Вариант № 2887096

1. B 1 № 26635. В летнем лагере 218 детей и 26 воспитателей. В автобус помещается не более 45 пассажиров. Сколько автобусов требуется, чтобы перевезти всех из лагеря в город?

Решение.

Всего в лагере 218 + 26 = 244 чел. Разделим 244 на 45:

$$\frac{244}{45}=\frac{225+19}{45}=\frac{225}{45}+\frac{19}{45}=5\frac{19}{45}.$$

Значит, чтобы перевезти всех из лагеря в город, понадобится 6 автобусов.

Ответ: 6.

2. B 2 № 26645. Розничная цена учебника 180 рублей, она на 20% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 10 000 рублей?

Решение.

Розничная цена учебника составляет 120% от оптовой цены. Чтобы найти 100% цены разделим 180 на 1,2:

$$\frac{180}{1,2}=\frac{1800}{12}=\frac{300}{2}=150.$$

Поскольку

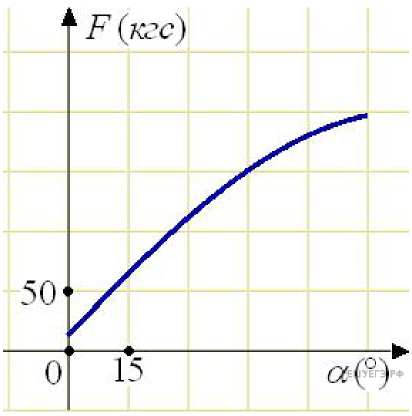
$$10\,000:150=66\frac{2}{3},$$

по оптовой цене на 10 000 рублей можно купить 66 учебников.

Ответ: 66.

3. B 3 № 263864.

В аэропорту чемоданы пассажиров поднимают в зал выдачи багажа по транспортерной ленте. При проектировании транспортера необходимо учитывать допустимую силу натяжения ленты транспортера. На рисунке изображена зависимость натяжения ленты от угла наклона транспортера к горизонту при расчетной нагрузке. На оси абсцисс откладывается угол подъема в градусах, на оси ординат – сила натяжения транспортерной ленты (в килограммах силы). При каком угле наклона сила натяжения достигает 150 кгс? Ответ дайте в градусах.



Решение.

Из графика видно, что сила натяжения достигает 150 кгс при угле наклона 45 градусов.

Ответ: 45.

4. B 4 № 26680. Строительной фирме нужно приобрести 75 кубометров пенобетона у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	**Стоимость пенобетона (руб. за за 1 м^3)**	**Стоимость доставки**	**Дополнительные условия**
А	2650	4500 руб.	
Б	2700	5500 руб.	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2680	3500 руб.	При заказе более 80 м^3 доставка бесплатно

Решение.

Рассмотрим все варианты.

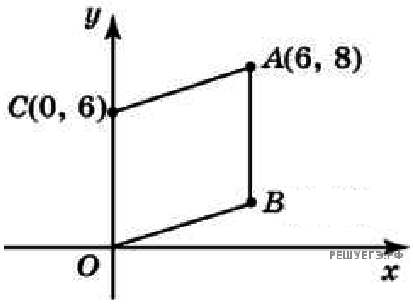
При покупке у поставщика *А* цена заказа складывается из стоимости самого пенобетона 2 650 · 75 = 198 750 руб. и стоимости доставки. Всего 198 750 + 4 500 = 203 250 руб.

При покупке пенобетона у поставщика *Б* стоимость пенобетона составляет 2 700 · 75 = 202 500 руб. Так как стоимость заказа больше 150 000 руб., то доставка бесплатно. Таким образом, стоимость заказа 202 500 руб.

При покупке у поставщика *В* цена заказа складывается из стоимости самого пенобетона 2 680 · 75 = 201 000 руб. и стоимости доставки. Всего 201 000 + 3 500 = 204 500 руб.

Ответ: 202 500.

