Вариант № 2887222

1. B 1 № 314867. В квартире, где проживает Алексей, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 103 куб. м воды, а 1 октября — 114 куб. м. Какую сумму должен заплатить Алексей за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 19 руб. 20 коп.? Ответ дайте в рублях.

Решение.

Расход воды составил $114 - 103 = 11$ куб. м. Поэтому Алексей должен заплатить $11 \cdot 19{,}2 = 211{,}2$ руб.

Ответ: 211,2.

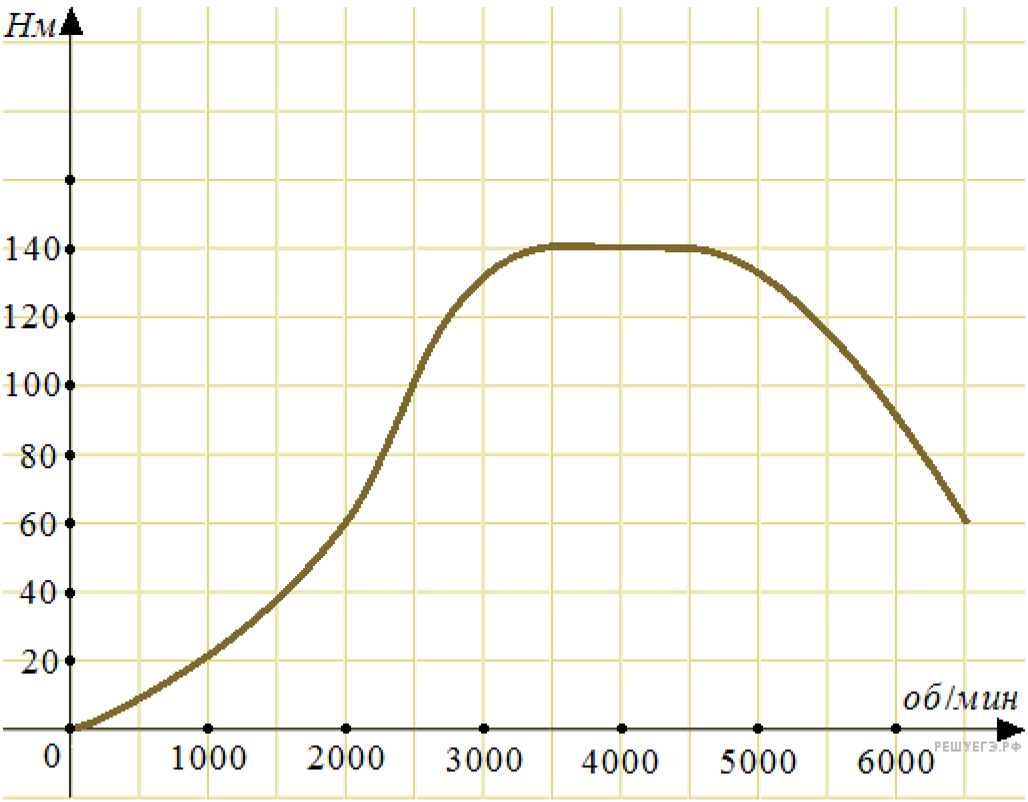
2. B 2 № 26631. В городе N живет 200000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых жителей 45% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых жителей работает?

Решение.

Численность детей в городе N составляет $200000 \cdot 0{,}15 = 30000$. Численность взрослого населения $200\,000 - 30\,000 = 170\,000$ человек. Из них не работает $170000 \cdot 0{,}45 = 76500$ человек. Значит, работает $170\,000 - 76\,500 = 93\,500$ человек.

Ответ: 93 500.

3. B 3 № 26864. На графике изображена зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту. На оси ординат — крутящий момент в Н · м. Чтобы автомобиль начал движение, крутящий момент должен быть не менее 60 Н · м. Какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение?



Решение.

Из графика видно, что крутящий момент 60 Н · м достигается при 2000 оборотов двигателя в минуту (см. рисунок).

