Вариант № 2887208

1. B 1 № 314867. В квартире, где проживает Алексей, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 103 куб. м воды, а 1 октября — 114 куб. м. Какую сумму должен заплатить Алексей за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 19 руб. 20 коп.? Ответ дайте в рублях.

Решение.

Расход воды составил $114 - 103 = 11$ куб. м. Поэтому Алексей должен заплатить $11 \cdot 19{,}2 = 211{,}2$ руб.

Ответ: 211,2.

2. B 2 № 77355. Студент получил свой первый гонорар в размере 700 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет тюльпанов для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество тюльпанов сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, тюльпаны стоят 60 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

Решение.

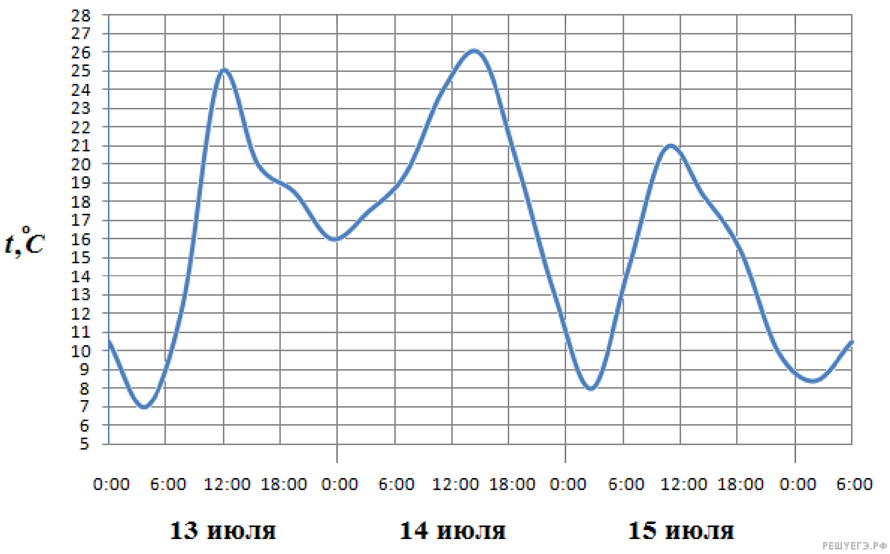
Налог составит $700 \cdot 0{,}13 = 91$ рубль. После выплаты налога останется $700 - 91 = 609$ рублей. Разделим 609 на 60:

$$\frac{609}{60} = 10\frac{9}{60} = 10\frac{3}{20}.$$

Значит, денег хватает на 10 тюльпанов. В букете должно быть нечетное число цветов, поэтому студент купит 9 тюльпанов.

Ответ: 9.

3. B 3 № 26870. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 15 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение.

Из графика видно, что 15 июля наибольшая температура составляла 21 °C, а наименьшая 8 °C. Их разность составляет 13 °C.

Ответ: 13.

4. B 4 № 316047. Автомобильный журнал определяет рейтинги автомобилей на основе показателей безопасности S, комфорта C, функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей автомобилей.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3	5	2	5	2
Б	4	2	4	1	5
В	5	3	4	5	2

Решение.

Рассмотрим все варианты.

Модель А: $R = \dfrac{9+10+4+10+2}{50} = \dfrac{35}{50} = 0,7.$

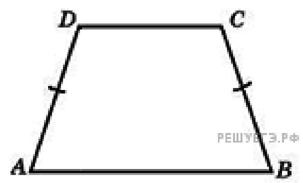
Модель Б: $R = \dfrac{12+4+8+2+5}{50} = \dfrac{31}{50} = 0,62.$

Модель В: $R = \dfrac{15+6+8+10+2}{50} = \dfrac{41}{50} = 0,82.$

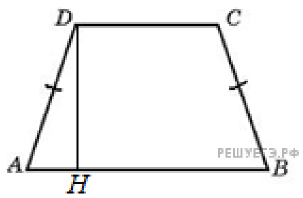
Тем самым, наивысший рейтинг имеет имеет модель В, он равен 0,82

Ответ: 0,82.

