + 2 = 0$ должен быть равен нулю, откуда $a = \frac{1}{8} = 0,125$.

10. B 10 № 245364. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками A и E_1.



Решение.

рассмотрим прямоугольный треугольник AA_1E_1. По теореме Пифагора

$$AE_1 = \sqrt{AA_1{}^2 + A_1E_1{}^2}.$$

Угол между сторонами правильного шестиугольника равен 120°. По теореме косинусов

$$A_1E_1 = \sqrt{A_1F_1{}^2 + F_1E_1{}^2 - 2A_1F_1 \cdot F_1E_1 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}.$$

Значит, $AE_1 = \sqrt{1+3} = 2$.

Ответ: 2.

11. B 11 № 26834. Найдите значение выражения $\frac{(4a)^{2,5}}{a^2\sqrt{a}}$ при $a > 0$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{(4a)^{2,5}}{a^2\sqrt{a}} = \frac{4^{2,5} \cdot a^{2,5}}{a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \frac{4^{2,5} \cdot a^{2,5}}{a^{2,5}} = 4^{2,5} = 4 \cdot 4 \cdot 4^{0,5} = 32.$$

Ответ: 32.

12. B 12 № 28012. Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = 0,5\sin\pi t$, где t – время в секундах. Кинетическая энергия груза, измеряемая в джоулях, вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса груза (в кг), v – скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее $5 \cdot 10^{-3}$ Дж. Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $E \geq 5 \cdot 10^{-3}$ Дж при заданных значении массы груза $m = 0,08$кг и закону изменения скорости:

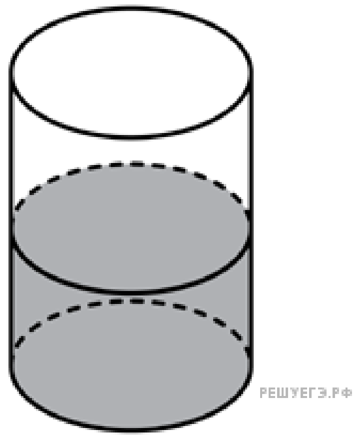
$$\frac{mv^2}{2} \geq 5 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{0,08 \cdot 0,25\sin^2 \pi t}{2} \geq 5 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow \sin^2 \pi t \geq \frac{1}{2} \underset{0<t<1}{\Leftrightarrow},$$

$$\underset{0<t<1}{\Leftrightarrow} \sin \pi t \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \pi t \leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 0,25 \leq t \leq 0,75.$$

Таким образом, 0,5 с из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее $5 \cdot 10^{-3}$ Дж. Это составляет 0,5 первой секунды.

Ответ: 0,5.

13. B 13 № 27045. В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3.



Решение.

По закону Архимеда объем детали равен объему вытесненной ею жидкости. Объем вытесненной жидкости равен 9/12 исходного объема:

$$V_{\text{дет}} = \frac{9}{12} \cdot 2000 = \frac{3}{4} \cdot 2000 = 1500 \quad \text{см}^3.$$

Ответ: 1500.

14. B 14 № 26593. Заказ на 156 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий, если известно, что он за час делает на 1 деталь больше?

Решение.

Обозначим n – число деталей, которые изготавливает за час первый рабочий, тогда второй рабочий за час изготавливает $n-1$ деталь, $n > 1$. На изготовление 156 деталей первый рабочий тратит на 1 час меньше, чем второй рабочий, отсюда имеем:

$$\frac{156}{n-1} - \frac{156}{n} = 1 \Leftrightarrow \frac{156}{n^2 - n} = 1 \underset{n>1}{\Leftrightarrow} 156 = n^2 - n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 156 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 13; \\ n = -12 \end{array}\right. \underset{n>1}{\Leftrightarrow} n = 13.$$

Ответ: 13.

15. B 15 № 77442. Найдите наибольшее значение функции $y = 9x^2 - x^3$ на отрезке $[2; 10]$.

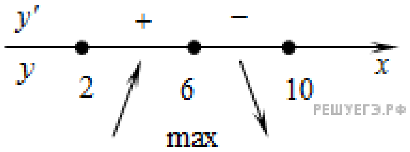
Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 18x - 3x^2 = 3x(6 - x).$$

Найдем нули производной: $x = 0$ и $x = 6$, на заданном отрезке лежит только число 6.

