Вариант № 2887014

1. B 1 № 318583. Система навигации, встроенная в спинку самолетного кресла, информирует пассажира о том, что полет проходит на высоте 37 170 футов. Выразите высоту полета в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

Решение.

Переведем высоту из футов в сантиметры: 37 170 · 30,5 = 1 133 685 см. Переведем высоту из сантиметров в метры: 1 133 685 : 100 = 11 336,85 м. Следовательно, полет проходит на высоте 11 336,85 метра.

Ответ: 11 336,85.

2. B 2 № 77341. 27 выпускников школы собираются учиться в технических вузах. Они составляют 30% от числа выпускников. Сколько в школе выпускников?

Решение.

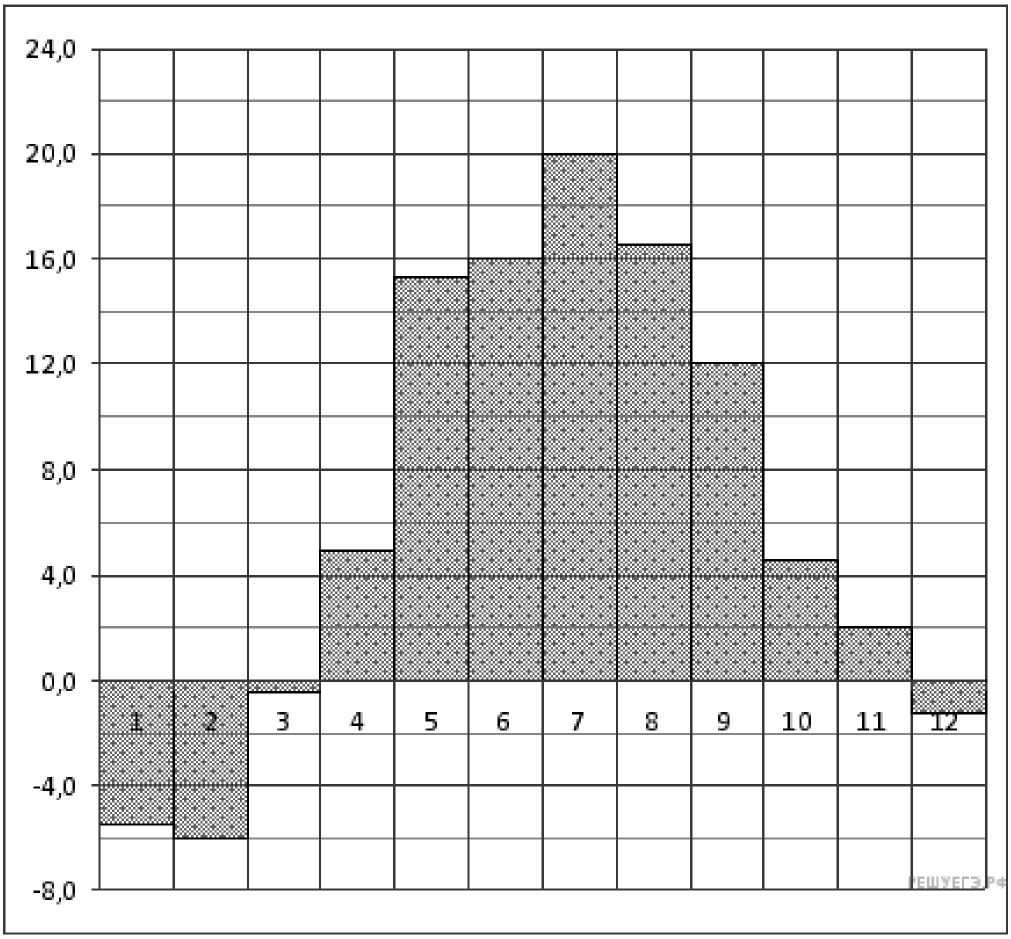
Разделим 27 на 0,3:

$$\frac{27}{0,3} = \frac{27 \cdot 10}{3} = 90.$$

Значит, в школе 90 выпускников.

