Вариант № 2887060

1. B 1 № 77334. В обменном пункте 1 гривна стоит 3 рубля 70 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на гривны и купили 3 кг помидоров по цене 4 гривны за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

Решение.

За 3 кг помидоров отдыхающие заплатили $4 \cdot 3 = 12$ гривен. Значит, в рублях они заплатили: $12 \cdot 3{,}7 = 44{,}4$ рубля. Округляем до целого числа, получаем 44.

Ответ: 44.

2. B 2 № 26620. Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 750 рублей после понижения цены на 10%?

Решение.

После понижения цены тетрадь станет стоить $40 - 0{,}1 \cdot 40 = 36$ рублей. Разделим 750 на 36:

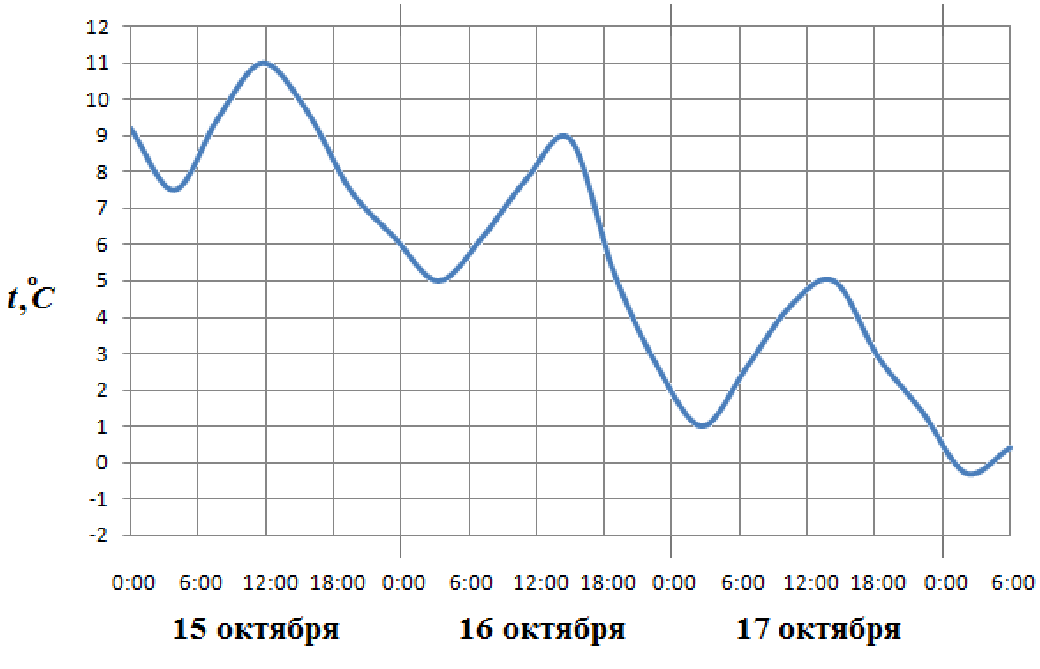
$$\frac{750}{36} = \frac{125}{6} = \frac{120+5}{6} = \frac{120}{6} + \frac{5}{6} = 20\frac{5}{6}.$$

Значит, можно будет купить 20 тетрадей.

Ответ: 20.

3. B 3 № 77243.

На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурами воздуха 16 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение.

Из графика видно, что 16 октября наибольшая температура составляла 9 °C, а наименьшая 2 °C. Их разность составляет 7 °C.

Ответ: 7.

4. B 4 № 26673. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	2,5 руб. за 1 Мб
План «500»	550 руб. за 500 Мб трафика в месяц	2 руб. за 1 Мб сверх 500 Мб
План «800»	700 руб. за 800 Мб трафика в месяц	1,5 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб

Пользователь предполагает, что его трафик составит 600 Мб в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 600 Мб?

Решение.

Рассмотрим все варианты.

По Плану «0» пользователь потратит $2{,}5 \cdot 600 = 1500$ руб. в месяц за 600 Мб трафика.