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 6$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение: $y(6) = 9 \cdot 36 - 6 \cdot 36 = 324 - 216 = 108$.

Ответ: 108.

16. C 1 № 500111. а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$.

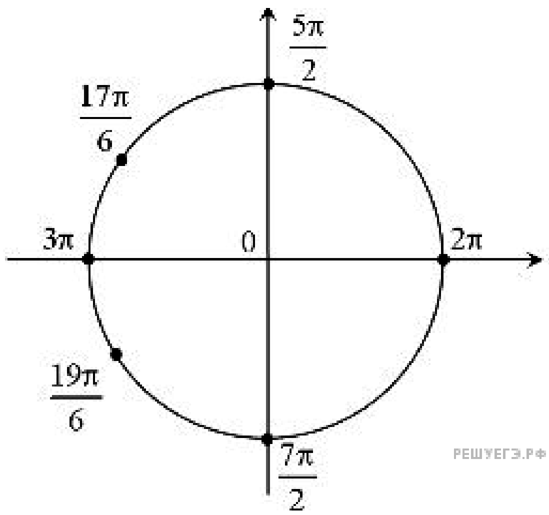
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$2\sin x\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot \left(2\cos x + \sqrt{3}\right).$$

Значит, или $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$, $n \in Z$, или $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.



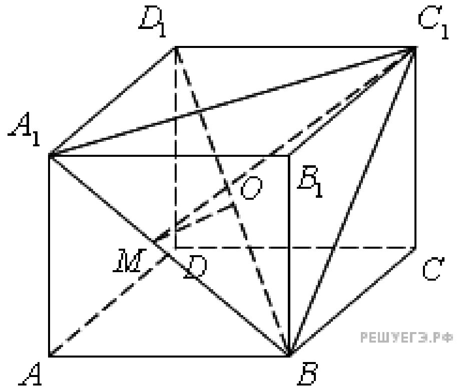
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\frac{17\pi}{6}; 3\pi; \frac{19\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pi n, n \in Z; \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$; б) $\frac{17\pi}{6}; 3\pi; \frac{19\pi}{6}$.

17. C 2 № 484562. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.

Решение.

Пусть точка O — центр куба, а M — середина A_1B. $A_1D_1 \perp A_1B$, а MO — средняя линия треугольника BA_1D_1,, поэтому $MO \perp A_1B$. Треугольник BA_1C_1 — равносторонний, $C_1M \perp A_1B$, следовательно, искомый угол равен углу OMC_1.



Примем длины ребер куба за a. Найдем стороны треугольника OMC_1. Из треугольника BA_1D_1, находим $OM = \frac{a}{2}$, из равностороннего треугольника BA_1C_1 находим

$$MC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

поскольку O — середина диагонали AC_1, то $OC_1 = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь применим к треугольнику OMC_1 теорему косинусов:

$$\cos\angle OMC_1 = \frac{OM^2 + MC_1^2 - OC_1^2}{2 \cdot OM \cdot MC_1} = \frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

18. C 3 № 500899. Решите систему $\begin{cases} 2^x + 6 \cdot 2^{-x} \le 7, \\ \dfrac{2x^2 - 6x}{x-4} \le x. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделаем замену $2^x = y$. Поскольку $y > 0$, на него можно умножить обе части неравенства. Получим

$$y + \frac{6}{y} \le 7 \Leftrightarrow y^2 - 7y + 6 \le 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-6) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le y \le 6,$$

откуда $0 \le x \le \log_2 6$.

Решим второе неравенство:

$$\frac{2x^2 - 6x}{x-4} \le \frac{x^2 - 4x}{x-4} \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{x-4} \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, 4].$$

Учитывая, что $2 < \log_2 6 < 3$, находим решение системы.

Ответ: $\{0\} \cup [2, \log_2 6]$.