5. B 5 № 27673. Точки $O(0;\ 0)$, $A(6;\ 8)$, $C(0;\ 6)$ и B являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки B.



Решение.

Так как у параллелограмма противоположные стороны попарно равны, то $CA=\sqrt{(6-0)^2+(8-6)^2}=\sqrt{40}, CA=OB=\sqrt{40}$. Известно, что Bимеет координаты $(6;\ y)$, следовательно,$OB=\sqrt{(6-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{36+y^2}=\sqrt{40}$. Поэтому $y=2$.

Ответ: 2.

6. B 6 № 320191. На олимпиаде в вузе участников рассаживают по трём аудиториям. В первых двух по 120 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчёте выяснилось, что всего было 250 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Решение.

Всего в запасную аудиторию направили 250 − 120 − 120 = 10 человек. Поэтому вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории, равна 10 : 250 = 0,04.

Ответ: 0,04.

7. B 7 № 315120. Найдите корень уравнения $\log_8 2^{8x-4} = 4$.

Решение.

Используем формулу $\log_{a^m} a^n = \dfrac{n}{m}$:

$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \log_{2^3} 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \frac{8x-4}{3} = 4 \Leftrightarrow 8x-4 = 12 \Leftrightarrow x = 2.$$

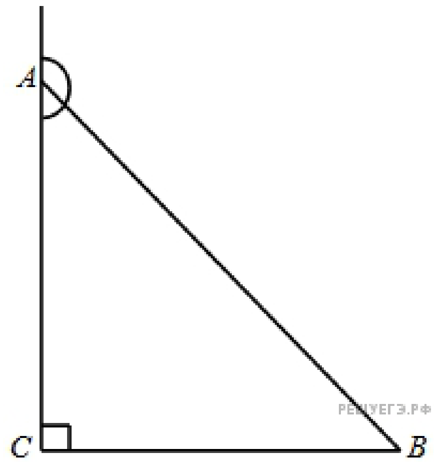
Приведем другое решение:

$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 8^4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 2^{12} \Leftrightarrow 8x-4 = 12 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ:2.

8. B 8 № 27372.

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\mathrm{tg} A = \dfrac{24}{7}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.



Решение.

так как

$$\cos A_{\text{внеш}} = -\cos A = -\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 A}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{576}{49}}} = -\sqrt{\frac{49}{625}} = -\frac{7}{25} = -0,28.$$

Ответ: –0,28.

9. B 9 № 119975. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени t = 9 с.

Решение.

Найдем закон изменения скорости:

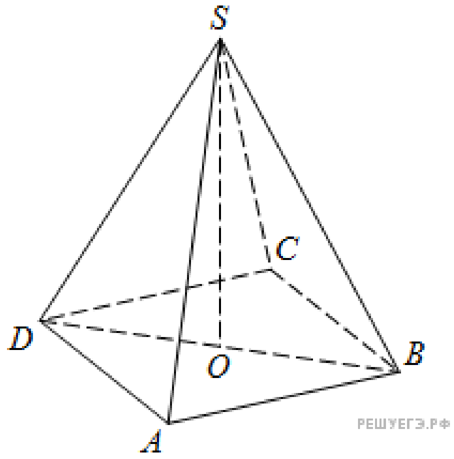
$$v(t) = x'(t) = 12t - 48.$$

При t = 9 с имеем:

$$v(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60 \text{ м/с}.$$

Ответ: 60.

10. B 10 № 912. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SB = 13$, $AC = 24$. Найдите длину отрезка SO.



Решение.
в правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды. тогда по теореме Пифагора

$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$$

Ответ: 5.

11. B 11 № 26816. Найдите значение выражения $(4a)^3 : a^7 \cdot a^4$.

Решение.
Выполним преобразования:

$$(4a)^3 : a^7 \cdot a^4 = \frac{64a^3 \cdot a^4}{a^7} = \frac{64a^7}{a^7} = 64.$$

Ответ: 64.