Ответ: 90.

3. B 3 № 27512. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в 2003 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение.

Из диаграммы видно, что наибольшая среднемесячная температура составляла 20 °C (см. рисунок).

Ответ: 20.

4. B 4 № 316049. Независимое агентство каждый месяц определяет рейтинги R новостных сайтов на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель оценивается целыми числами от −2 до 2. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 25 \cdot \left(\frac{2In + Op + 3Tr}{6} + 2\right).$$

В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких новостных сайтов. Определите наивысший рейтинг новостных сайтов, представленных в таблице. Запишите его в ответ, округлив до целого числа.

Сайт	**Информативность**	**Оперативность**	**Объективность**
VoKak.ru	2	−1	0
NashiNovosti.com	−2	1	−1
Bezvrak.ru	2	2	0
Zhizni.net	−1	−1	−2

Решение.

Рассмотрим все варианты.

Сайт VoKak.ru: $R = 25 \cdot \left(\frac{4-1+0}{6} + 2\right) = \frac{125}{2} = 62,5.$

Сайт NashiNovosti.com: $R = 25 \cdot \left(\frac{-4+1-3}{6} + 2\right) = 25.$

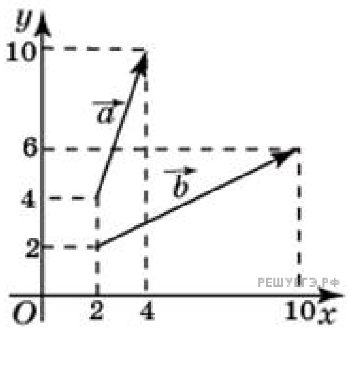
Сайт Bezvrak.ru: $R = 25 \cdot \left(\frac{4+2+0}{6} + 2\right) = 75.$

Сайт Zhizni.net: $R = 25 \cdot \left(\frac{-2-1-6}{6} + 2\right) = \frac{25}{2} = 12,5.$

Таким образом, наивысший рейтинг имеет сайт Bezvrak.ru, он равен 75.

Ответ: 75.

5. B 5 № 27738. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$.



Решение.

Координаты вектора равны разности координат конца вектора и его начала. Поэтому вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(2;\ 6)$, вектор $\vec{b}$ имеет координаты $(8;\ 4)$. Координаты разности векторов равны разности соответствующих координат. Тогда вектор $\vec{a}-\vec{b}$ имеет координаты $(-6;\ 2)$, их сумма равна -4.

Ответ: −4.

6. B 6 № 501190. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы две решки.

Решение.

Всего возможных исходов — 8: орел-орел-орел, орел-орел-решка, орел-решка-решка, орел-решка-орел, решка-решка-решка, решка-решка-орел, решка-орел-орел, решка-орел-решка. Благоприятными являются четыре: решка-решка-решка, решка-решка-орел, решка-орел-решка, орел-решка-решка. Следовательно, искомая вероятность равна 4 : 8 = 0,5.

Ответ: 0,5.

7. B 7 № 26661. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2x+5}{3}}=5.$

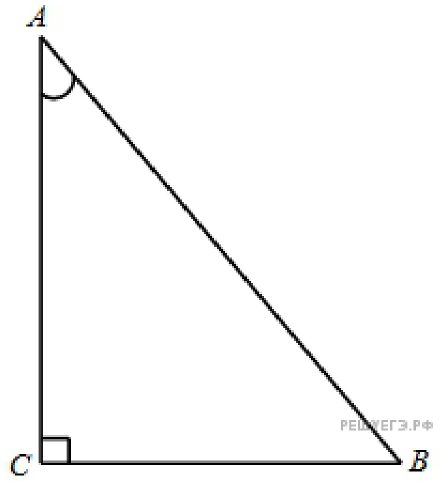
Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{2x+5}{3}}=5 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{3}=25 \Leftrightarrow 2x+5=75 \Leftrightarrow x=35.$$

Ответ: 35.