5. B 5 № 27632. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а ее площадь равна 40. Найдите периметр трапеции.



Решение.



$$S_{ABCD} = \frac{(AB+CD)\cdot DH}{2} \Leftrightarrow DH = \frac{2S_{ABCD}}{AB+CD} = \frac{80}{20} = 4.$$

Трапеция равнобедренная, значит,

$$AD = \sqrt{DH^2 + AH^2} = \sqrt{DH^2 + \left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2} = \sqrt{16+9} = 5,$$

Откуда $P_{ABCD} = 2AD + AB + CD = 30.$

Ответ: 30.

6. B 6 № 320173. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение.

Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью 0,8, он промахивается с вероятностью 1 − 0,8 = 0,2. События попасть или промахнуться при каждом выстреле независимы, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей. Тем самым, вероятность события «попал, попал, попал, промахнулся, промахнулся» равна

$$0,8\cdot 0,8\cdot 0,8\cdot 0,2\cdot 0,2 = 0,02048 \approx 0,02.$$

Ответ: 0,02.

7. B 7 № 77375. Решите уравнение $\sqrt{6+5x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{6+5x}=x \Leftrightarrow \begin{cases} 6+5x=x^2, \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-6=0, \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=6, \end{array} \right. \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

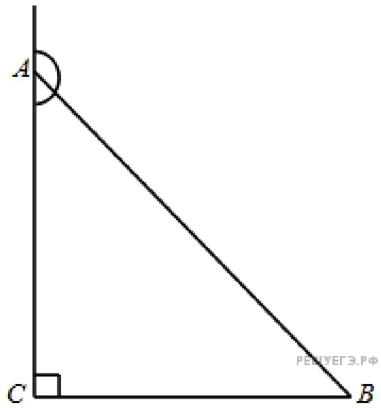
Уравнение имеет единственный корень, он и является ответом.

Ответ: 6.

Примечание.

Можно было сделать проверку. Подставляя число 6, получаем верное равенство $\sqrt{6+5\cdot 6}=6$, поэтому число 6 является корнем. Подставляя число −1, получаем неверное равенство $\sqrt{6+5\cdot(-1)}=-1$, поэтому число −1 не является корнем.

8. B 8 № 27389. В треугольнике ABC угол C равен 90°, синус внешнего угла при вершине A равен $\frac{7}{25}$. Найдите $\sin B$.



Решение.

так как

$$\cos A=\frac{CA}{AB}=\sin B,$$

имеем

$$\sin A_{\text{внеш}}=\sin A=\frac{7}{25}.$$

$\sin B=\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{49}{625}}=\frac{24}{25}=0,96.$

Ответ: 0,96.

9. B 9 № 27486. Прямая $y=-4x-11$ является касательной к графику функции $y=x^3+7x^2+7x-6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

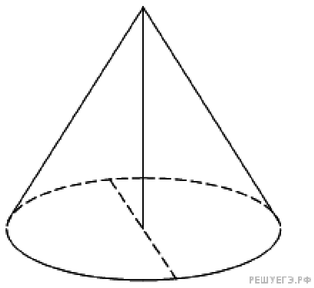
В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 3x^2 + 14x + 7 = -4, \\ x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 14x + 11 = 0, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{11}{3}, \\ x = -1, \end{array} \right. \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \ (*). \end{cases}$$

Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания −1.

Ответ: −1.

10. B 10 № 910. Высота конуса равна 12, а диаметр основания – 10. Найдите образующую конуса.



Решение.

образующая конуса по теореме Пифагора равна

$$l = \sqrt{h^2 + R_{\text{осн}}^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{D_{\text{осн}}}{2}\right)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13.$$

Ответ: 13.

11. B 11 № 26896. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13} = \frac{\frac{1}{2}\log_6 13}{\log_6 13} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

12. B 12 № 27979. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 55$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, дается формулой $U = \dfrac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 50 В? Ответ выразите в Омах.