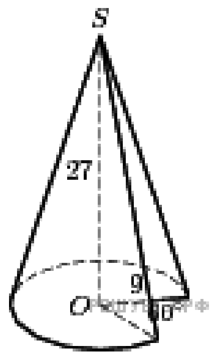
12. B 12 № 27953. При температуре $0\,^\circ$C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} (^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Решение.
Задача сводится к нахождению наименьшего решения неравенства $l(t^\circ) - l_0 \geq 3$ мм при заданных значениях длины $l_0 = 10$ м и коэффициента теплового расширения $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ (^\circ\mathrm{C})^{-1}$:

$$l(t^\circ) - l_0 \geq 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ) - l_0 \geq 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0 \alpha t^\circ \geq 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^\circ \geq 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow t^\circ \geq \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} \Leftrightarrow t^\circ \geq 25\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Ответ: 25.

13. B 13 № 27205. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π.



Решение.

Объем данной части конуса равен

$$\frac{300^\circ}{360^\circ}\frac{1}{3}\pi R^2 H=\frac{5}{18}9^2\cdot 27\pi=607,5\pi.$$

Ответ: 607,5.

14. B 14 № 114785. Часы со стрелками показывают 3 часа ровно. Через сколько минут минутная стрелка в девятый раз поравняется с часовой?

Решение.

Скорость движения минутной стрелки 12 делений/час (под одним делением здесь подразумевается расстояние между соседними цифрами на циферблате часов), а часовой – 1 деление/час. До девятой встречи минутной и часовой стрелок минутная должна сначала 8 раз «обогнать» часовую, то есть пройти 8 кругов по 12 делений. Пусть после этого до последней встречи часовая стрелка пройдет L делений. Тогда общий путь минутной стрелки складывается из найденных 96 делений, ещё 3 изначально разделяющих их делений (поскольку часы показывают 3 часа) и последних L делений. Приравняем время движения для часовой и минутной стрелок:

$$\frac{L}{1}=\frac{L+3+96}{12}\Leftrightarrow 12L=L+99\Leftrightarrow L=9.$$

Часовая стрелка пройдет 9 делений, что соответствует 9 часам или 540 минутам.

Ответ: 540.

По просьбам читателей помещаем общее решение.

Скорость вращения часовой стрелки равна 0,5 градуса в минуту, а минутной — 6 градусов в минуту. Поэтому когда часы показывают время h часов m минут часовая стрелка повернута на $30h + 0{,}5m$ градусов, а минутная — на $6m$ градусов относительно 12-часового деления.

Пусть в первый раз стрелки встретятся через t_1 минут. Тогда если минутная стрелка еще не опережала часовую в течение текущего часа, то $6m + 6t_1 = 30h + 0{,}5m + 0{,}5t_1$, т. е. $t_1 = (60h - 11m)/11$ (*). В противоположном случае получаем уравнение $6m + 6t_1 = 30h + 0{,}5m + 0{,}5t_1 + 360$, откуда $t_1 = (60h - 11m + 720)/11$ (**).

Пусть во второй раз стрелки встретятся через t_2 минут после первого, тогда $0{,}5t_2 = 6t_2 - 360$, откуда $t_2 = 720/11$ (***). Это же верно для каждого следующего оборота.

Поэтому для встречи с номером n из (*) и (**) с учетом (***) имеем соответственно: $t_n = (60h - 11m + 720(n - 1))/11$ или $t_n = (60h - 11m + 720n)/11$.

15. B 15 № 26718. Найдите наименьшее значение функции $y=9x-\ln(9x)+3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18};\frac{5}{18}\right]$.

Решение.

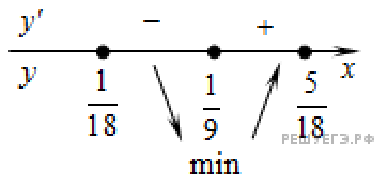
Функция определена и дифференцируема на заданном отрезке. Найдем ее производную:

$$y'(x)=9-\frac{1}{x}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 9-\dfrac{1}{x}=0, \\ \dfrac{1}{18}\le x\le\dfrac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{9}, \\ \dfrac{1}{18}\le x\le\dfrac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{9}.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке, и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=\dfrac{1}{9}$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}\cdot 9-\ln 1+3=4.$$

Ответ: 4.