8. B 8 № 27257. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB=8$, $AC=4$. Найдите $\cos A$.

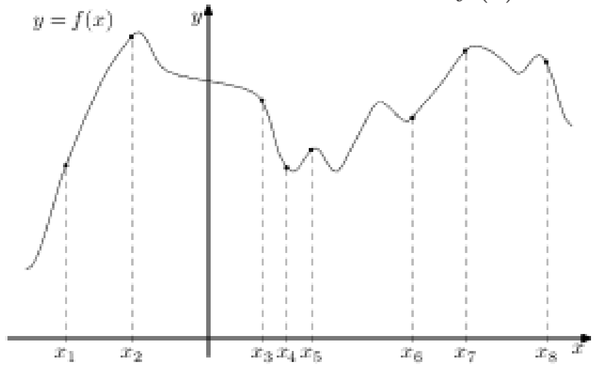


Решение.

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{8}=0,5.$$

Ответ: 0,5.

9. B 9 № 317539. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

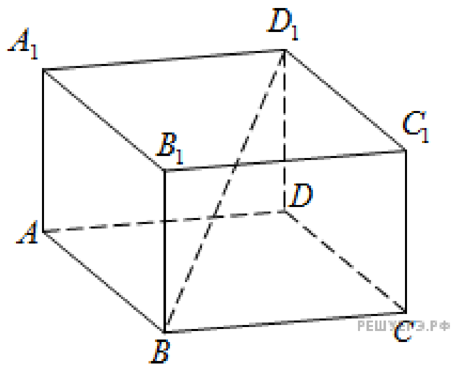


Решение.

Положительным значениям производной соответствует интервалы, на которых функция $f(x)$, возрастает. На них лежат точки x_1, x_2, x_5, x_6, x_7. Таких точек 5.

Ответ:5.

10. B 10 № 917. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $CA_1 = \sqrt{38}$; $DD_1 = 5$; $BC = 3$. Найдите длину ребра BA.



Решение.

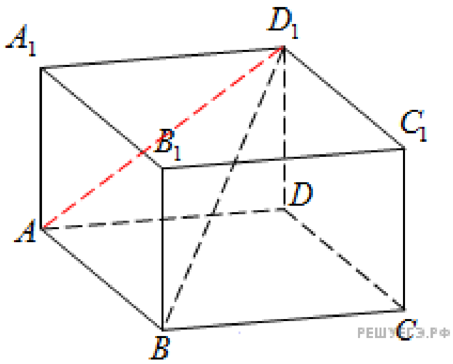
по теореме Пифагора

$$AD_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1D_1^2} = \sqrt{DD_1^2 + BC^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}.$$

Тогда длина ребра BA равна

$$BA = \sqrt{BD_1^2 - AD_1^2} = \sqrt{CA_1^2 - AD_1^2} = \sqrt{38-34} = 2.$$

Ответ: 2.



11. B 11 № 77391. Найдите значение выражения $4\frac{4}{9} : \frac{4}{9}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$4\frac{4}{9} : \frac{4}{9} = \frac{40}{9} \cdot \frac{9}{4} = 10.$$

Ответ: 10.