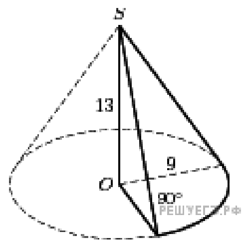
Решение.

Задача сводится к решению неравенства $U \geq 50$ В при известных значениях внутреннего сопротивления $r = 0,5$ Ом, ЭДС $\varepsilon = 55$ В:

$$U \geq 50 \Leftrightarrow \frac{55R}{R + 0,5} \geq 50 \Leftrightarrow R \geq 5 \text{ Ом}.$$

Ответ: 5.

13. B 13 № 27202. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π.



Решение.

Объем данной части конуса равен

$$\frac{90^\circ}{360^\circ}\frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{12}9^2 \cdot 13\pi = 87,75\pi.$$

Ответ: 87,75.

14. B 14 № 99578. Имеются два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй – 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Решение.

Пусть концентрация первого раствора кислоты – c_1, а концентрация второго – c_2. Если смешать эти растворы кислоты, то получится раствор, содержащий 68% кислоты: $30c_1 + 20c_2 = 50 \cdot 0,68$. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты: $mc_1 + mc_2 = 2m \cdot 0,7$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1,4, \\ 30c_1 + 20c_2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 1,4 - c_1, \\ 30c_1 + 28 - 20c_1 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 1,4 - c_1, \\ 10c_1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 0,8, \\ c_1 = 0,6. \end{cases}$$

Поэтому $m_1 = 0,6 \cdot 30 = 18$.

Ответ: 18.

15. B 15 № 77427. Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$.

Решение.

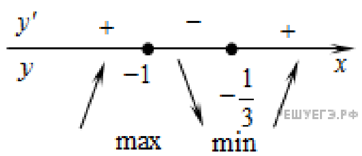
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 + 4x + 1.$$

Найдем нули производной:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -\frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -1$.

Ответ: −1.

16. C 1 № 501395. а) Решите уравнение $\sin x(2\sin x - 3\operatorname{ctg} x) = 3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

Область определения данного уравнения задается условием $\sin x \neq 0.$ $(*)$

При этом условии имеем: $\sin x(2\sin x - 3\operatorname{ctg} x) = 3 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\cos x = 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$, откуда $\cos x = -1$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Корни уравнения $\cos x = -1$ не удовлетворяют условию $(*)$, а из уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ получаем $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$

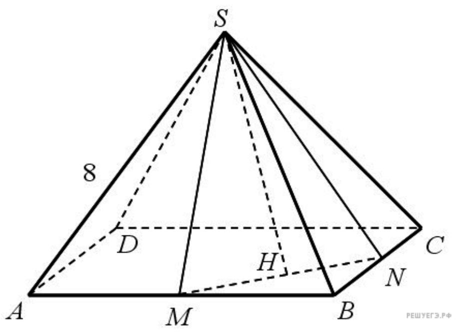
Из найденных решений промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат числа $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$.

17. C 2 № 500639. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины ребер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если все ребра пирамиды равны 8.

Решение.

Пусть M — середина AB, а N — середина BC. Тогда площадь сечения равна площади треугольника SMN. Найдем последовательно SM, MN и SN.



SM и SN — медианы треугольников SAB и SBC соответственно. Т. к. эти треугольники равносторонние (поскольку все ребра пирамиды одинаковой длины),

$$SM = SN = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 4\sqrt{3}.$$

Найдем теперь MN из прямоугольного треугольника MBN. В нем катеты равны 4. Гипотенуза MN, по теореме Пифагора, будет равна $4\sqrt{2}$.

Теперь найдем площадь равнобедренного треугольника SMN. Для этого проведем высоту SH, по теореме Пифагора равную $2\sqrt{10}$, и вычислим площадь:

$$S = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{5}.$$

Ответ: $8\sqrt{5}$.

