Вариант № 2887240

1. B 1 № 77334. В обменном пункте 1 гривна стоит 3 рубля 70 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на гривны и купили 3 кг помидоров по цене 4 гривны за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

Решение.

За 3 кг помидоров отдыхающие заплатили $4 \cdot 3 = 12$ гривен. Значит, в рублях они заплатили: $12 \cdot 3{,}7 = 44{,}4$ рубля. Округляем до целого числа, получаем 44.

Ответ: 44.

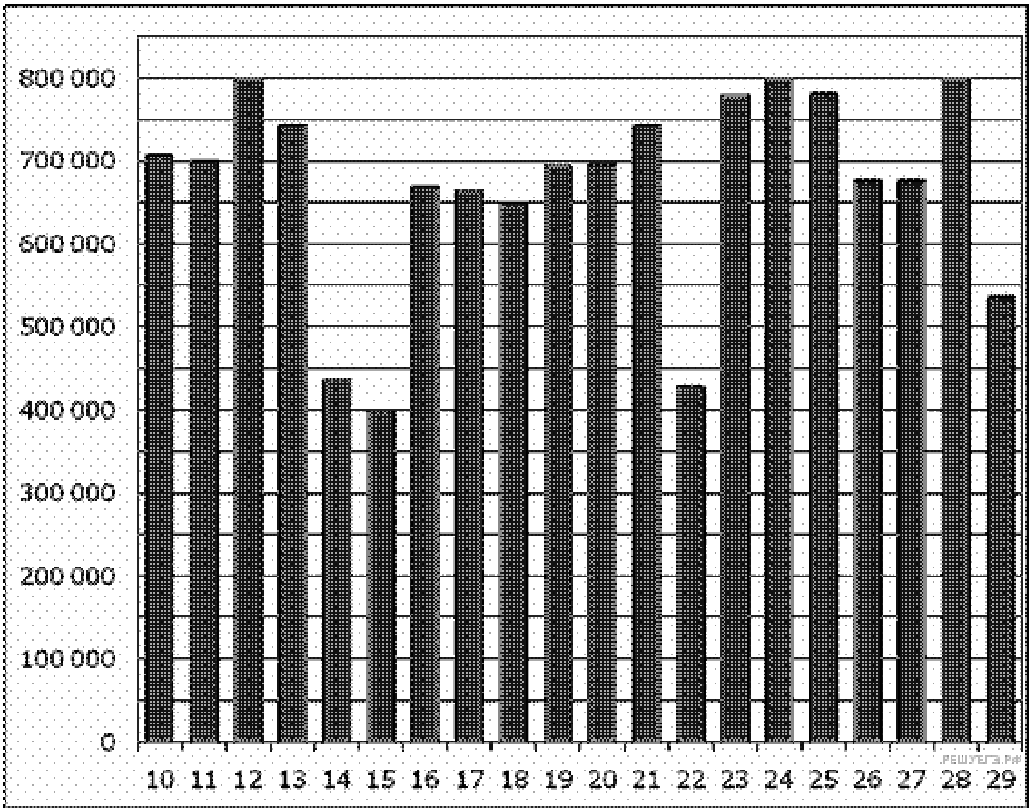
2. B 2 № 77353. В сентябре 1 кг слив стоил 60 рублей. В октябре сливы подорожали на 25%. Сколько рублей стоил 1 кг слив после подорожания в октябре?

Решение.

В октябре сливы подорожали на $60 \cdot 0{,}25 = 15$ рублей. Значит, 1 кг слив после подорожания в октябре стал стоить $60 + 15 = 75$ рублей.

Ответ: 75.

3. B 3 № 28763. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, сколько раз количество посетителей сайта РИА Новости принимало наибольшее значение.



Решение.

Из диаграммы видно, что посетителей сайта РИА Новости принимало наибольшее значение 3 раза (см. рисунок).

Ответ: 3.

4. B 4 № 26682. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

	1	2	3
Автобусом	От дома до автобусной станции — 15 мин	Автобус в пути: 2 ч 15 мин.	От остановки автобуса до дачи пешком 5 мин.
Электричкой	От дома до станции железной дороги — 25 мин.	Электричка в пути: 1 ч 45 мин.	От станции до дачи пешком 20 мин.
Маршрутным такси	От дома до остановки маршрутного такси — 25 мин.	Маршрутное такси в дороге: 1 ч 35 мин.	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 40 минут

Решение.

