Вариант № 2887149

1. B 1 № 26623. Аня купила проездной билет на месяц и сделала за месяц 41 поездку. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 580 рублей, а разовая поездка — 20 рублей?

Решение.

Найдем, что 41 поездка стоила бы $20 \cdot 41 = 820$ рублей. Значит, Аня сэкономила $820 - 580 = 240$ рублей.

Ответ: 240.

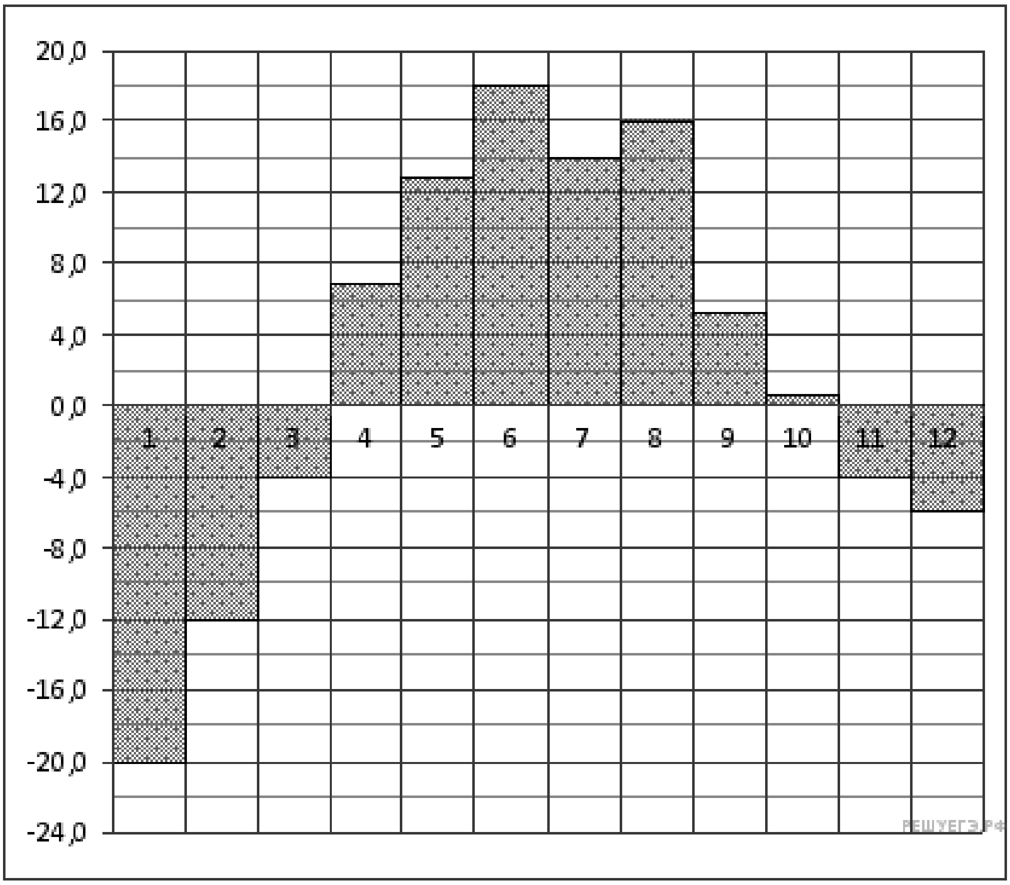
2. B 2 № 77345. Только 94% из 27500 выпускников города правильно решили задачу B1. Сколько человек правильно решили задачу B1?

Решение.

Правильно решили задачу $27\,500 \cdot 0{,}94 = 25\,850$ учеников.

Ответ: 25 850.

3. B 3 № 27513. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1973 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение.

Из диаграммы видно, что наибольшая и наименьшая среднемесячные температуры составляли 18 °C и −20 °C соответственно (см. рисунок). Найдем их разность: $18 - (-20) = 38$ °C.

Ответ: 38.