16. C 1 № 501395. а) Решите уравнение $\sin x(2\sin x-3\operatorname{ctg}x)=3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

Область определения данного уравнения задается условием $\sin x\ne 0$. $(*)$

При этом условии имеем: $\sin x(2\sin x-3\operatorname{ctg}x)=3\ \Leftrightarrow\ 2\sin^2 x-3\cos x=3\ \Leftrightarrow\ 2\cos^2 x+3\cos x+1=0$, откуда $\cos x=-1$ или $\cos x=-\dfrac{1}{2}$.

Корни уравнения $\cos x=-1$ не удовлетворяют условию $(*)$, а из уравнения $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ получаем $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

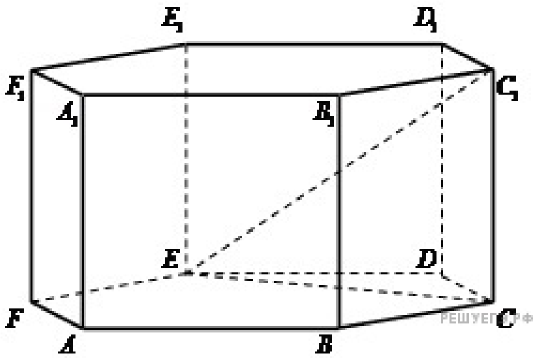
Из найденных решений промежутку $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ принадлежат числа $-\dfrac{4\pi}{3},-\dfrac{2\pi}{3}$.

Ответ: а) $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{4\pi}{3},-\dfrac{2\pi}{3}$.

17. C 2 № 485955. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF\ A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра которой равны 10, найдите расстояние от точки E до прямой B_1C_1.

Решение.

Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, прямые BC и CE перпендикулярны. Поскольку прямые BC и B_1C_1 параллельны, CE перпендикулярно B_1C_1. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах EC_1 перпендикулярна B_1C_1, поэтому длина отрезка EC_1 равна искомому расстоянию.



По условию $CC_1 = 10$, диагональ правильного шестиугольника $CE = 10\sqrt{3}$. Тогда по теореме Пифагора для треугольника ECC_1 находим, что $EC_1 = 20$.

Ответ: 20.

18. C 3 № 485963. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 7\log_9\left(x^2-x-6\right) \le 8+\log_9\dfrac{(x+2)^7}{x-3}, \\ \dfrac{1}{3^{x-1}}+\dfrac{1}{3^x}+\dfrac{1}{3^{x+1}} < 52. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\begin{cases} \log_9\dfrac{\left(x^2-x-6\right)^7(x-3)}{(x+2)^7} \le 8 \\ (x-3)(x+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_9(x-3)^8 \le 8, \\ (x-3)(x+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^8 \le 9^8, \\ (x-3)(x+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 \le 9^2, \\ (x-3)(x+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-12)(x+6) \le 0, \\ (x-3)(x+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \le x < -2, \\ 3 < x \le 12. \end{array}\right.$$

Решим второе неравенство системы:

$$\frac{1}{3^{x+1}}(9+3+1)<52 \Leftrightarrow \frac{13}{3^{x+1}}<52 \Leftrightarrow 3^{x+1}>\frac{1}{4} \Leftrightarrow x+1>\log_3\frac{1}{4} \Leftrightarrow x>-1-\log_3 4.$$

Поскольку $-6<-1-\log_3 4<-2$, имеем: $-1-\log_3 4<x<-2,\ 3<x\le 12.$

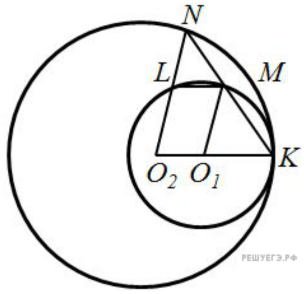
Ответ: $(-1-\log_3 4, -2)\cup(3, 12]$.

