Вариант № 2887123

1. B 1 № 77337. В школе есть трехместные туристические палатки. Какое наименьшее число палаток нужно взять в поход, в котором участвует 20 человек?

Решение.

Разделим 20 на 3:

$$\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

Значит, в поход нужно взять 7 палаток.

Ответ: 7.

2. B 2 № 77340. В школе 124 ученика изучают французский язык, что составляет 25% от числа всех учеников. Сколько учеников учится в школе?

Решение.

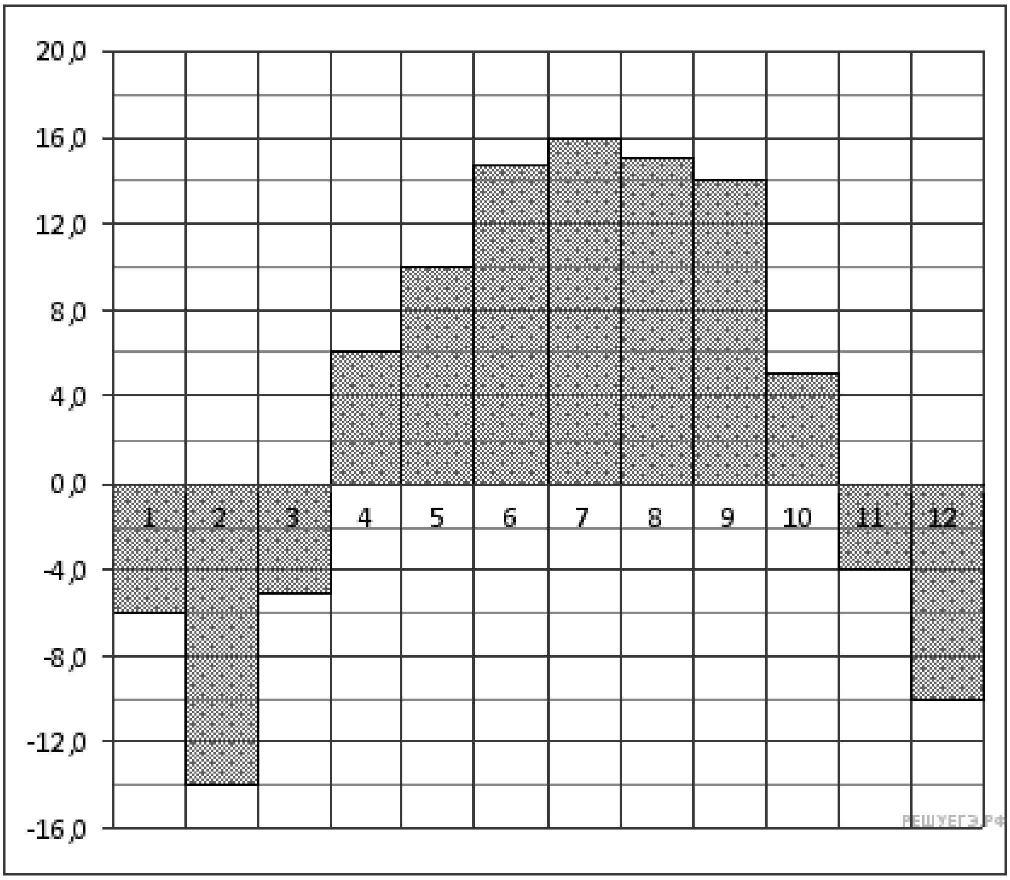
Разделим 124 на 0,25:

$$\frac{124}{0,25} = \frac{124 \cdot 100}{25} = 124 \cdot 4 = 496.$$

Значит, в школе учится 496 учеников.

Ответ: 496.

3. B 3 № 27519. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с положительной среднемесячной температурой.



Решение.

Из диаграммы видно, что было 7 месяцев с температурой выше нуля (см. рисунок).

Ответ: 7.