4. B 4 № 26673. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	2,5 руб. за 1 Мб
План «500»	550 руб. за 500 Мб трафика в месяц	2 руб. за 1 Мб сверх 500 Мб
План «800»	700 руб. за 800 Мб трафика в месяц	1,5 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб

Пользователь предполагает, что его трафик составит 600 Мб в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 600 Мб?

Решение.

Рассмотрим все варианты.

По Плану «0» пользователь потратит $2{,}5 \cdot 600 = 1500$ руб. в месяц за 600 Мб трафика.

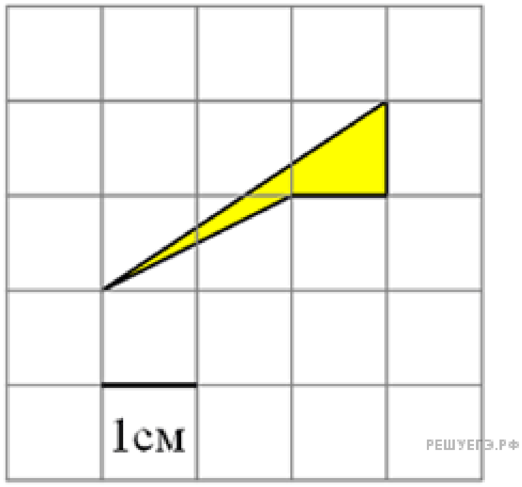
По плану «500» он потратит 550 руб. абонентской платы за 500 Мб и $2 \cdot 100 = 200$ руб. сверх того. Поэтому полная плата в месяц составит $550 + 200 = 750$ руб.

По плану «800» пользователь потратит в месяц за 600 Мб трафика 700 руб.

Наиболее выгодный вариант составляет 700 руб.

Ответ: 700.

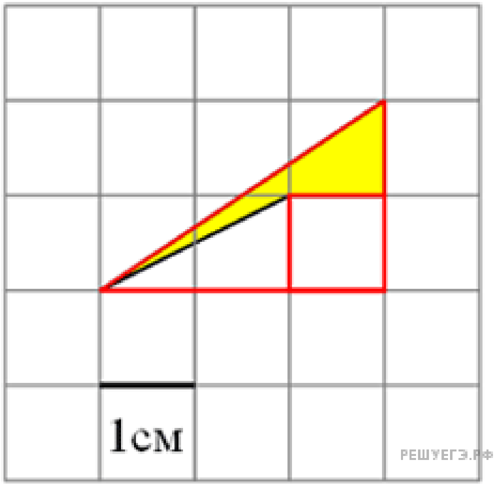
5. B 5 № 244999. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение.

Площадь четырехугольника равна разности площади большого прямоугольного треугольника, маленького прямоугольного треугольника, гипотенуза которого является стороной исходного четырехугольника и площади маленького квадрата. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1\,\text{см}^2.$$



6. B 6 № 320187. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Решение.

Найдем вероятность противоположного события, состоящего в том, что цель не будет уничтожена за n выстрелов. Вероятность промахнуться при первом выстреле равна 0,6, а при каждом следующем — 0,4. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятности этих событий. Поэтому вероятность промахнуться при n выстрелах равна: $0,6\cdot(0,4)^{(n-1)}$.

Осталось найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$0,6\cdot(0,4)^{n-1}\le 0,02 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\le\frac{1}{30}.$$

Последовательно проверяя значения n, равные 1, 2, 3 и т. д. находим, что искомым решением является $n=5$. Следовательно, необходимо сделать 5 выстрелов.

Ответ: 5.

Примечание.

Можно решать задачу «по действиям», вычисляя вероятность уцелеть после ряда последовательных промахов:

P(1) = 0,6.
P(2) = P(1)·0,4 = 0,24.
P(3) = P(2)·0,4 = 0,096.
P(4) = P(3)·0,4 = 0,0384;
P(5) = P(4)·0,4 = 0,01536.

Последняя вероятность меньше 0,02, поэтому достаточно пяти выстрелов по мишени.

Приведем другое решение.