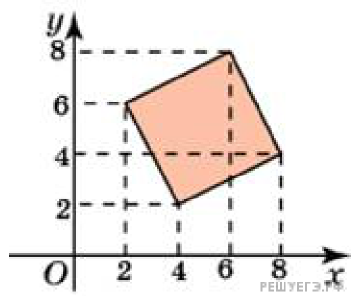
По плану «500» он потратит 550 руб. абонентской платы за 500 Мб и $2 \cdot 100 = 200$ руб. сверх того. Поэтому полная плата в месяц составит $550 + 200 = 750$ руб.

По плану «800» пользователь потратит в месяц за 600 Мб трафика 700 руб.

Наиболее выгодный вариант составляет 700 руб.

Ответ: 700.

5. B 5 № 27701. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (4; 2), (8; 4), (6; 8), (2; 6).



Решение.

Четырехугольник является квадратом. Площадь квадрата равна квадрату его стороны. Сторона квадрата равна $\sqrt{(8-4)^2+(4-2)^2}=\sqrt{20}$, тогда площадь квадрата $S=20$.

Ответ: 20.

6. B 6 № 320196. При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.

Решение.

По условию, диаметр подшипника будет лежать в пределах от 66,99 до 67,01 мм с вероятностью 0,965. Поэтому искомая вероятность противоположного события равна 1 − 0,965 = 0,035.

Ответ: 0,035.

7. B 7 № 11649. Найдите корень уравнения: $\sqrt{59-x}=8$.

Решение.

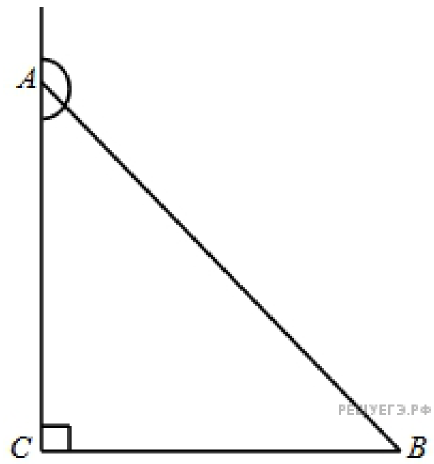
Возведем в квадрат:

$$\sqrt{59-x}=8 \Leftrightarrow 59-x=64 \Leftrightarrow x=-5.$$

Ответ: −5.

8. B 8 № 27409.

В треугольнике ABC угол C равен 90°, тангенс внешнего угла при вершине A равен $-\dfrac{4\sqrt{33}}{33}$, $AB=7$. Найдите BC.



Решение.

$$BC=AB\cdot\sin A=AB\cdot\sqrt{\frac{1}{1+ctg^2\angle BAC}}=7\sqrt{\frac{1}{1+\frac{33}{16}}}=4.$$

Ответ: 4.

9. B 9 № 119973. Прямая $y=-5x+8$ является касательной к графику функции $28x^2+bx+15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Решение.

Условие касания графика функции $y=f(x)$ и прямой $y=kx+l$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x)=k, \\ f(x)=kx+l. \end{cases}$$

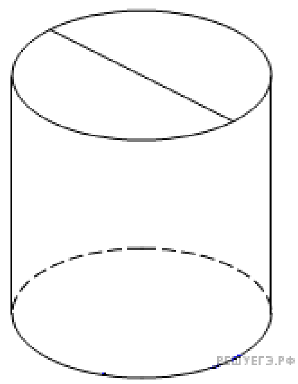
В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 56x+b=-5, \\ 28x^2+bx+15=-5x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5-56x, \\ 28x^2+(-5-56x)x+15=-5x+8 \end{cases} \begin{cases} b=-5-56x, \\ x^2=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

По условию абсцисса точки касания положительна, поэтому x=0,5, откуда b=−33.

Ответ: −33.

10. B 10 № 925. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 21π, а диаметр основания равен 7. Найдите высоту цилиндра.