4. B 4 № 5453.

Семья из трех человек едет из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 930 рублей. Автомобиль расходует 11 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 18,5 рублей за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

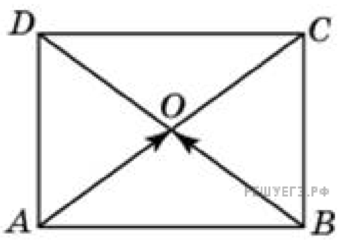
Решение.

Стоимость поездки на поезде для троих человек будет составлять $930 \cdot 3 = 2790$ руб. Расход бензина на 700 км пути составит 7 раз по 11 литров т. е. 77 литров. Его стоимость $77 \cdot 18{,}5 = 1424{,}5$ руб.

Стоимость самой дешевой поездки составляет 1424,5 рубля.

Ответ: 1424,5.

5. B 5 № 27711. Две стороны изображенного на рисунке прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\vec{AO}$ и $\vec{BO}$.



Решение.

Сумма векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$ равна вектору $\overrightarrow{AD}$. Его длина равна 6.

Ответ: 6.

6. B 6 № 320195. Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Решение.

Частота (относительная частота) события «гарантийный ремонт» равна 51 : 1000 = 0,051. Она отличается от предсказанной вероятности на 0,006.

Ответ: 0,006.

7. B 7 № 26660. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{6}{4x-54}}=\frac{1}{7}$.

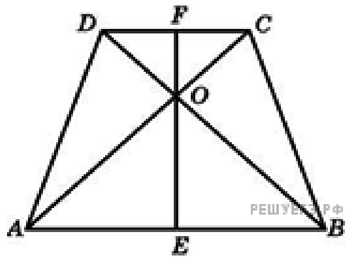
Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{6}{4x-54}}=\frac{1}{7}\Leftrightarrow\frac{6}{4x-54}=\frac{1}{49}\Leftrightarrow 294=4x-54\Leftrightarrow x=87.$$

Ответ: 87.

8. B 8 № 27844. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите ее среднюю линию.



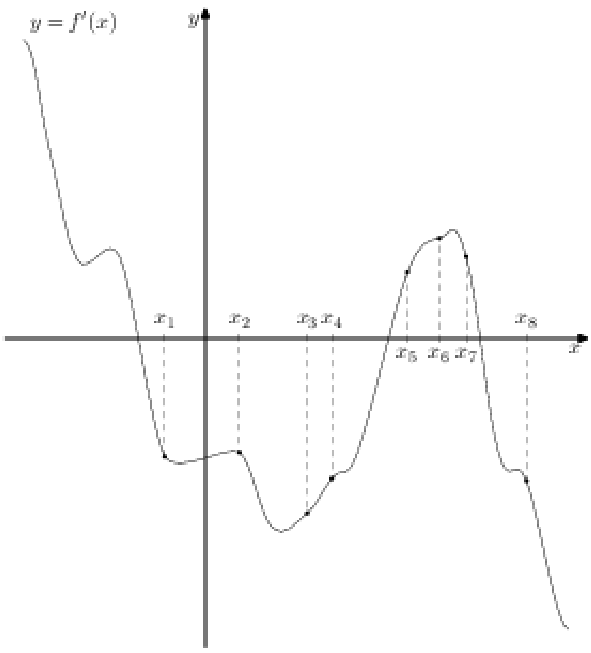
Решение.

треугольники CFO и BEO – равнобедренные, так как $\angle OCF=\angle COF=45^\circ$ и $\angle OBE=\angle BOE=45^\circ$, следовательно, средняя линия равна

$$KM=\frac{DC+AB}{2}=FC+EB=FO+OE=FE=12.$$

Ответ: 12.

9. B 9 № 317542. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?

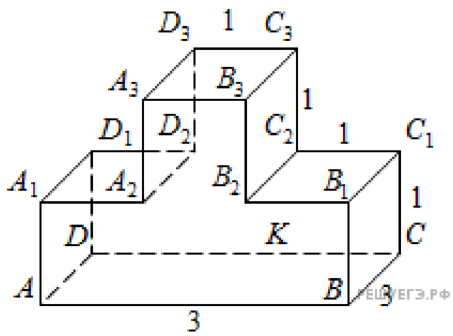


Решение.