Ответ: 2000.

4. B 4 № 26675. Для остекления музейных витрин требуется заказать 20 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,25 $м^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 $м^2$)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	300	17	
Б	320	13	
В	340	8	При заказе на сумму больше 2500 руб. резка бесплатно.

Решение.

Общая площадь стекла, которого нужно изготовить равна $20 \cdot 0{,}25 = 5$ $м^2$.

Стоимость заказа в фирме *А* складывается из стоимости стекла $300 \cdot 5 = 1500$ руб. и стоимости его резки и шлифовки $17 \cdot 20 = 340$ руб. Всего 1840 руб.

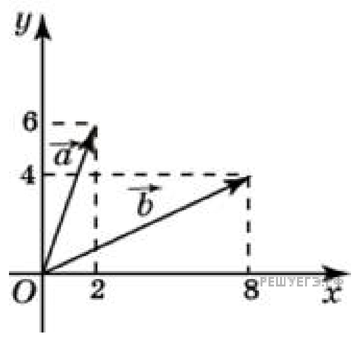
Стоимость заказа в фирме *Б* складывается из стоимости стекла $320 \cdot 5 = 1600$ руб. и стоимости его резки и шлифовки $13 \cdot 20 = 260$ руб. Всего 1860 руб.

Стоимость заказа в фирме *В* складывается из стоимости стекла $340 \cdot 5 = 1700$ руб. и стоимости его резки и шлифовки $8 \cdot 20 = 160$ руб. Всего 1860 руб.

Стоимость самого дешевого заказа составляет 1840 рублей.

Ответ: 1840.

5. B 5 № 27730. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



Решение.

Координаты вектора равны разности координат конца вектора и его начала. Находим: $\vec{a} = (2;6), \vec{b} = (8;4)$. Координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат, поэтому $\vec{a} + \vec{b} = (2+8;6+4) = (10;10)$. Сумма координат вектора равна 20.

Ответ: 20.

6. B 6 № 320175. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение.

Найдем вероятность того, что перегорят обе лампы. Эти события независимые, вероятность их произведения равно произведению вероятностей этих событий: 0,3·0,3 = 0,09.

Событие, состоящее в том, что не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное. Следовательно, его вероятность равна 1 − 0,09 = 0,91.

Ответ: 0,91.

7. B 7 № 39007.

Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+4}=3$.

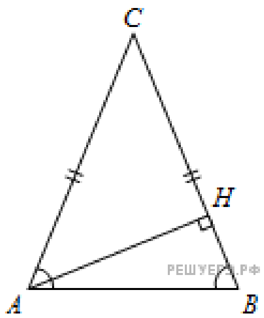
Решение.

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$\sqrt[3]{x+4}=3 \Leftrightarrow x+4=27 \Leftrightarrow x=23.$$

Ответ: 23.

8. B 8 № 27321. В треугольнике ABC $AC=BC$, AH – высота, $AB=5$, $\sin BAC=\frac{7}{25}$. Найдите BH.



Решение.

Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании.

$$BH=AB\cos\angle ABH=AB\cos\angle BAC=AB\sqrt{1-\sin^2\angle BAC}=$$

$$=5\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2}=5\cdot\frac{24}{25}=4,8.$$

Ответ: 4,8.

9. B 9 № 119974. Прямая $y=3x+4$ является касательной к графику функции $3x^2-3x+c$. Найдите c.

Решение.