Вероятность поразить мишень равна сумме вероятностей поразить ее при первом, втором, третьем и т. д. выстрелах. Поэтому задача сводится к нахождению наименьшего натурального решения неравенства

$$0,4+0,6\cdot0,6+0,6\cdot0,4\cdot0,6+0,6\cdot0,4\cdot0,4\cdot0,6+...+(0,6)^2\cdot(0,4)^{n-2}\ge 0,98.$$

В нашем случае неравенство решается подбором, в общем случае понадобится формула суммы геометрической прогрессии, использование которой сведет задачу к простейшему логарифмическому неравенству.

7. B 7 № 10135.

Найдите корень уравнения: $\frac{5}{8}x=-5\frac{5}{8}$.

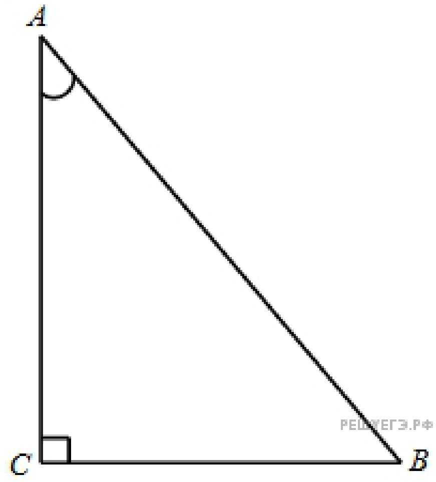
Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{5}{8}x=-5\frac{5}{8}\Leftrightarrow\frac{5}{8}x=-\frac{45}{8}\Leftrightarrow 5x=-45\Leftrightarrow x=-9.$$

Ответ: –9.

8. B 8 № 27227. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg}A=\frac{7}{24}$. Найдите $\sin A$.

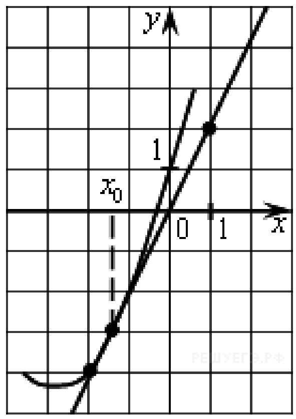


Решение.

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 A}} = \sqrt{1-\frac{1}{1+\frac{49}{576}}} = \sqrt{1-\frac{576}{625}} = \frac{7}{25} = 0,28.$$

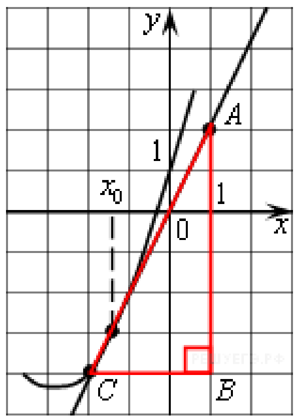
Ответ: 0,28.

9. B 9 № 27503. На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (1; 2), B (1; −4), C(−2; −4). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB



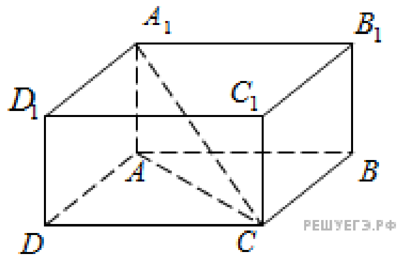
$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

Ответ: 2.

10. B 10 № 284363. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $DD_1 = 1$, $CD = 2$, $AD = 2$. Найдите длину диагонали CA_1

Решение.

Найдем диагональ AC прямоугольника $ABCD$. По теореме Пифагора



$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{8}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник A_1AC. По теореме Пифагора

$$CA_1 = \sqrt{CA^2 + AA_1{}^2} = \sqrt{8+1} = 3.$$

Ответ: 3.

11. B 11 № 26769. Найдите значение выражения $\dfrac{14\sin 409^\circ}{\sin 49^\circ}$.

Решение.