Убыванию дифференцируемой функции $f(x)$ соответствуют отрицательные значения её производной. Производная отрицательна в точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_8: точки лежат ниже оси абсцисс, их ординаты отрицательгы. Таких точек 5.

Ответ: 5.

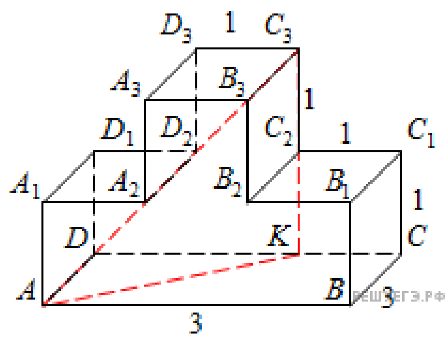
10. B 10 № 245378. Найдите квадрат расстояния между вершина-ми A и C_3 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AKC_3. По теореме Пифагора

$$AC_3{}^2 = AK^2 + KC_3{}^2 = AD^2 + (DC - KC)^2 + (CC_1 + C_2C_3)^2 = \\ = 9 + 4 + 4 = 17.$$



Ответ: 17.

11. B 11 № 26788. Найдите $\dfrac{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

Решение.

Способ 1: $\operatorname{tg}\alpha = 3 \Leftrightarrow \sin\alpha = 3\cos\alpha$. Тогда:

$$\frac{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{3\cos\alpha - 12\cos\alpha}{6\cos\alpha - 5\cos\alpha} = -9.$$

Способ 2: разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$. Тогда:

$$\frac{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{3 - 4tg\alpha}{2tg\alpha - 5} = \frac{3-12}{6-5} = -9.$$

Ответ: -9.

12. B 12 № 28006. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле $A = FS\cos\alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

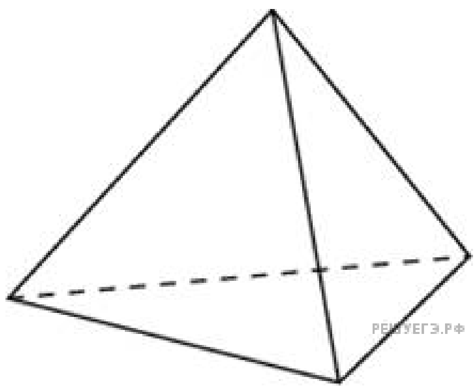
Решение.

Задача сводится к решению неравенства $A \geq 2000$ на интервале $(0°;\quad 90°)$ при заданных значениях силы $F = 80$ кН и длины пути $S = 50$ м:

$$A \geq 2000 \Leftrightarrow 80\cdot 50\cdot\cos\alpha \geq 2000 \Leftrightarrow \cos\alpha \geq \frac{1}{2} \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 0° < \alpha \leq 60°.$$

Ответ: 60.

13. B 13 № 27085. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?



Решение.

Объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому если все ребра увеличить в 2 раза, объём увеличится в 8 раз.

Это же следует из формулы для объёма правильного тетраэдра $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, где a — длина его ребра.

Ответ: 8.

14. B 14 № 99586. Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

Решение.

Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере $b_1 = 5\,000$ рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300%, то есть в $q = 4$ раза, по сравнению с предыдущим годом. За 2003 год Бубликов заработал

$$b_4 = b_1\cdot q^3 = 5\,000\cdot 4^3 = 320\,000 \text{ рублей.}$$

Ответ: 320000.

15. B 15 № 26723. Найдите точку минимума функции $y=(3x^2-36x+36)e^{x-36}$.

Решение.