12. B 12 № 28000. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t – время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 120°$/с, фаза $\varphi = -30°$. Датчик настроен так, что если напряжение в нем не ниже чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $U_0 \sin(\omega t + \varphi) = 1$ при заданных значениях амплитуды сигнала, частоты и фазы:

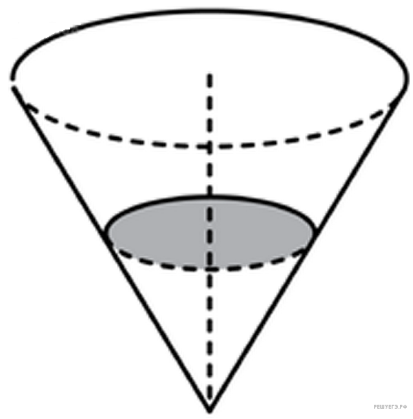
$$2\sin(120°t - 30°) = 1 \Leftrightarrow \sin(120°t - 30°) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 120°t - 30° = 30° + 360°n \\ 120°t - 30° = 150° + 360°n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 120°t = 60° + 360°n \\ 120°t = 180° + 360°n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t = 1 + 6n \\ 2t = 3 + 6n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \underset{t<1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}, \\ t = \frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

На протяжении первой секунды лампочка будет гореть $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$ с, то есть 50% времени.

Ответ: 50.

13. B 13 № 318145. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Решение.

Меньший конус подобен большему с коэффициентом 0,5. Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объем большего конуса в 8 раз больше объема меньшего конуса, он равен 560 мл. Следовательно, необходимо долить 560 − 70 = 490 мл жидкости.

Ответ: 490.

14. B 14 № 99601. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

Решение.

Пусть весь путь теплохода равен $2S$ км. Время в пути составляет 30 часов, из которых 5 часов – стоянка:

$$\frac{S}{25-3}+\frac{S}{25+3}=30-5 \Leftrightarrow \frac{50S}{22\cdot 28}=25 \Leftrightarrow S=308 \Leftrightarrow 2S=616.$$

Ответ: 616.

15. B 15 № 77473. Найдите наименьшее значение функции $y=x+\frac{36}{x}$ на отрезке $[1;9]$.

Решение.

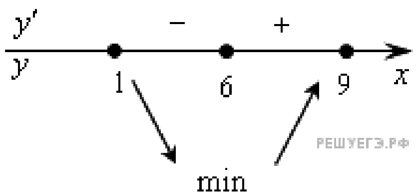
Найдем производную заданной функции:

$$y'=1-\frac{36}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases}1-\frac{36}{x^2}=0,\\ 1\le x\le 9.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=36,\\ 1\le x\le 9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=6,\\ x=-6,\end{array}\right.\\ 1\le x\le 9\end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=6$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(6)=6+6=12$.

Ответ: 12.

16. C 1 № 484547. Решите уравнение $\frac{26\cos^2 x-23\cos x+5}{13\sin x-12}=0.$

Решение.

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю и не теряет смысла. Поэтому данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 26\cos^2 x - 23\cos x + 5 = 0, \\ \sin x \neq \dfrac{12}{13}. \end{cases}$$

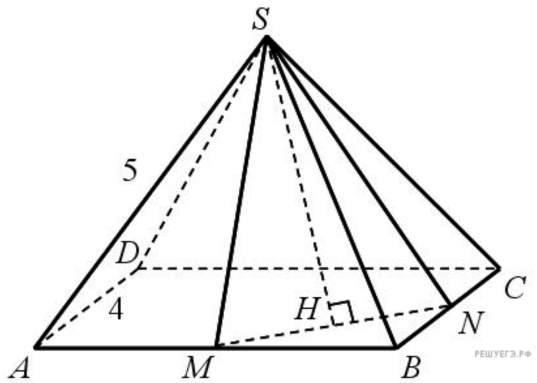
Решив уравнение системы как квадратное относительно $\cos x$, находим $\cos x = \frac{1}{2}$ либо $\cos x = \frac{5}{13}$. Если $\cos x = \frac{1}{2}$, то $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ то есть $\sin x \neq \frac{12}{13}$. Следовательно, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Если $\cos x = \frac{5}{13}$, то $\sin x = \pm\frac{12}{13}$. В этом случае с учетом условия $\sin x \neq \frac{12}{13}$ системы получаем, что из двух точек единичной окружности, соответствующих решениям уравнения $\cos x = \frac{5}{13}$, нужно оставить только ту, для которой $\sin x = -\frac{12}{13}$. Это точка четвертой четверти, и решение уравнении имеет вид $x = -\arccos\frac{5}{13} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = -\arccos\frac{5}{13} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

17. C 2 № 500643. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 5, а сторона основания равна 4.

Решение.