Условие касания графика функции $y=f(x)$ и прямой $y=kx+b$ задаётся системой требований:

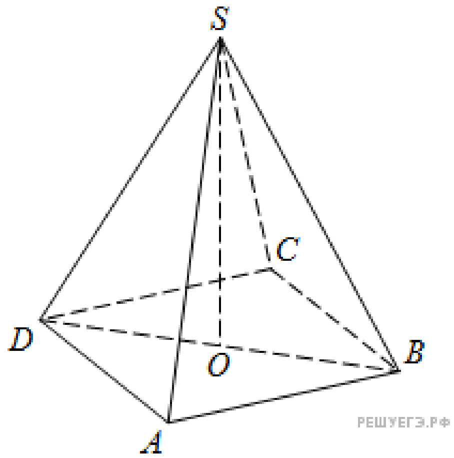
$$\begin{cases} f'(x)=k, \\ f(x)=kx+b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 6x-3=3, \\ 3x^2-3x+c=3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ 3x^2-6x+c-4=0 \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ c=7. \end{cases}$$

Ответ: 7.

10. B 10 № 911. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO = 15$, $BD = 16$. Найдите боковое ребро SA.



Решение.

В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды. тогда по теореме Пифагора

$$SA = SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \sqrt{SO^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{225 + 64} = 17.$$

Ответ: 17.

11. B 11 № 68091.

Найдите значение выражения $\dfrac{9\sqrt[7]{\sqrt[15]{a}} - 6\sqrt[3]{\sqrt[35]{a}}}{6\sqrt[5]{\sqrt[21]{a}}}$ при $a > 0$.

Решение.

Выполним перобразования:

$$\frac{9\sqrt[7]{\sqrt[15]{a}} - 6\sqrt[3]{\sqrt[35]{a}}}{6\sqrt[5]{\sqrt[21]{a}}} = \frac{9\sqrt[105]{a} - 6\sqrt[105]{a}}{6\sqrt[105]{a}} = \frac{3\sqrt[105]{a}}{6\sqrt[105]{a}} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

12. B 12 № 27993. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объем и давление связаны соотношением $pV^{1,4} = const$, где p (атм.) – давление в газе, V – объем газа в литрах. Изначально объем газа равен 1,6 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128 атмосфер. Определите, до какого минимального объема можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

Решение.

пусть p_1 и V_1 - начальные, а p_2 и V_2 - конечные значения объема и давления газа, соответственно. Тогда задача сводится к решению неравенства

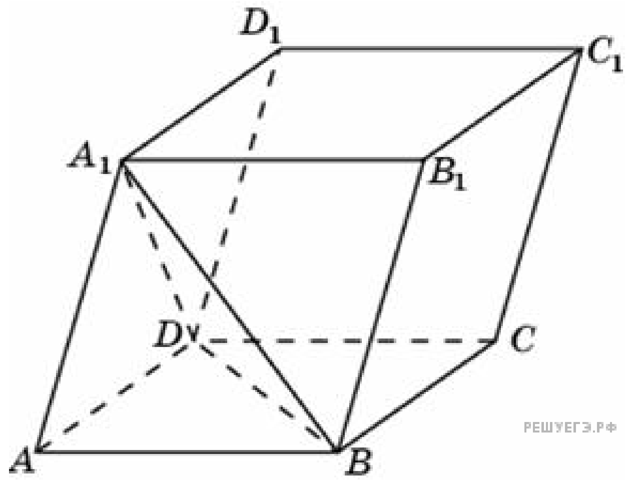
$$V_2 \geq \left(\frac{p_1 V_1^{1,4}}{p_2}\right)^{\frac{1}{1,4}}, \text{где } p_1 = 1\,\text{атм.}, V_1 = 1,6\,\text{л.}, p_2 = 128\,\text{атм.}$$

Тогда

$$V_2 \geq \left(\frac{1,6^{\frac{7}{5}}}{128}\right)^{\frac{5}{7}} \Leftrightarrow V_2 \geq \left(2^{-7}\right)^{\frac{5}{7}} \cdot 1,6 \Leftrightarrow V_2 \geq \frac{1,6}{32} \Leftrightarrow V_2 \geq 0,05.$$

Ответ: 0,05.

13. B 13 № 77154. Найдите объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если объем треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 3.



Решение.

Объем параллелепипеда равен $V = Sh$, где S – площадь основания, h – высота. Объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3}S_\Delta h$, где S_Δ – площадь основания пирамиды, по построению равная половине площади основания параллелепипеда. Тогда объем параллелепипеда в 6 раз больше объема пирамиды $ABDA_1$.