Решение.
высота цилиндра равна

$$h = \frac{S_{бок}}{2\pi R} = \frac{S_{бок}}{\pi D} = \frac{21\pi}{7\pi} = 3.$$

Ответ: 3.

11. B 11 № 26763. Найдите значение выражения $-18\sqrt{2}\sin(-135^\circ)$.

Решение.
Выполним преобразования:

$$-18\sqrt{2}\sin(-135^\circ) = -18\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 18.$$

Ответ: 18.

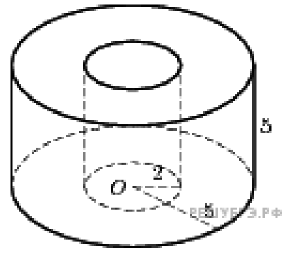
12. B 12 № 28011. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M}v\cos\alpha$ (м/с), где $m = 80$ кг – масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг – масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,25 м/с?

Решение.
Задача сводится к решению неравенства $u \geq 0,25$ на интервале $(0^\circ;\quad 90^\circ)$ при заданных значениях массы скейтбордиста $m = 80$ кг и массы платформы $M = 400$ кг:

$$u \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{m}{m+M}v\cos\alpha \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{80}{80+400}\cdot 3\cdot\cos\alpha \geq 0{,}25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos\alpha \geq \frac{1}{4} \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 0^\circ < \alpha \leq 60^\circ.$$

Ответ: 60.

13. B 13 № 27201. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π.



Решение.

Объем данной фигуры равен разности объемов цилиндра с радиусом основания 5 и высотой 5 и цилиндра с той же высотой и радиусом основания 2:

$$V = \pi H(R_1^2 - R_2^2) = 5\pi(25-4) = 105.$$

Ответ: 105.

14. B 14 № 99569. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рублей.

Решение.

Пусть цена холодильника ежегодно снижалась на p процентов в год. Тогда за два года она снизилась на $(1-0,01p)^2$, откуда имеем:

$$20000(1-0,01p)^2 = 15842 \Leftrightarrow (1-0,01p)^2 = 0,7921 \Leftrightarrow$$

$$\underset{1-0,01p>0}{\Leftrightarrow} 1-0,01p = 0,89 \Leftrightarrow p = 11.$$

Ответ: 11.

15. B 15 № 26701. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\sin x + \frac{24}{\pi}x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции: $y' = 5\cos x + \frac{24}{\pi}$. Уравнение $y' = 0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей.

Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 5\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{24}{\pi}\frac{5\pi}{6} + 6 = -16,5.$$

Ответ: −16,5.

16. C 1 № 501484. а) Решите уравнение: $6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi, -\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

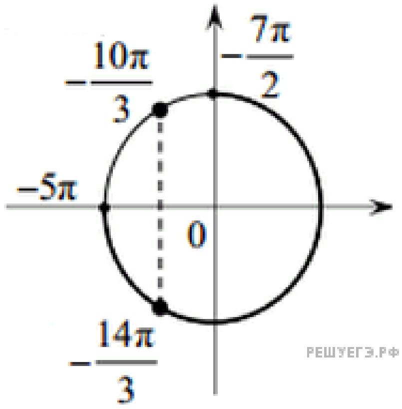
а) Запишем уравнение в виде:

$$6-6\cos^2 x+5\cos x-2=0;\ 6\cos^2 x-5\cos x-4=0;\ (3\cos x-4)(2\cos x+1)=0.$$

Значит, или $\cos x=\frac{4}{3}$, — уравнение не имеет корней, или $\cos x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим число $\frac{-14\pi}{3}$.