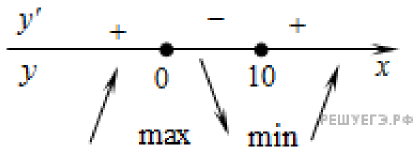
Найдем производную заданной функции:

$$y'=(3x^2-36x+36)'e^{x-36}+(3x^2-36x+36)(e^{x-36})'=$$
$$=(6x-36)e^{x-36}+(3x^2-36x+36)e^{x-36}=(3x^2-30x)e^{x-36}=3x(x-10)e^{x-36}.$$

Найдем нули производной:

$$3x(x-10)e^{x-36}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0,\\x_2=10.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=10$.

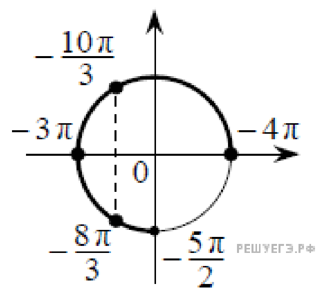
Ответ: 10.

16. C 1 № 500467. а) Решите уравнение $\log_4(\sin x+\sin 2x+16)=2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Из данного уравнения получаем:



$$\sin x+\sin 2x+16=16\Leftrightarrow\sin x+2\cos x\sin x=0\Leftrightarrow\sin x\cdot(2\cos x+1)=0.$$

Значит, или $\sin x=0$, откуда $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $\cos x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi,-\frac{5\pi}{2}\right]$, получим числа $-4\pi,-\frac{10\pi}{3},-3\pi,-\frac{8\pi}{3}$.

Ответ: а) $\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, б) $-4\pi,-\frac{10\pi}{3},-3\pi,-\frac{8\pi}{3}$.

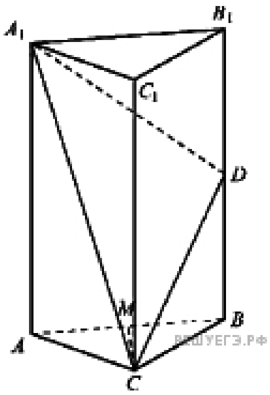
17. C 2 № 501436. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $8\sqrt{3}$, а ребро основания равно 1. Точка D — середина ребра BB_1. Найдите объём пятигранника $ABCA_1D$.

Решение.

Пусть CM — высота треугольника ABC. Тогда $CM \perp ABB_1A_1$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, поскольку в правильной призме $AA_1 \perp ABC$ и, значит, $CM \perp AA_1$. Пятигранник $ABCA_1D$ — четырехугольная пирамида с вершиной в точке C и основанием $ABDA_1$ — прямоугольной трапецией. Высота пирамиды $CM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Площадь основания равна

$$\frac{AA_1+BD}{2}\cdot AB = \frac{8\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3},$$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABDA_1}\cdot CM = \frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$



Ответ: 3.

18. C 3 № 503322. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^x + 5\cdot 2^{2-x} \le 12, \\ \dfrac{x^2-5x-6}{x^2-1} \le \dfrac{x-9}{x-1} + \dfrac{2}{x-3}. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$2^x + 5\cdot 2^{2-x} \le 12 \Leftrightarrow 2^{2x} - 12\cdot 2^x + 20 \le 0.$$

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2 - 12t + 20 \le 0.$ откуда $2 \le t \le 10 \Leftrightarrow 2 \le 2^x \le 10 \Leftrightarrow 1 \le x \le \log_2 10.$

Решение первого неравенства исходной системы: $1 \le x \le \log_2 10.$

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^2-5x-6}{x^2-1} \le \frac{x-9}{x-1} + \frac{2}{x-3} \Leftrightarrow \frac{(x-6)(x+1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-9}{x-1} \le \frac{2}{x-3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-3} \le 0, \text{где } x \ne 1; \frac{x-7}{(x-1)(x-3)} \le 0, \text{где } x \ne 1.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x < -1;\ -1 < x < 1;\ 3 < x < 7.$