Ответ: 18.

14. B 14 № 99593. Товарный поезд каждую минуту проезжает на 750 метров меньше, чем скорый, и на путь в 180 км тратит времени на 2 часа больше, чем скорый. Найдите скорость товарного поезда. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Скорость товарного поезда меньше, чем скорого на 750 м/мин или на

$$\frac{0,75\text{км}}{\frac{1}{60}\text{ч}} = 45\text{км}/\text{ч}.$$

Пусть v км/ч — скорость товарного поезда, тогда скорость скорого поезда $v + 45$ км/ч. На путь в 180 км товарный поезд тратит времени на 2 часа больше, чем скорый, отсюда имеем:

$$\frac{180}{v} = \frac{180}{v+45} + 2 \Leftrightarrow \frac{180}{v} = \frac{180 + 2v + 90}{v+45} \Leftrightarrow 180v + 180 \cdot 45 = 270v + 2v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2v^2 + 90v - 180 \cdot 45 = 0 \Leftrightarrow v^2 + 45v - 90 \cdot 45 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 45; \\ v = -90 \end{array}\right. \underset{v>0}{\Leftrightarrow} v = 45.$$

Ответ: 45.

15. B 15 № 77452. Найдите наименьшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$ на отрезке $[1;9]$.

Решение.

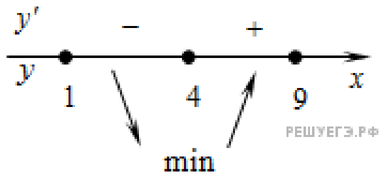
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0, \\ 1 \le x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2, \\ 1 \le x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 4$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(4) = 8 - 12 + 1 = -3$.

Ответ: -3.

16. C 1 № 502094. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $3 \cdot 9^{(x-1)} - 8 \cdot 3^{(x-1)} + 5 = 0$.

Пусть $t = 3^{x-1}$, тогда уравнение запишется в виде $3t^2 - 8t + 5 = 0$, откуда $t = 1$ или $t = \frac{5}{3}$.

При $t = 1$ получим: $3^{x-1} = 1$ откуда $x = 1$.

При $t = \frac{5}{3}$ получим: $3^{x-1} = \frac{5}{3}$ откуда $x = \log_3 5$.

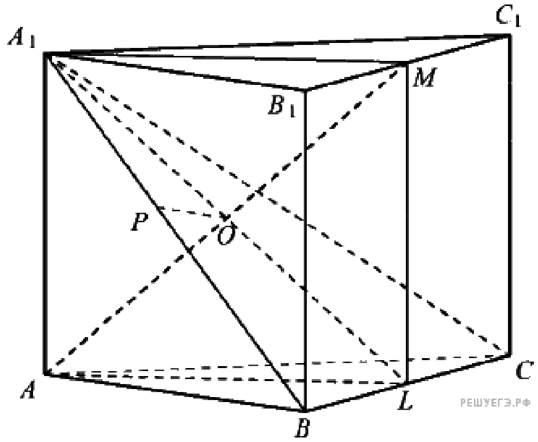
б) Корень $x = 1$ не принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$. Поскольку $1 < \log_3 5$ и $\log_3 5 < \log_3 9 = 2 < \frac{7}{3}$, корень $x = \log_3 5$ принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

Ответ: а) $1, \log_3 5$; б) $\log_3 5$.

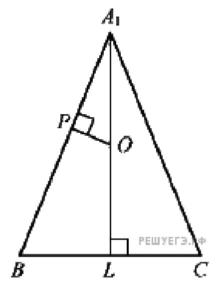
17. C 2 № 503000. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1, является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM.

Решение.