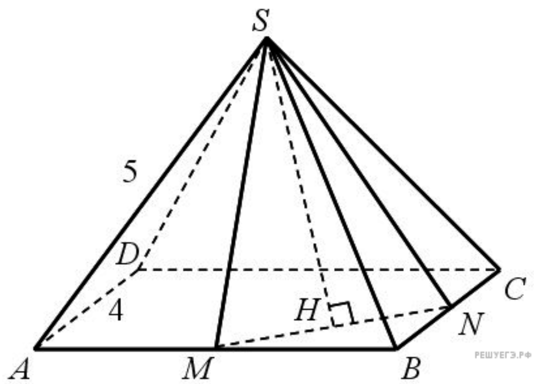
Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а)$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$, б) $\frac{-14\pi}{3}$.

17. C 2 № 500643. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 5, а сторона основания равна 4.

Решение.

Пусть M — середина AB, а N — середина BC. Тогда площадь сечения равна площади треугольника SMN. Найдем последовательно SM, SN и $MN.SM$ и SN — медианы треугольников SAB и SBC соответственно. Так как эти треугольники равнобедренные (поскольку пирамида правильная),



$$SM=SN=\sqrt{SB^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=\sqrt{SB^2-\left(\frac{1}{2}BC\right)^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}.$$

Найдем теперь MN из прямоугольного треугольника MBN. В нем катеты равны 2. Гипотенуза MN, по теореме Пифагора, будет равна $2\sqrt{2}$.

Теперь найдем площадь равнобедренного треугольника SMN. Для этого проведем высоту SH, которая, по теореме Пифагора, равна $\sqrt{19}$, и вычислим площадь:

$$S=\frac{1}{2}\cdot SH\cdot MN=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{19}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{38}.$$

Ответ: $\sqrt{38}$.

18. C 3 № 485936. Решите систему неравенств $\begin{cases}\frac{2x^2-2x+1}{2x-1}\le 1,\\ 25x^2-3\left|3-\ 5x\right|<30x-9.\end{cases}$

Решение.

Преобразуем первое неравенство:

$$\frac{2x^2-2x+1-2x+1}{2x-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{2x-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2x-1} \le 0.$$

Решения неравенства: $x=1$ или $x<\frac{1}{2}$.

Преобразуем второе неравенство:

$$25x^2-30x+9-3|3-5x|<0 \Leftrightarrow (5x-3)^2-3|3\ -\ 5x|<0.$$

Сделав замену $t=|3-5x|$, получаем неравенство $t^2-3t<0$, откуда $0<t<3$,

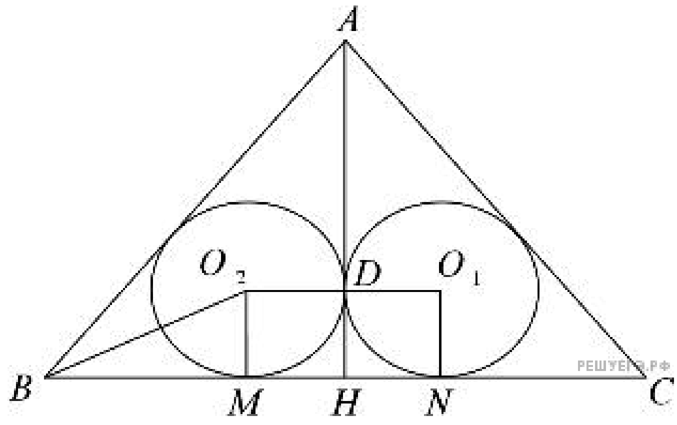
Тогда: $0<|5x-3|<3$, откуда $0<x<\frac{3}{5}$ или $\frac{3}{5}<x<\frac{6}{5}$.

Решение системы неравенств: $0<x<\frac{1}{2}$ или $x=1$.

Ответ: $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$.

19. C 4 № 500066. Дан треугольник со сторонами 26, 26 и 20. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Решение.



Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC = 26$, $BC = 20$. Пусть AH — высота треугольника ABC. Тогда H — середина BC.

Обозначим $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$. Тогда $\cos\alpha = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{5}{13}$, $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{12}{5}$.