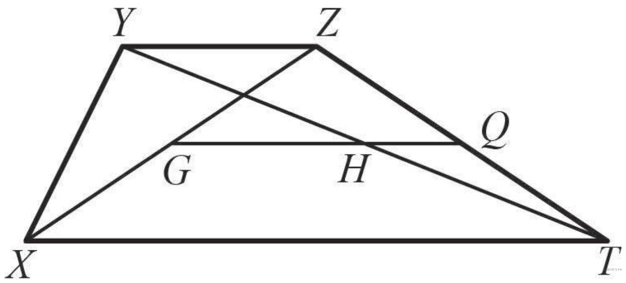
3. Поскольку $3 < \log_2 10 < 7$, получаем решение исходной системы неравенств: $3 < \log_2 10 \le 7.$

Ответ: $(3;\ \log_2 10].$

19. C 4 № 501557. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 16 и 34 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 15, средняя линия трапеции равна 30. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Решение.

Докажем сначала, что отрезок, соединяющий середины диагоналей любой трапеции, равен полуразности оснований. Действительно, рассмотрим произвольную трапецию $XYZT$ с основаниями $XT > YZ$.

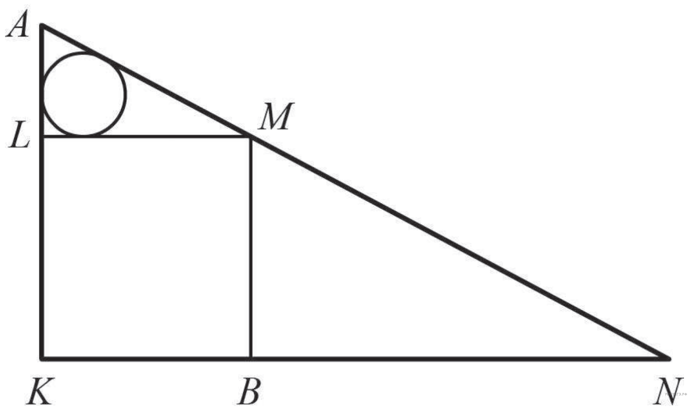


Пусть G и H — середины её диагоналей XZ и YT, а Q — середина боковой стороны ZT. Тогда GQ и HQ — средние линии треугольников XZT и YZT, поэтому $GQ||XT$ и $HQ||YZ$, а т. к. $YZ||XT$, то $HQ||\mathrm{XT}$. Значит, точки G, H и Q лежат на одной прямой. Следовательно,

$$GH = GQ - HQ = \frac{1}{2}XT - \frac{1}{2}YZ = \frac{XT - YZ}{2},$$

что и требовалось доказать. Этот факт можно считать известным.

Перейдём к нашей задаче. Предположим, что $KN > LM$.



Тогда точки A и L лежат по одну сторону от прямой KN и $\frac{KN - LM}{2} = 15$. Через вершину M проведём прямую, параллельную боковой стороне KL. Пусть эта прямая пересекается с прямой KN в точке B. Тогда

$$BN = KN - KB = KN - LM = 30,\ \mathrm{BM} = KL = 16.$$

Треугольник BMN — прямоугольный, т к.

$$BN^2 + \mathrm{BM}^2 = 30^2 + 16^2 = 900 + 256 = 1156 = 34^2 = MN^2,$$

значит, прямые AK и KN перпендикулярны.

Из системы

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(KN-LM)=15; \\ \frac{1}{2}(KN+LM)=30 \end{cases}$$

находим, что $KN=45,\ LM=15.$

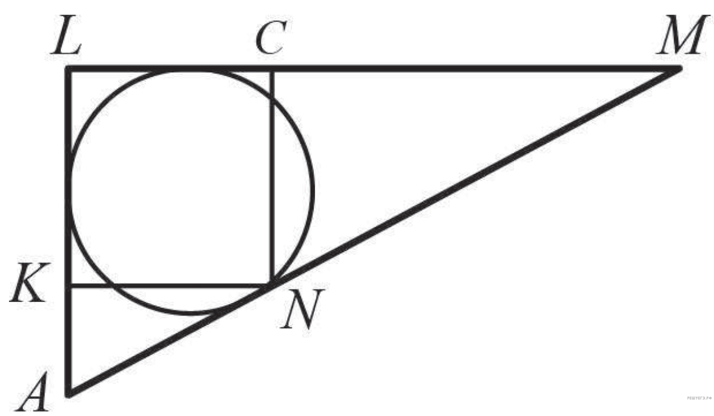
Треугольник ALM подобен прямоугольному треугольнику MBN (по двум углам) с коэффициентом $\frac{LM}{BN}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$, значит,