19. С 4 № 500964. Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 17. Найдите расстояние между их центрами.

Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = b$, $BC = a$ и гипотенузой $AB = c$. Пусть окружность с центром O_c радиуса r_c касается гипотенузы в точке T, продолжений катетов BC и AC − в точках M и N соответственно, а p − полупериметр треугольника ABC. Из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что $CM = CB + BM = CB + BT$ и $CN = CA + AN = CA + AT$, поэтому

$$CM + CN = CB + BT + CA + AT = CB + CA + (BT + AT) = CB + CA + AB = a + b + c = 2p,$$

а так как $CM = CN$, то $CM = p$. Далее, пусть окружность с центром O_a радиуса r_a касается катета BC в точке K, а продолжений сторон AB и AC − в точка P и Q соответственно. Рассуждая аналогично, получаем $AQ = AP = p$. ЧетырехугольникиNO_cMC и KO_aQC − квадраты, поэтому

$$r_c = O_cM = CM = p, \quad r_a = CQ = AQ - AC = p - b,$$

значит, $r_a < r_c$.

Следовательно, радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы данного прямоугольного треугольника, не может быть равен 7.

Таким образом, возможны только такие случаи: Либо радиус окружности, касающейся гипотенузы, равен 17, а радиус окружности, касающейся одного из катетов, равен 7, либо радиусы окружностей, касающихся катетов, равны 7 и 17.

Предположим, что $r_c = 17$ и $r_a = 7$(рис. 1).

Опустим перпендикуляр O_aF из центра меньшей окружности на O_cN. Тогда

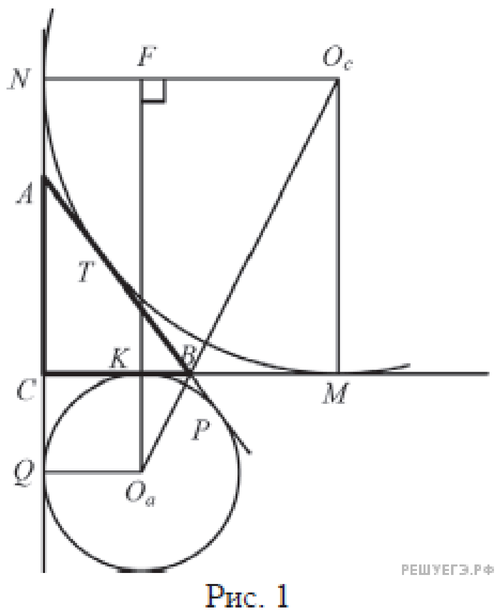


Рис. 1

$$O_aF = QN = QC + CN = O_aK + O_cM = r_a + r_c = 7 + 17 = 24,$$

$$O_cF = MK = CM - CK = r_c - r_a = 17 - 7 = 10,$$

Следовательно,

$$O_aO_c = \sqrt{O_aF^2 + O_cF^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26.$$

Пусть теперь $r_b = 17$ и $r_a = 7$. (рис 2)

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому точки O_a, C и O_b лежат на оной прямой. Следовательно,

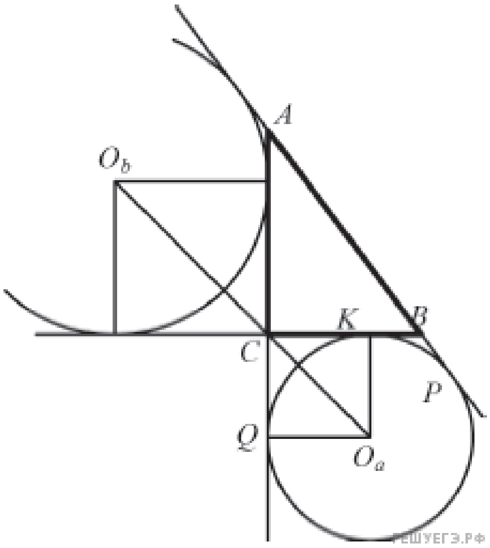


Рис. 2

$$O_aO_b = O_aC + CO_b = r_a\sqrt{2} + r_b\sqrt{2} = 7\sqrt{2} + 17\sqrt{(2)} = 24\sqrt{2}.$$

Ответ: 26 или $24\sqrt{2}$.