Воспользуемся периодичностью синуса:

$$\frac{14\sin 409^\circ}{\sin 49^\circ} = \frac{14\sin(360^\circ + 49^\circ)}{\sin 49^\circ} = \frac{14\sin 49^\circ}{\sin 49^\circ} = 14.$$

Ответ: 14.

12. B 12 № 28014. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 5\sin \pi t$ (см/с), где t – время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 2,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Решение.

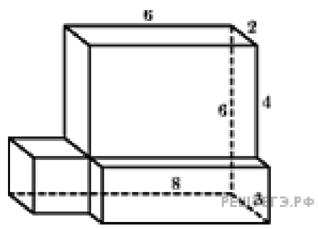
Задача сводится к решению неравенства $v \geq 2,5$ см/с при заданном законе изменения скорости $v(t) = 5\sin \pi t$:

$$5\sin \pi t \geq 2,5 \Leftrightarrow \sin \pi t \geq \frac{1}{2} \underset{0<\pi t<\pi}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{6} \leq \pi t \leq \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}.$$

Таким образом, $\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3} = 0,666\ldots$ первой секунды после начала движения скорость груза превышала 2,5 см/с. Округляя, получаем 0,67.

Ответ: 0,67.

13. B 13 № 77157. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Решение.

Площадь поверхности тела равна сумме поверхностей трех составляющих его параллелепипедов с измерениями 2, 4, 6; 1, 6, 2 и 2, 2, 2:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 =$$
$$= (2\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 6 + 2\cdot 2\cdot 6) + (2\cdot 1\cdot 6 + 2\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 6\cdot 2) + (6\cdot 2\cdot 2) =$$
$$= 88 + 40 + 24 = 152.$$

Ответ: 152.

14. B 14 № 99577. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Решение.

Пусть масса 30-процентного раствора кислоты – m_1 кг, а масса 60-процентного – m_2. Если смешать 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 36-процентный раствор кислоты: $0,3m_1+0,6m_2=0,36(m_1+m_2+10)$. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты: $0,3m_1+0,6m_2+0,5\cdot 10=0,41(m_1+m_2+10)$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,3m_1+0,6m_2=0,36m_1+0,36m_2+3,6, \\ 0,3m_1+0,6m_2+5=0,41m_1+0,41m_2+4,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,24m_2-0,06m_1=3,6, \\ 0,11m_1-0,19m_2=0,9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m_2-m_1=60, \\ 11m_1-19m_2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1=4m_2-60, \\ 11(4m_2-60)-19m_2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1=4m_2-60, \\ 25m_2=750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1=60, \\ m_2=30. \end{cases}$$

Ответ: 60.

15. B 15 № 77475. Найдите наименьшее значение функции $y=(8-x)e^{9-x}$ на отрезке $[3;10]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

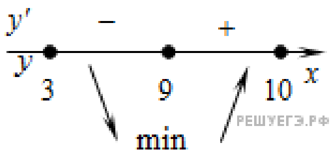
$$y'=\left((8-x)e^{9-x}\right)'=(8-x)'e^{9-x}+(8-x)(e^{9-x})'=$$

$$=-(8-x)e^{9-x}-e^{9-x}=(x-9)e^{9-x}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} (x-9)e^{9-x}=0, \\ 3\le x\le 10. \end{cases} \Leftrightarrow x=9.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=9$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(9)=-1\cdot 1=-1$.

Ответ: −1.

16. C 1 № 501729. а) Решите уравнение $(27^{\cos x})^{\sin x}=3^{\frac{3\cos x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

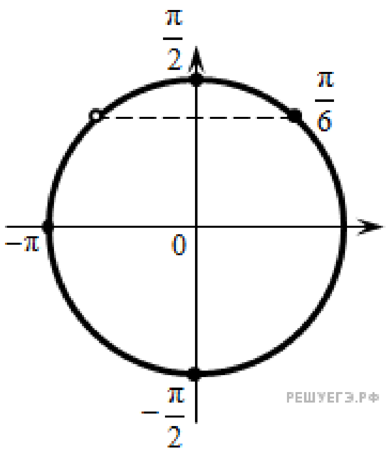
Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$3^{3\cos x\sin x}=3^{\frac{3\cos x}{2}}\Leftrightarrow 3\cos x\sin x=\frac{3\cos x}{2}\Leftrightarrow \cos x\cdot\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Значит, либо $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, либо $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$.