Пусть M — середина AB, а N — середина BC. Тогда площадь сечения равна площади треугольника SMN. Найдем последовательно SM, SN и MN.SM и SN — медианы треугольников SAB и SBC соответственно. Так как эти треугольники равнобедренные (поскольку пирамида правильная),



$$SM = SN = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}.$$

Найдем теперь MN из прямоугольного треугольника MBN. В нем катеты равны 2. Гипотенуза MN, по теореме Пифагора, будет равна $2\sqrt{2}$.

Теперь найдем площадь равнобедренного треугольника SMN. Для этого проведем высоту SH, которая, по теореме Пифагора, равна $\sqrt{19}$, и вычислим площадь:

$$S = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{38}.$$

Ответ: $\sqrt{38}$.

18. C 3 № 484599. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5^x+\left(\dfrac{1}{5}\right)^x>2, \\ 2^{x^2}\le 64\cdot 2^x. \end{cases}$

Решение.

Последовательно получаем:

$$\begin{cases} 5^x+\dfrac{1}{5^x}>2, \\ 2^{x^2}\le 64\cdot 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{2x}+1>2\cdot 5^x, \\ 2^{x^2}\le 2^{x+6} \end{cases} \underset{2>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (5^x-1)^2>0, \\ x^2\le x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x\ne 1, \\ x^2-x-6\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0, \\ -2\le x\le 3. \end{cases}$$

Ответ: $[-2,0)\cup(0,\ 3]$.

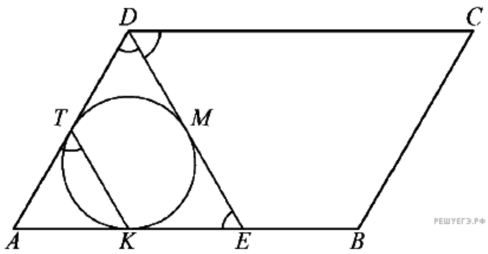
19. C 4 № 503002. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

Решение.

а) Прямые AE и CD параллельны, а DE — биссектриса угла ADC, поэтому $\angle AED = \angle CDE = \angle ADE$. Значит, треугольник ADE равнобедренный, $AD = AE$. Отрезки AK и AT касательных, проведённых к окружности из точки A, равны, значит, треугольник ATK также равнобедренный, причём угол при вершине A у этих треугольников общий. Поэтому $\angle ATK = \angle ADE$. Следовательно, $KT \parallel DE$.



б) Пусть окружность касается основания DE равнобедренного треугольника ADE в точке M. Тогда M — середина DE. Обозначим $DM = x$. Тогда $DT = DM = x$, $AT = AD - DT = 6 - x$. Треугольник ATK подобен треугольнику ADE, поэтому $\dfrac{AT}{AD}=\dfrac{TK}{DE}$, или $\dfrac{6-x}{6}=\dfrac{3}{2x}$. Отсюда находим, что $x = 3$. Тогда $DE = 2x = 6$, значит, треугольник ADE равносторонний. Следовательно, $\angle BAD = \angle EAD = 60°$.