18. C 3 № 501217. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2 \cdot 25^x - 5^{x+1} + 2 \leq 0, \\ \left(x^2+1\right)^{\lg\left(7x^2-3x+1\right)} + \left(7x^2-3x+1\right)^{\lg\left(x^2+1\right)} \leq 2. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим первое неравенство системы.

Положим $t = 5^x$. Тогда неравенство принимает вид $2t^2 - 5t + 2 \le 0$, откуда $\frac{1}{2} \le t \le 2$. Таким образом, $2^{-1} \le 5^x \le 2 \Leftrightarrow -\log_5 2 \le x \le \log_5 2$.

Рассмотрим второе неравенство системы.

Так как $x^2+1>0$ и $7x^2-3x+1>0$ для любого $x \in \mathbb{R}$, воспользовавшись тождеством $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ и методом интервалов, получаем:

$$(x^2+1)^{\lg(7x^2-3x+1)} + (7x^2-3x+1)^{\lg(x^2+1)} \le 2 \Leftrightarrow (x^2+1)^{\lg(7x^2-3x+1)} \le 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lg\left((x^2+1)^{\lg(7x^2-3x+1)}\right) \le \lg 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg(7x^2-3x+1)\lg(x^2+1) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{3}{7}.$$

Сравним числа $a = \log_5 2$ и $b = \frac{3}{7}$. Имеем $7a = 7\log_5 2 = \log_5 2^7 = \log_5 128 > 3 = 7b$, а, значит, $a > b$, т. е., $\log_5 2 > \frac{3}{7}$, откуда и получаем решение данной системы $0 \le x \le \frac{3}{7}$.

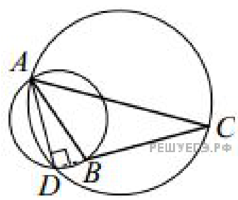
Ответ: $\left[0; \frac{3}{7}\right]$.

19. C 4 № 502025.

Угол C треугольника ABC равен 30°, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $BD{:}DC$ = 1:3. Найдите синус угла A.

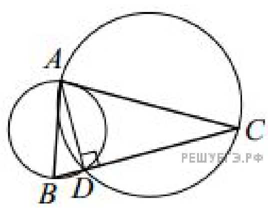
Решение.

Пусть $BD = x$, тогда по условию $DC = 3x$. Поскольку D — точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах, $\angle ADB = \angle ADC = 90°$, значит, точки B, C и D лежат на одной прямой.



В прямоугольном треугольнике ACD угол $\angle C = 30°$, откуда $AD = \sqrt{3}x$. В прямоугольном треугольнике ABD $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 2x$.

Возможны два случая. Первый случай: угол ABC тупой (рис. 1), тогда точка B лежит между точками D и C, значит, $BC = DC - BD = 2x$. В треугольнике ABC имеем $AB = BC = 2x$, значит, он равнобедренный с основанием AC, следовательно, $\angle A = \angle C = 30°$, откуда $\sin A = \frac{1}{2}$.



Второй случай: угол ABC острый (рис. 2), тогда точка D лежит между точками B и C, значит, $BC = DC + BD = 4x$.

По теореме синусов для треугольника ABC:

$$\frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin A}{BC}, \text{ откуда } \sin A = \frac{BC \cdot \sin 30°}{AB} = 1.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$ или 1.

20. C 5 № 501050. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{1-2a\sqrt{1+x^2}+a\left(1+x^2\right)}{(1+x^2)-2\sqrt{1+x^2}}=3$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Поделим числитель и знаменатель дроби на $1+x^2$.

$$\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{2a}{\sqrt{1+x^2}}+a}{1-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}}=3.$$

Сделаем замену $z=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$:

\frac{z^2-2az+a}{1-2z}=3.

$1+x^2\geq 1$, поэтому $0<z\leq 1$.

Задачу можно сформулировать так: найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $\dfrac{z^2-2az+a}{1-2z=3}$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0<z\leq 1$.