19. C 4 № 501754. Окружности радиусов 11 и 21 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке K, MO_1 и MO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle MO_1O_2 = 120^\circ$. Найдите MN.

Решение.

Точки O_1, O_2 и K лежат на одной прямой.

Возможны два случая.

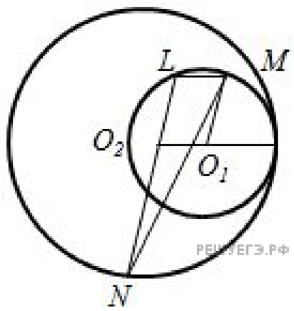


Первый случай: точки M и N лежат по одну сторону от прямой O_1O_2 (рис. 1). Отрезок ML параллелен отрезку O_1O (точка L принадлежит радиусу NO_2), следовательно, O_1O_2LM — параллелограмм: $ML = O_1O_2 = 10$, $O_1M = O_2L = 11$, $\angle O_2LM = \angle MO_1O_2 = 120^\circ$.

В треугольнике LMN имеем $LM = 10$, $LN = 10$, $\angle MLN = 60^\circ$, значит, треугольник LMN — правильный, откуда $MN = 10$.Второйслучай : точки < math > M и N лежат по разные стороны от прямой O_1O_2 (рис. 2). Отрезок ML параллелен отрезку O_1O_2 (точка L лежит на продолжении радиуса NO_2 за точку O_2), следовательно, O_1O_2LM — параллелограмм: $ML = O_1O_2 = 10$, $O_1M = O_2L = 11$, $\angle O_2LM = MO_1O_2 = 120^\circ$.