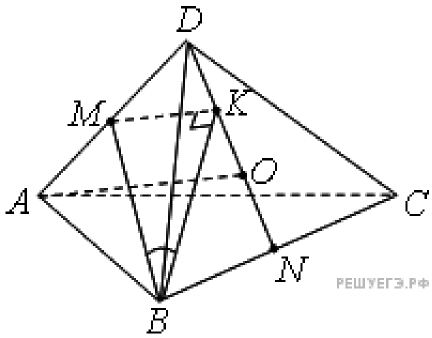


Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$.

17. C 2 № 484564. В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите угол между медианой BM грани ABD и плоскостью BCD.

Решение.

Пусть, ребро тетраэдра a, DN — высота грани BCD, O — центр треугольника BCD, MK — средняя линия треугольника ADO. Тогда $AO\perp BCD$, $MK\parallel AO$, значит, $MK\perp(BCD)$ и, следовательно, $\angle MBK$ — искомый.



Кроме того, $ON=OK=DK=\frac{1}{3}DN$, откуда $KN=\frac{2}{3}DN=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Далее имеем:

$$BK=\sqrt{BN^2+KN^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}},\ BM=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ \cos\angle MBK=\frac{BK}{BM}=\frac{a\sqrt{7}\cdot 2}{2\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{7}}{3}$.

18. C 3 № 484592. Решите неравенство $\frac{x^4-4x^3+4x^2+8(2x-x^2)+17}{x^2-2x-4}\geq -2$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{(x^2-2x)^2-8(x^2-2x)+16}{x^2-2x-4}+\frac{1}{x^2-2x-4}\geq -2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2-2x-4)^2}{x^2-2x-4}+\frac{1}{x^2-2x-4}\geq -2 \Leftrightarrow x^2-2x-4+\frac{1}{x^2-2x-4}\geq -2.$$

Сделаем замену: $a=x^2-2x-4$.

Получим: $a+\frac{1}{a}\geq -2$, откуда

$$\frac{a^2+2a+1}{a}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a+1)^2}{a}\geq 0.$$

Решая это неравенство, находим: $a=-1$ или $a>0$.

Если $x^2-2x-4=-1$, то $x=3$ или $x=-1$.

Если $x^2-2x-4>0$, то $x<1-\sqrt{5}$ или $x>1+\sqrt{5}$.

Ответ: $3,\ -1,\ (-\infty;\ 1-\sqrt{5}),\ (1+\sqrt{5};\ +\infty)$.

19. C 4 № 484611. В треугольнике ABC, $AB=7$, $BC=9$, $CA=4$. Точка D лежит на прямой BC причем $BD:DC=1:5$. Окружности, вписанные в треугольники ADC и ADB касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение.

Пусть $AD = d$, $BD = x$, $CD = y$. Используя свойства касательных, подсчитаем разными способами периметры треугольников

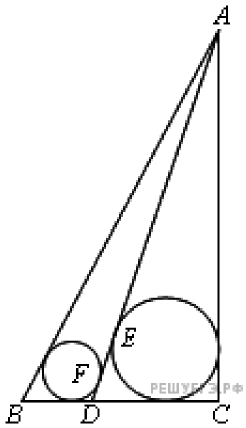
$$P_{ADC} = AE + ED + DC + AC = d + y + 4 = 2DE + 2 \cdot 4.$$

Откуда получаем: $DE = \dfrac{d + y - 4}{2}$. Аналогично, $DF = \dfrac{d + x - 7}{2}$.