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} z^2-2az+a=-6z+3, \\ z\neq 0,5, \\ 0<z\leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2-2(a-3)z+a-3=0, \\ z\neq 0,5, \\ 0<z\leq 1. \end{cases}$$

Заметим, что ни при одном значении а число $z=0,5$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим функцию $f(z)=z^2-2(a-3)z+a-3$. Её график — парабола, ветви которой направлены вверх. Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий:

1) Трёхчлен имеет два различных корня, и только больший из них лежит на промежутке (0; 1]) (см.рис. 1), то есть $\begin{cases} f(0)<0, \\ f(1)\geq 0. \end{cases}$

2) Трёхчлен имеет два различных корня, и только меньший из них лежит на промежутке (0; 1]) (см.рис. 2), то есть $\begin{cases} f(0)>0, \\ f(1)\leq 0. \end{cases}$

3) Трёхчлен имеет два корня,возможно, совпадающих, и оба лежат на промежутке (0; 1])(см.рис. 3), то есть $\begin{cases} f(0)>0, \\ f(1)\geq 0, \quad \text{где } z_0 \text{ — абсцисса вершины параболы.} \\ f(z_0)\leq 0. \end{cases}$

Эти условия соответствуют следующим способам расположения графика функции $f(z)$:

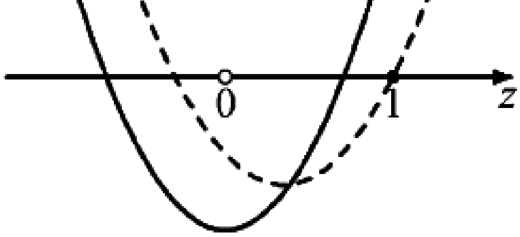


Рис. 1

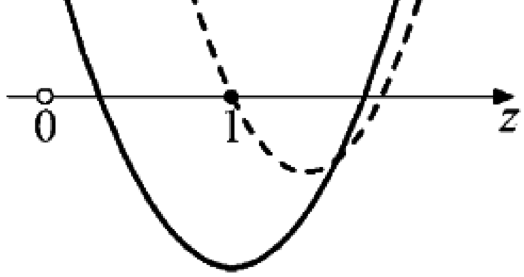


Рис. 2

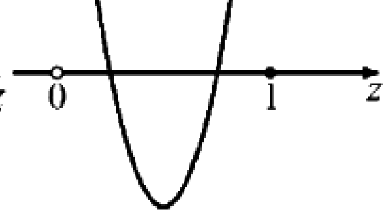


Рис. 3

Решим систему: $\begin{cases} a-3<0, \\ 1-a+3\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<3, \\ a\leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow a<3.$

Решим систему: $\begin{cases} a-3>0, \\ 1-a+3\leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>3, \\ a\geq 4; \end{cases} \Leftrightarrow a\geq 4.$

Решим систему: $\begin{cases} a-3>0, \\ 1-2(a-3)+a-3\geq 0, \\ (a-3)^2-2(a-3)^2+a-3\leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>3, \\ a\leq 4, \\ a\geq 4, \end{cases}$ откуда $a=4.$

Ответ: $a<3, a\geq 4.$

21. С 6 № 500371. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{3}{7}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков МОГЛО быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Решение.

а) Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 7 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 11 или больше. Тогда девочек было 9 или меньше. Театр посетило не более 3 мальчиков, поскольку если бы их было 3 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{4}{4+9}=\frac{4}{13}$, что больше $\frac{3}{11}$. Аналогично, кино посетило не более 7 мальчиков, поскольку $\frac{8}{8+9}=\frac{8}{17}>\frac{3}{7}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 10.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Нулем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию

$$\frac{m_1}{m_1+d}\le\frac{3}{11},\frac{m_2}{m_2+d}\le\frac{3}{7},$$

значит, $\frac{m_1}{d}\le\frac{3}{8},\frac{m_2}{d}\le\frac{3}{4}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\le\frac{9}{8}$, поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\ge\frac{1}{\frac{9}{8}+1}=\frac{8}{17}.$$

Если группа состоит из 3 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 8 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{8}{17}$.

Ответ: а) да: б) 10; в) $\frac{8}{17}$.