В треугольнике LMN имеем $LM = 10$, $LN = 32$, $\angle MLN = 120^\circ$, откуда

$$MN = \sqrt{LM^2 + LN^2 - 2LM \cdot LN \cdot \cos \angle MLN} = 38.$$

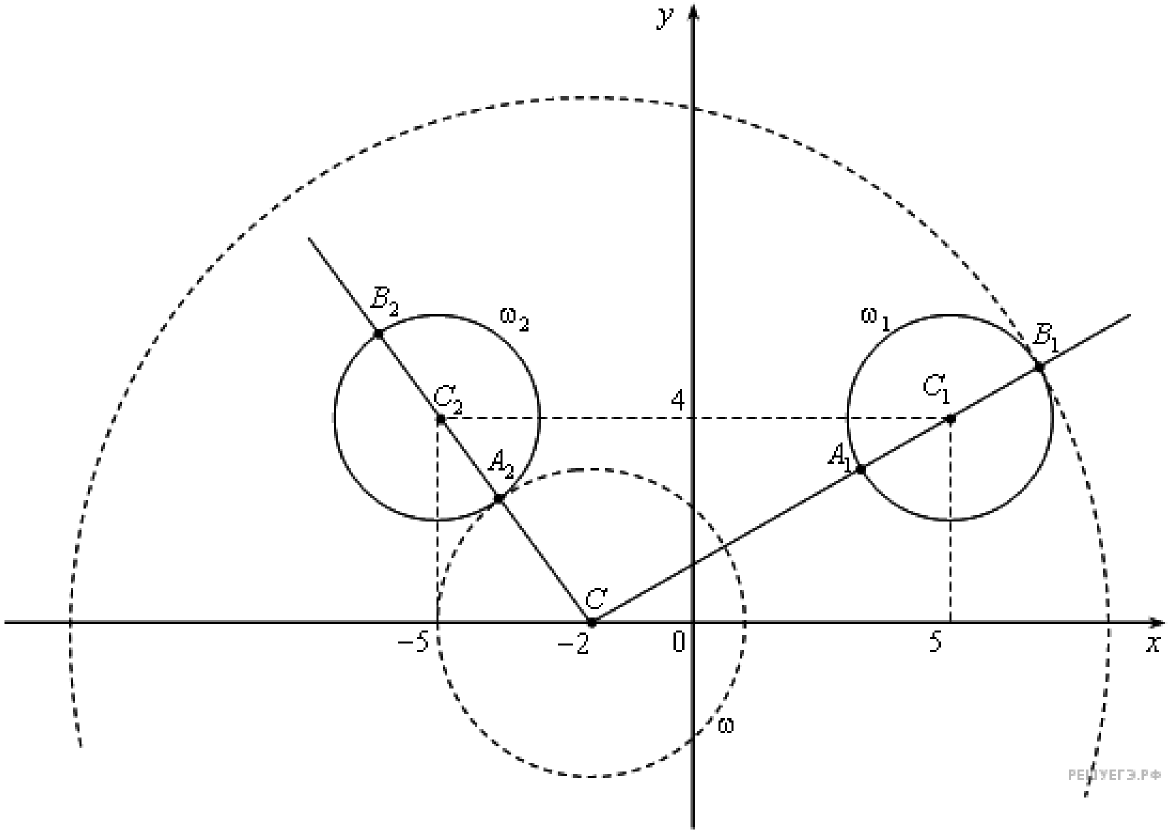


Ответ: 10 или 38.

20. C 5 № 484650. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 4, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение.

Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 4$ задаёт окружность ω_1, с центром в точке $C_1\ (5;\ 4)$ радиуса 2, а если $x < 0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2\ (-5;\ 4)$ того же радиуса (см. рис.).



При положительных значениях параметра a уравнение $(x+2)^2+y^2=a^2$ задает окружность ω с центром в точке $C\ (-2;\ 0)$ радиуса a. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения параметра a, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2.

Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1.

Так как $CC_1=\sqrt{(5+2)^2+4^2}=\sqrt{65}$, то

$$CA_1=\sqrt{65}-2, CB_1=\sqrt{65}+2.$$

При $a<CA_1$ или $a>CB_1$ окружности ω_1 и ω_2 не пересекаются. При $CA_1<a<CB_1$ окружности ω_1 и ω_2 имеют две общие точки. При $a=CA_1$ или $a=CB_1$ окружности ω_1 и ω_2 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между C и C_2.

Так как $CC_2=\sqrt{(-5+2)^2+4^2}=5$, то

$$CA_2=5-2=3, CB_2=5+2=7.$$

При $a<CA_2$ или $a>CB_2$ окружности ω_1 и ω_2 не пересекаются. При $CA_2<a<CB_2$ окружности ω_1 и ω_2 имеют две общие точки. При $a=CA_2$ или $a=CB_2$ окружности ω_1 и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2, и не пересекается с другой. Так как $CA_2<CA_1<CB_2<CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a=3$ и $a=\sqrt{65}+2$.

Ответ: 3; $\sqrt{65}+2$.

21. С 6 № 500820. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k-8l+0\cdot m=-3(k+l+m)$.

а) Заметим, что в лувой части приведенного выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k+l+m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40<k+l+m<48$, поэтому $k+l+m=44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведем неравенство $4k-8l=-3(k+l+m)$ к виду $5l=7k+3m$. Так как $m\geq 0$, получаем, что $5l\geq 7k$, откуда $l>k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в$_{\text{оценка}}$) Подставим $k+l+m=44$ в правую часть равенства $4k-8l=-3(k+l+m)$: $4k-8l=-132$, откуда $k=2l-33$. Так как $k+l\leq 44$, получаем: $3l-33\leq 44$, $3l\leq 77$, $l\leq 25$, $k=2l-33\leq 17$; то есть положительных чисел не более 17.

в$_{\text{пример}}$) Приведем пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число −8 и два раза написан 0. Тогда $\dfrac{4\cdot 17-8\cdot 25}{44}=\dfrac{68-200}{44}=-3$, указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.