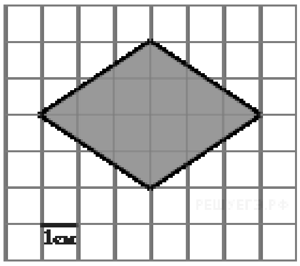
При поездке на автобусе потребуется времени 15 мин. + 2 ч. 15 мин. + 5 мин. = 2 ч. 35 мин.

При поездке электричкой потребуется времени 25 мин. + 1 ч. 45 мин. + 20 мин. = 2 ч. 30 мин. = 2,5 ч.

При поездке маршрутным такси потребуется времени 25 мин. + 1 ч. 35 мин. + 40 мин. = 2 ч. 40 мин.

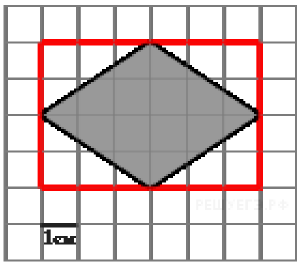
Ответ: 2,5.

5. B 5 № 27553. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



Решение.

Площадь четырехугольника равна разности площади прямоугольника и четырех равных прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного четырехугольника. Поэтому



$$S = 6 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 12 \text{ см}^2.$$

Ответ: 12.

Примечание.

Заданный четырехугольник — ромб. Его площадь равна половине произведения диагоналей и равна 12.

6. B 6 № 282857. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение.

По условию на каждые 100 + 8 = 108 сумок приходится 100 качественных сумок. Значит, вероятность того, что купленная сумка окажется качественной, равна

$$\frac{100}{108} = 0{,}925925\ldots \approx 0{,}93.$$

Ответ: 0,93.

7. B 7 № 26657. Найдите корень уравнения $\log_4(x+3)=\log_4(4x-15)$.

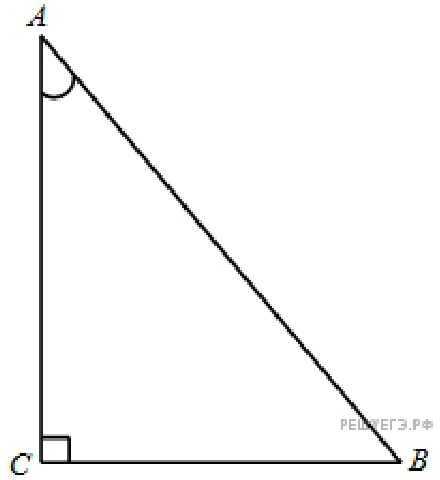
Решение.

Логарифмы двух выражений равны, если сами выражения равны и при этом положительны:

$$\log_4(x+3)=\log_4(4x-15) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4x-15, \\ 4x-15>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ 4x>15 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Ответ: 6.

8. B 8 № 27246. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC=4,8, \cos A=\frac{7}{25}$. Найдите AB.

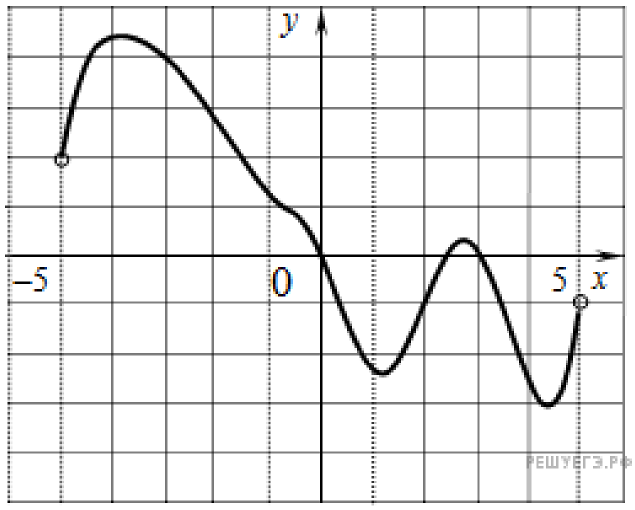


Решение.

$$AB=\frac{BC}{\sin A}=\frac{BC}{\sqrt{1-\cos^2 A}}=\frac{4,8}{\sqrt{1-\frac{49}{625}}}=4,8\cdot\frac{25}{24}=5.$$

Ответ: 5.

9. B 9 № 27488. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;\ 5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



Решение.