20. C 5 № 502138. Найдите все значения a, при которых уравнение $\log_{x+1}(x+5-a) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку (-1; 2].

Решение.

Уравнение $\log_{x+1}(x+5-a)=2$ равносильно системе $\begin{cases} x^2+x-4+a=0, \\ x>-1, \\ x\neq 0. \end{cases}$

Эта система имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1:2]$, если уравнение $x^2+x-4+a=0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий либо промежутку $(-1;0)$. либо промежутку $(0:2]$.

Поскольку графиком функции $f(x)=x^2=x-4+a$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $x=-\frac{1}{2}$, уравнение $f(x)=0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1;0)$, при условии $\begin{cases} f(-\frac{1}{2})\leq 0, \\ f(-1)=f(0)>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\frac{1}{4}+a\leq 0, \\ -4+a>0, \end{cases}$ откуда $4<a\leq\frac{17}{4}$ (рис.1).

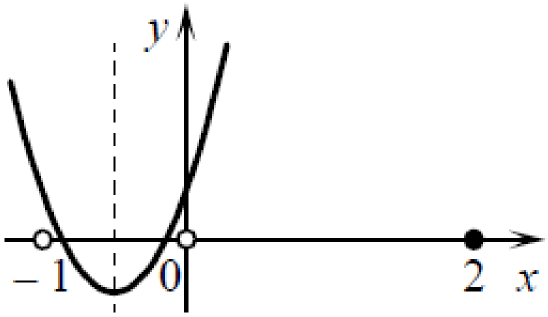


Рис. 1

Уравнение $f(x)=0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(0;2]$, при условии $\begin{cases} f(0)<0, \\ f(2)\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4+a<0, \\ -2+a\geq 0, \end{cases}$ откуда $-2\leq a<4$ (рис.2).

Уравнение $\log_{x+1}(x+5-a)=2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1;2]$, при $-2\leq a<4$ и при $4<a\leq\frac{17}{4}$.

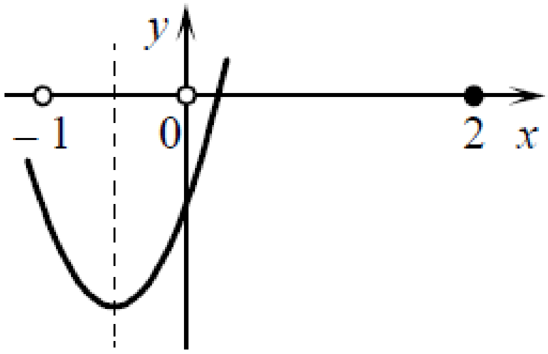


Рис. 2

Ответ: $[-2;4);\ (4;4,25]$.

21. С 6 № 484663. Найдите все простые числа p, для каждого из которых существует такое целое число k, что число p является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^3+9k.

Решение.

Если число p является делителем числа k^3+9k, то оно является также и делителем числа $k(k^3+9k)=k^4+9k^2$. Но если число p является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^4+9k^2, то оно является также и делителем разности этих чисел, то есть числа

$$(k^4+12k^2+12)-(k^4-9k^2)=3k^2+12.$$

Аналогично получаем:

1) число p является общим делителем чисел k^3+9k и $3k^2+12$, значит, p является делителем числа

$$3(k^3+9k)-k(3k^2+12)=15k;$$

2) число p является общим делителем чисел $3k^2+12$ и $15k$, значит, p является делителем числа

$$5(3k^2+12)-k15k=60;$$

Число 60 имеет ровно три различных простых делителя — 2, 3 и 5. Остается проверить найдутся ли такие целые числа k для каждого из которых одно из чисел 2, 3 и 5 является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^3+9k.

Если число k — четное, то число 2 является общим делителем данных чисел. Если число k кратно 3, то число 3 является общим делителем данных чисел. Если число $k=1$, то число 5 является общим делителем данных чисел.

Ответ: 2, 3, 5.