Пусть данное сечение призмы — квадрат AA_1ML. Тогда диагонали перпендикулярны: $AM \perp A_1L$, а по теореме о трёх перпендикулярах $AM \perp BC$. Следовательно, $AM \perp A_1BC$. Отсюда следует, что искомым расстоянием между прямыми A_1B и AM является длина перпендикуляра OP, опущенного из точки O пересечения диагоналей квадрата AA_1ML на прямую A_1B, так как $OP \perp A_1B$ и $OP \perp AM$.



Сторона квадрата AA_1ML равна высоте треугольника ABC, то есть $AL = \sqrt{21}$, а его диагональ $A_1L = \sqrt{42}$. В равнобедренном треугольнике A_1BC основание $BC = 2\sqrt{7}$, боковая сторона $A_1B = 7$. Отсюда, используя подобие треугольников A_1OP и A_1BL, найдём



$$OP = \frac{A_1O \cdot LB}{A_1B} = \frac{A_1L \cdot BC}{4A_1B} = \frac{\sqrt{42} \cdot 2\sqrt{7}}{4 \cdot 7} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

18. C 3 № 484605. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5x}x^2 + \log_{x^2}5x \le 2, \\ \log^4_{x-3}(x^2-17) + \log^2_{x^2-17}(x-3) - \log_{5x}25 > 79. \end{cases}$$

Решение.

Заметим, что по смыслу задачи $x > 1$, а значит, оба слагаемых в левой части первого неравенства положительны. Поскольку слагаемые взаимно обратные, их сумма не меньше двух. Тогда неравенство выполнено в том и только в том случае, когда оба слагаемых равны 1.

Имеем:

$$\log_{5x}x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 5x \underset{x>1}{\Leftrightarrow} x = 5.$$

Осталось проверить, является ли найденное решение первого неравенства решением второго неравенства. Выполним проверку:

$$\log^4_2 8 + \log^2_8 2 - \log_{25}25 = 81 + \frac{1}{9} - 1 = 80\frac{1}{9} > 79.$$

Следовательно, число 5 является решением системы неравенств.

Ответ: $\{5\}$.

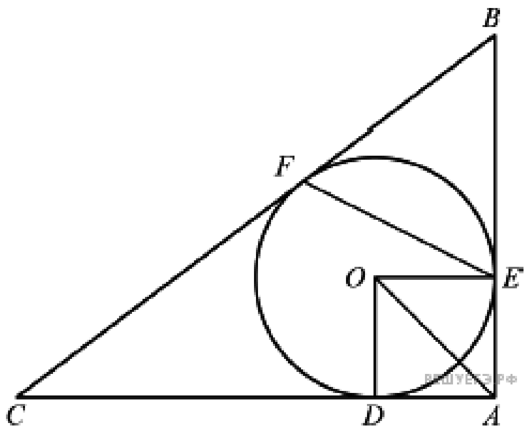
19. C 4 № 502316. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F. Найдите площадь треугольника BEF, если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

Решение.

а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC.



Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC. Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.

б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 2, CF = CD = 10$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(10+x)^2 = 12^2 + (2+x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 3$. Тогда

$$BC = 13,\ \sin\angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{54}{13}.$$

Ответ: $\frac{54}{13}$.

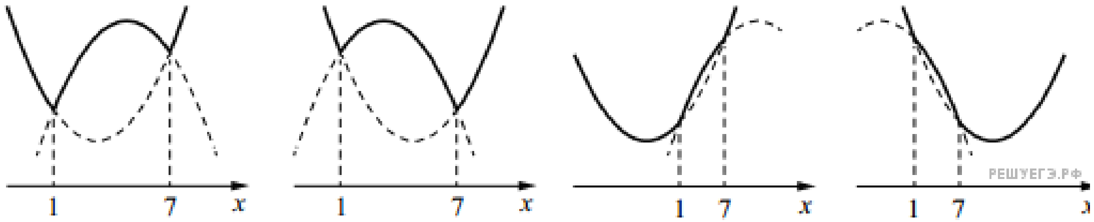
20. C 5 № 503150. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

Решение.