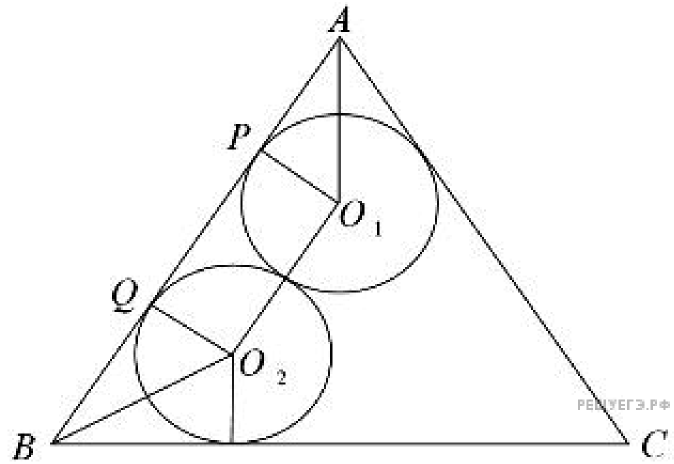
Предположим, что окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол ACB и касается основания BC в точке N, а окружность того же радиуса с центром O_2 вписана в угол ABC, касается основания BC в точке M, а первой окружности — в точке D. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому $\angle O_2BM = \dfrac{\alpha}{2}$, а $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2}{3}$.

Из прямоугольного треугольника BMO_2 находим:

$BM = O_2M \cdot \operatorname{ctg}\angle MBO_2 = r \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{a}{2} = \dfrac{3}{2}r$. Тогда $CN = BM = \dfrac{3}{2}r$.

Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $O_1O_2 = 2r$, значит, $MN = O_1O_2 = 2r$, поскольку O_1O_2MN — прямоугольник. Следовательно,

$20 = BC = BM + MN + CN = \dfrac{3}{2}r + 2r + \dfrac{3}{2}r = 5r$, откуда находим $r = 4$.



Пусть теперь окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол BAC и касается боковой стороны AB в точке P, вторая окружность радиуса r с центром O_2 вписана в угол ABC, касается боковой стороны AB в точке Q, а также касается первой окружности.

Из прямоугольных треугольников APO_1 и BQO_2 находим:

$$AP = O_1P \cdot \operatorname{ctg}\angle PAO_1 = r \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}r,$$

$$BQ = O_2Q \cdot \operatorname{ctg}\angle QBO_2 = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}r,$$

Следовательно, $26 = AB = AP + PQ + QB = AP + O_1O_2 + QB = \dfrac{12}{5}r + 2r + \dfrac{3}{2}r = \dfrac{59}{10}r$,

откуда находим $r = \dfrac{260}{59}$.

В случае, когда окружности вписаны в углы BAC и ACB, получим тот же результат.

Ответ: 4 или $\dfrac{260}{59}$.

20. C 5 № 484646. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 - 2x + |y| - 15 = 0, \\ x^2 + (y-a)(y+a) = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

имеет ровно 6 решений.

Решение.

Преобразуем систему: $\begin{cases}(x-1)^2+|y|=16,\\(x-1)^2+y^2=a^2.\end{cases}$

Первое уравнение задает части двух парабол:

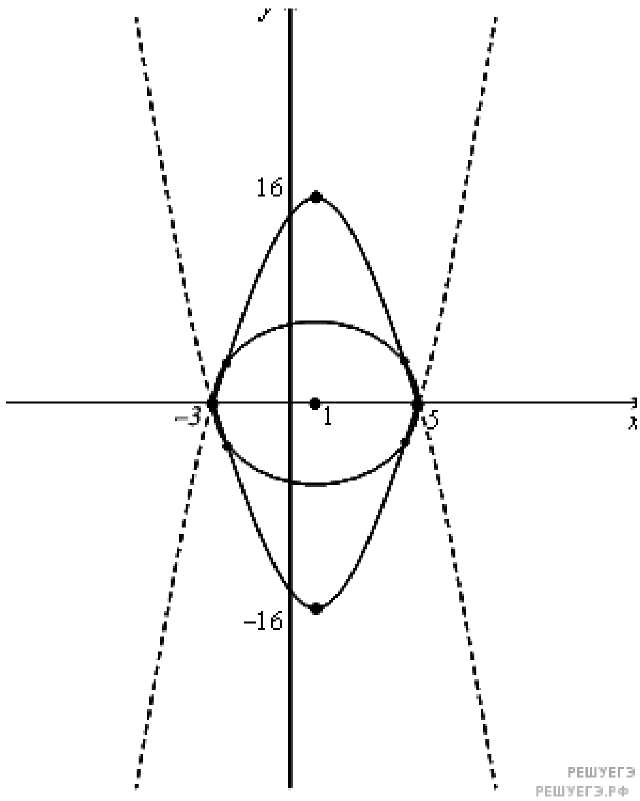
$y=\begin{cases}16-(x-1)^2,\ y\geq 0,\\(x-1)^2-16,\ y<0.\end{cases}$

(см. рисунок).

Второе уравнение задает окружность радиусом $|a|$ с центром $(1,0)$. На рисунке видно, что шесть решений системы получаются, только если окружность проходит через точки $(-3,0)$ и $(5,\ 0)$, пересекая параболу еще в четырех точках.

При этом радиус окружности равен 4, откуда $a=-4$ или $a=4$.

Ответ: $-4, 4$.



21. C 6 № 500005. На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т.д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?
б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?
в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

Решение.

а) Заметим, что каждое число на доске будет делиться на 7. Действительно, исходное число делится на 7, в случае удвоения числа делящегося на 7, получится число, делящееся на 7. А при сложении чисел, делящихся на 7, также получится число, делящееся на 7. Таким образом, все числа на доске будут делиться на 7, а 2012 на 7 не делится, следовательно, оно не может появиться на доске.

б) Да, может. Пример: 7, 14 (удвоенное число 7), 14 (удвоенное число 7), 14 (удвоенное число 7), 14 (удвоенное число 7). Сумма полученных 5 чисел равна 63.

Замечание. В условии не сказано, что одно число нельзя удваивать несколько раз.

в) Как было замечено в пункте а), все числа на доске будут делиться на 7. Рассмотрим аналогичную задачу, разделив исходное число 7 и то число, которое нужно получить, то есть 784, на 7. От этого количество операций не изменится. Таким образом, достаточно за наименьшее количество операций получить число 112, начав с числа 1.

Заметим, что наибольшее число, которое может получиться на доске через 6 минут, равно 64 (если Вася каждый раз будет удваивать текущее наибольшее число). Следовательно, если в первые 6 минут Вася каждый раз удваивал наибольшее число на доске, то число 112 нельзя получить за 7 минут: если число 64 удвоить, то получится 128, а если прибавить к нему число, не превосходящее 32, то 112 не получится.

В том случае, если в течение первых 6 минут Вася использовал хотя бы одно сложение вместо удвоения, то при первом использовании сложения наибольшее число, записанное на доске увеличилось не более, чем в полтора раза: действительно, в этом случае самый большой результат получится тогда, когда мы к максимальному на данный момент числу прибавим второе по величине, то есть, его половину (напомним, что мы рассматриваем первый случай сложения, то есть до этого были только удвоения). Таким образом, даже если в течение первых 7 минут сделано 6 удвоений и одно сложение (в некотором порядке), то наибольшее число, которое может получиться, равно 96, что меньше 112.

Итак, за 7 минут число 112 получить невозможно.

Приведем пример, как его получить за 8 минут:

$$1 \to 1, 2 \to 1, 2, 4 \to 1, 2, 4, 8 \to 1, 2, 4, 8, 16 \to 1, 2, 4, 8, 16, 32 \to 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \to$$
$$\to 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 96\,(96 = 64 + 32) \to 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 96, 112\,(112 = 96 + 16).$$

Ответ: а) нет; б) да; в) 8 минут.