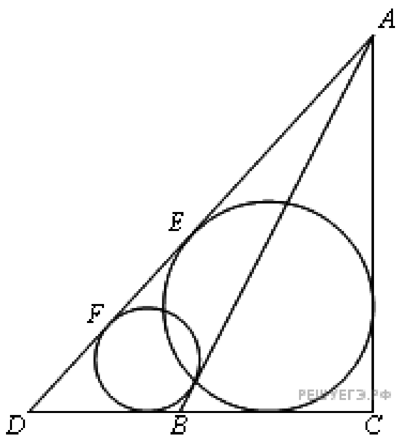
Тогда $EF = |DE - DF| = \left|\dfrac{3 + y - x}{2}\right|$.

Возможны два случая:

1. Точка D лежит на отрезке BC. Тогда $x = 1,5$, $y = 7,5$, значит, $EF = 4,5$.



2. Точка D лежит вне отрезка BC. Тогда $y - x = BC = 9$, значит, $EF = 6$.



Ответ: 4,5 или 6.

20. C 5 № 501070. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x+1} - 3\right| = ax + a - 2$$

на промежутке$(-1;\ +\infty)$ имеет больше двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x)=ax+a-2$ и $g(x)=\left|\frac{5}{x+1}-3\right|$. Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на промежутке $(-1;+\infty)$.

При $a\le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(-1;+\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ &mdash неотрицательны, поэтому при $a\le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $(-1;+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(-1;\frac{2}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(-1;\frac{2}{3}\right]$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{2}{3}\right)\ge g\left(\frac{2}{3}\right)$, откуда получаем $a\cdot\frac{5}{3}-2\ge 0$, то есть $a\ge\frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $ax+a-2=3-\frac{5}{x+1}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2+(2a-5)x+a=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=25-20a$, поэтому при $a>\frac{5}{4}$ это уравнения не имеет корней; при $\mathrm{a}=\frac{5}{4}$ уравнения имеет единственный корень, равный 1; при $0<a<\frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0<a<\frac{5}{4}$, то больший корень $x_2=\frac{5-2a+\sqrt{D}}{2a}>\frac{5-2a}{2a}>1>\frac{2}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1-\frac{2}{3}\right)\left(x_2-\frac{2}{3}\right)=a\left(\frac{2}{3}\right)^2+(2a-5)\cdot\frac{2}{3}+a=\frac{25a-30}{9}>0,\text{то есть } a>\frac{6}{5}.$$

Таким образом, уравнение $\left|\frac{5}{x+1}-3\right|=ax+a-2$ имеет следующее количество корней на промежутке $(-1;+\infty)$:
· нет корней при $a\le 0$;
· один корень при $0<a<\frac{6}{5}$ и при $a>\frac{5}{4}$;
· два корня при $a=\frac{6}{5}$ и при $a=\frac{5}{4}$;
· три корня при $\frac{6}{5}<a<\frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5}<a<\frac{5}{4}$

21. C 6 № 484660. Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны все целые неотрицательные степени некоторого однозначного натурального числа p. В результате получается рациональное число. Найдите это число.

Решение.

Покажем, что p = 0,111...

Действительно, пусть $p > 1$. Предположим, что наименьший период полученного рационального числа равен T. Тогда Tk — тоже период при любом натуральном k. Пусть первый период начинается с некоторой по счету цифры, принадлежащей десятичной записи степени p^m. Возьмем период такой длины Tk, чтобы эта длина была больше, чем длина записи p^m.

В записи числа p^{m+1} цифр столько же, сколько в p^m или на одну больше. Аналогично, число p^{m+2} длиннее, чем p^m не более, чем на две цифры и так далее. Значит, можно найти такую степень $p^n > p^m$, что $n = Tk$.

Цифры числа p^n занимают весь период — группу длиной Tk. Тогда в записи следующего числа p^{n+1} первые с Tk цифры тоже образуют период и должны повторять цифры числа p^n.

Получается, что либо $p^{n+1} = p^n$, либо $p^{n+1} = 10p^n + \alpha$, где α — какое-то однозначное число. Последнее равенство невозможно, так как

$$p^{n+1} \leq 9p^n.$$

Следовательно, верно $p^{n+1} = p^n$, откуда $p = 1$. Десятичная дробь имеет вид

$$0,111\ldots = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.