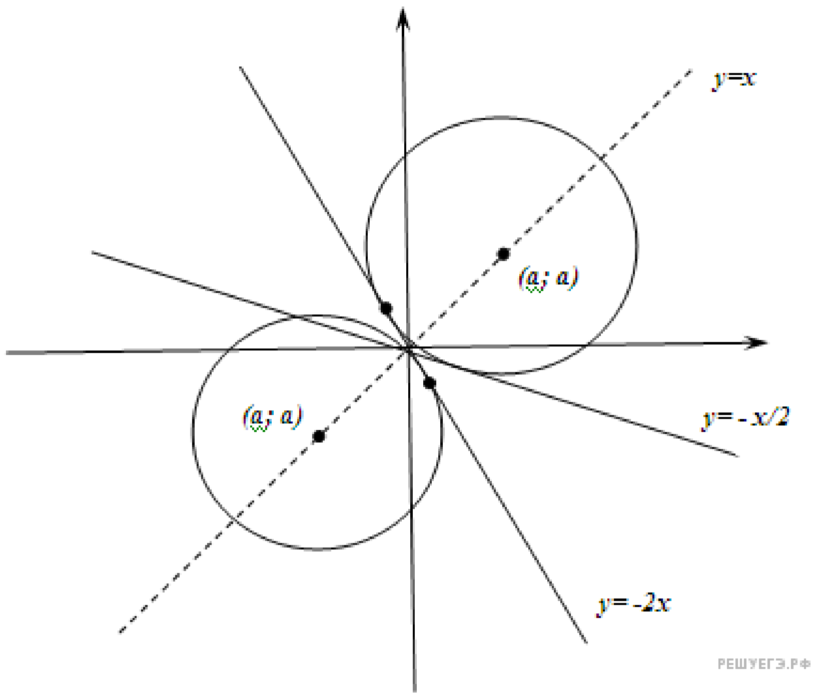
Ответ: 60°.

20. C 5 № 500010. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (y+2x)(2y+x)\le 0, & (1) \\ \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}} & (2) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.



Неравенство (1) задает пару вертикальных углов на координатной плоскости Oxy (см. рисунок). Графиком уравнения (2) является окружность радиуса $R=\frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$, центр которой — точка $P(a,a)$ — лежит на прямой $y=x$. Поскольку оба графика симметричны относительно прямой $y=x$, система будет иметь ровно два решения тогда и только тогда, когда расстояние PK от центра окружности до прямой $y=-2x$ будет равняться радиусу $R=\frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$ данной окружности.

Из треугольника POK находим: $PK=PO\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, где $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$ — угловой коэффициент прямой

$y=-\frac{1}{2}x$. Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, откуда

$$PK=PO\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)=|a|\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{3|a|}{\sqrt{5}}.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{3|a|}{\sqrt{5}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow 3a=\pm(a+1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{1}{2}\\ a=-\frac{1}{4}.\end{array}\right.$$

Ответ: $a=\frac{1}{2}$ или $a=-\frac{1}{4}$.

21. C 6 № 484660. Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны все целые неотрицательные степени некоторого однозначного натурального числа p. В результате получается рациональное число. Найдите это число.

Решение.

Покажем, что $p = 0{,}111...$

Действительно, пусть $p > 1$. Предположим, что наименьший период полученного рационального числа равен T. Тогда Tk — тоже период при любом натуральном k. Пусть первый период начинается с некоторой по счету цифры, принадлежащей десятичной записи степени p^m. Возьмем период такой длины Tk, чтобы эта длина была больше, чем длина записи p^m.

В записи числа p^{m+1} цифр столько же, сколько в p^m или на одну больше. Аналогично, число p^{m+2} длиннее, чем p^m не более, чем на две цифры и так далее. Значит, можно найти такую степень $p^n > p^m$, что $n = Tk$.

Цифры числа p^n занимают весь период — группу длиной Tk. Тогда в записи следующего числа p^{n+1} первые с Tk цифры тоже образуют период и должны повторять цифры числа p^n.

Получается, что либо $p^{n+1} = p^n$, либо $p^{n+1} = 10p^n + \alpha$, где α — какое-то однозначное число. Последнее равенство невозможно, так как

$$p^{n+1} \leq 9p^n.$$

Следовательно, верно $p^{n+1} = p^n$, откуда $p = 1$. Десятичная дробь имеет вид

$$0,111\ldots = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.