$$AL=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{BM}=\frac{1}{2}\cdot 16=8,\ AM=\frac{1}{2}\cdot MN=\frac{1}{2}\cdot 34=17.$$

Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ALM. Тогда

$$r=\frac{AL+LM-AM}{2}=\frac{8+15-17}{2}=3.$$

Пусть теперь $KN < LM$.



Тогда точки A и L лежат по разные стороны от прямой KN. В этом случае $KN=15,\ LM=45.$ Пусть прямая, проведённая через точку N параллельно KL, пересекает прямую LM в точке C. Тогда треугольник ALM подобен прямоугольному треугольнику NCM с коэффициентом $\frac{3}{2}$, поэтому

$$AL=\frac{3}{2}CN=24,\ AM=\frac{3}{2}MN=51.$$

Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ALM. Тогда

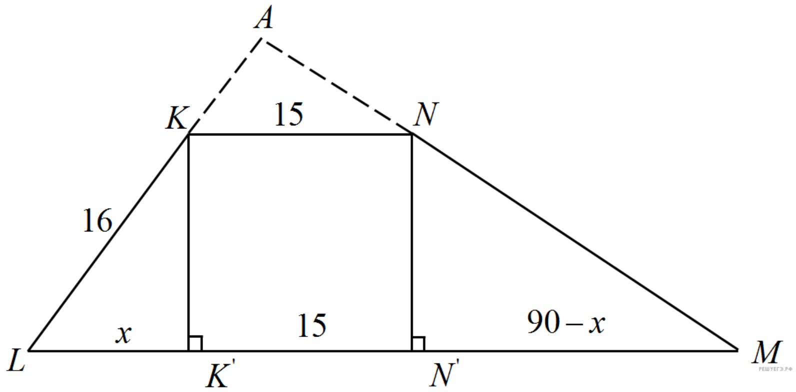
$$r=\frac{AL+LM-AM}{2}=\frac{24+45-51}{2}=9.$$

Ответ: 3 или 9.

Приведём другое решение.

Отрезок, соединяющий середины диагоналей равен полуразности большего и меньшего оснований трапеции, а средняя линия равна их полусумме. Пусть KM меньшее основание, а LM — большее. Тогда $\frac{LM-KN}{2}=15,\ \frac{LM+KN}{2}=30$, откуда $LM=45,\ KN=15.$

Рассмотрим случай 1. Найдём высоту трапеции. Пусть KK’ и NN’ — высоты трапеции. Тогда из прямоугольных треугольников $KK'L$ и $NN'M$ имеем:



$KK'^2 = KL^2 - LK'^2,\ NN'^2 = NM^2 – N'M^2$. Пусть $LK' = x$, тогда $N'M = 30 - x$ (см. рис.), поскольку $KK' = NN'$, имеем :

$$16^2 - x^2 = 34^2 - (30 - x)^2 \Leftrightarrow (30 - x)^2 – x^2 = 34^2 – 16^2 \ \$$$
$$(30 - 2x) \cdot 30 = 18 \cdot 50 \Leftrightarrow 2(15 - x) = 6 \cdot 5 \quad 15 – x = 15 \quad x = 0.$$