При $x^2-8x+7\geq 0: f(x)=x^2+2(a-4)x+7$, а её график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4-a$.

При $x^2-8x+7<0: f(x)=-x^2+(2a+8)x-7$, а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все четыре возможных вида графика функции $f(x)$ показаны на рисунках.



Наименьшее значение функции $f(x)$ может принять только в точках $x=1, x=7$ или $x=4-a$. Поэтому наименьшее значение функции $f(x)$ больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1)>1, \\ f(7)>1, \\ f(4-a)>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a>1, \\ 14a>1, \\ 2a(4-a)+|a^2-9|>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{1}{2}, \\ 2a^2-8a+1-|a^2-9|<0. \end{cases}$$

Если $\frac{1}{2}<a<3$, то второе неравенство принимает вид $a^2-8a+10<0$, откуда $\frac{4-\sqrt{40}}{3}<a<\frac{4+\sqrt{40}}{3}$. Этот промежуток содержит интервал $\left(\frac{1}{2};3\right)$.

Если $a\geq 3$, то $a^2-8a+10<0$, откуда $4-\sqrt{6}<a<4+\sqrt{6}$. Значит, $3\leq a<4+\sqrt{6}$.

Объединяя найденные промежутки, получаем: $\frac{1}{2}<a<4+\sqrt{6}$.

Ответ: $\frac{1}{2}<a<4+\sqrt{6}$.

21. C 6 № 501071. За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

а) Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а и б?

Решение.

а) Если за столом было 5 мальчиков, евших только бутерброды, 8 мальчиков, евших только конфеты, и 12 девочек, каждая из которых ела и то и другое, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 25 детей могло быть 13 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 14 или больше. Тогда девочек было 11 или меньше. Пусть число мальчиков, евших бутерброды равно m_1. Тогда число $\frac{m_1}{m_1+11}$ не больше , чем доля мальчиков, евших бутерброды среди всех детей, евших бутерброды, а это число не больше, чем $\frac{5}{16}$, откуда $\frac{m_1}{m_1+11} \le \frac{5}{16}$ и, следовательно, $m_1 \le 5$. Пусть m_2 — число мальчиков, евших конфеты. Аналогично, $\frac{m_2}{m_2+11} \le \frac{2}{5}$, откуда, учитывая, что m_2 число целое, находим: $m_2 \le 7$. Но тогда общее число мальчиков, евших хот что-то не больше, чем 5 + 7 = 12. Следовательно, по крайней мере, 2 мальчика ничего не ели, а это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 25 учащихся могло быть 13 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 13.

в) Предположим, что некоторый мальчик ел и конфеты, и бутерброды. Если бы вместо него было два мальчика, один из которых ел только конфеты, а другой — только бутерброды, то доля мальчиков, евших конфеты и доля мальчиков, евших бутерброды, остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек можно считать, что каждый мальчик ел или только конфеты, или только бутерброды.

Пусть, как прежде, m_1 мальчиков ели бутерброды, m_2 ели конфеты, и всего было d девочек. Оценим долю девочек. Будем считать, что каждая девочка ели и конфеты, и бутерброды, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля среди евших конфеты и доля среди евших бутерброды не станут меньше.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d} \le \frac{5}{16}$, $\frac{m_2}{m_2+d} \le \frac{2}{5}$, значит $\frac{m_1}{d} \le \frac{5}{11}$, $\frac{m_2}{d} \le \frac{2}{3}$.

Тогда $\frac{m_1+m_2}{d} \le \frac{37}{33}$, поэтому доля девочек равна

$$\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \ge \frac{1}{\frac{37}{33}+1} = \frac{33}{70}.$$

Осталось показать, что такая доля девочек действительно могла быть. Например, если из 70 детей 15 мальчиков ели только бутерброды, 22 мальчика ели только конфеты, и еще было 33 девочки, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено, а доля девочек в точности равна $\frac{33}{70}$.

Ответ: а) да; б) 13; в) $\frac{33}{70}$