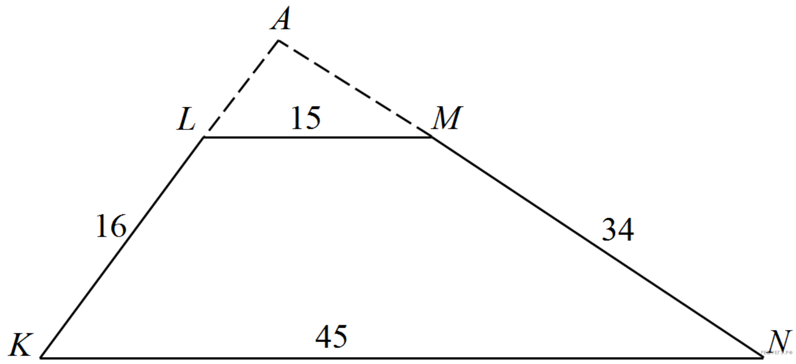
Следовательно, точка K' совпадает с точкой L, трапеция $KLMN$ является прямоугольной (см. рис.). Продолжим KL и MN до пересечения в точке A. $\triangle AKN \sim \triangle ALM_1$ с коэффициентом подобия $\dfrac{KN}{LM} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$, тогда $Al = \dfrac{3}{2}KL = 24,\ AM = \dfrac{2}{3}NM = 51$, искомый радиус окружности $r = \dfrac{24 + 45 - 51}{2} = 9$.

Рассмотрим случай 2. Найдём высоту трапеции. Аналогично случаю 1 имеем:

$$16^2 - x^2 = 34^2 - (30 + x)^2 \Leftrightarrow (30 + x)^2 - x^2 = 34^2 - 16^2 \Leftrightarrow (30 - 2x) \cdot 30 = 18 \cdot 50 \Leftrightarrow x = 0.$$

В этом случае K' также совпадает с L, что исследовано в предыдущем случае.

В случае 3 имеем $r = \dfrac{8 + 15 - 17}{2} = 3$, аналогично в случае 4.



Ответ: 3 или 9.

20. C 5 № 484629. Известно, что значение параметра a таково, что система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2y^2) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это значение параметра a и решите систему при найденном значении параметра.

Решение.

Из первого уравнения системы получаем

$$2^{\ln y} = 4^{|x|} \Leftrightarrow y = e^{2|x|}.$$

Заметим, что если пара $(x; y)$ — решение системы, то пара $(-x; y)$ — также решение этой системы. Поскольку система имеет единственное решение, то этим решением может быть только пара $(0; y)$. Таким образом, $x = 0$ и из второго уравнения получаем:

$$\log_2(2a^2) = \log_2 1 + 1 \Leftrightarrow \log_2(2a^2) = 1 \Leftrightarrow 2a^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = -1. \end{array}\right.$$

Проверим, действительно ли система при найденных значениях а имеет единственное решение.

1. Если $a = 1$, то система действительно имеет единственное решение:

$$\log_2(x^4y^2+2) = \log_2(1-x^2y^2)+1 \Leftrightarrow x^4y^2+2 = 2-2x^2y^2 \Leftrightarrow y^2(x^4+2x^2) = 0 \underset{y>0}{\Leftrightarrow} x = 0.$$

Тогда

$$y = e^0 = 1.$$

2. Если $a = -1$, то система имеет три решения:

$$\log_2(x^4y^2+2) = \log_2(1+x^2y^2)+1 \Leftrightarrow x^4y^2+2 = 2+2x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2(x^4-2x^2) = 0 \underset{y>0}{\Leftrightarrow} x^4-2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \sqrt{2}, \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Каждому из найденных значений x соответствует единственное значение

$$y = e^{2|x|}.$$

Ответ: система имеет единственное решение $(0; 1)$ при $a = 1$.

21. C 6 № 500452. Каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5 , 7, −8, 9 по одному записывают на 8 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5 , 7, −8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение.

а) Среди восьми данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю.

б) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 1.

в) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4.

Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: $(1;-2)$; $(-2;1)$; $(-3;4)$; $(4;-3)$; $(-5;7)$; $(7;-5)$; $(-8;9)$; $(9;-8)$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.