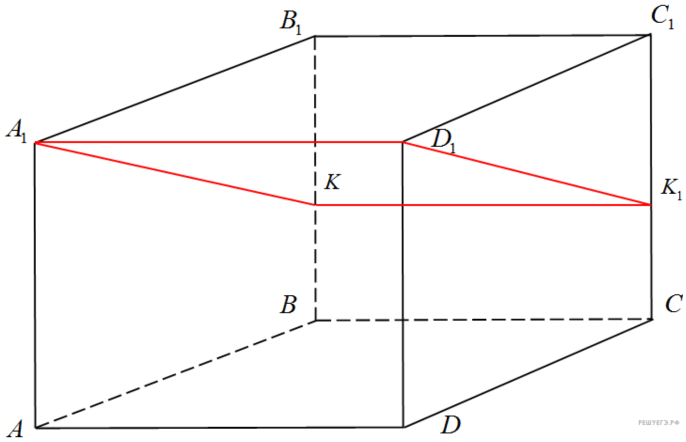
Производная функции отрицательна на тех интервалах, на которых функция убывает, т. е. на интервалах (−3,8; 1,2) и (2,8; 4,4). В них содержатся целые точки −3, −2, −1, 0, 1, 3, 4. Их 7 штук.

Ответ: 7.

10. B 10 № 315131. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB=2$, ребро $AD=\sqrt{5}$, ребро $AA_1=2$. Точка K — середина ребра BB_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1,D_1 и K.

Решение.

Сечение пересекает параллельные грани по параллельным отрезкам. Поэтому четырехугольник $A_1KK_1D_1$ — параллелограмм. Кроме того, ребро A_1D_1 перпендикулярно граням DD_1C_1C и AA_1B_1B, поэтому углы A_1D_1K и D_1A_1K — прямые. Следовательно, сечение $A_1KK_1D_1$ — прямоугольник.



Из прямоугольного треугольника A_1B_1K по теореме Пифагора найдем A_1K :

$$A_1K=\sqrt{(A_1B_1)^2+(B_1K)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}.$$

Тогда площадь прямоугольника $A_1KK_1D_1$ равна:

$$A_1D_1\cdot A_1K=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5.$$

Ответ:5.

11. B 11 № 26838. Найдите значение выражения $\dfrac{15\sqrt[5]{\sqrt[28]{a}}-7\sqrt[7]{\sqrt[20]{a}}}{2\sqrt[35]{\sqrt[4]{a}}}$ при $a>0$.

Решение.

Выполним пеобразования:

$$\frac{15\sqrt[5]{\sqrt[28]{a}}-7\sqrt[7]{\sqrt[20]{a}}}{2\sqrt[35]{\sqrt[4]{a}}}=\frac{15\sqrt[140]{a}-7\sqrt[140]{a}}{2\sqrt[140]{a}}=\frac{8\sqrt[140]{a}}{2\sqrt[140]{a}}=\frac{8}{2}=4.$$

Ответ: 4.

12. B 12 № 27955. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h=5t^2$, где h – расстояние в метрах, t – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

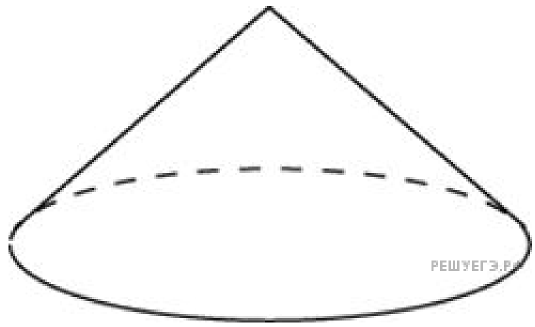
Решение.

Пусть h_1 – расстояние до воды до дождя, h_2 – расстояние до воды после дождя. После дождя уровень воды в колодце повысится, расстояние до воды уменьшится, и время падения уменьшится, станет равным $t=0,6-0,2=0,4$ с. Уровень воды поднимется на h_1-h_2 метров.

$$h_1-h_2=5\cdot 0,6^2-5\cdot 0,4^2=1$$

Ответ: 1.

13. B 13 № 27093. Найдите объем V конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\dfrac{V}{\pi}$.



Решение.

Объем конуса равен

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S – площадь основания, а h – высота конуса. Высоту конуса найдем по свойству стороны прямоугольного треугольника, находящейся напротив угла в $30°$ – она вдвое меньше гипотенузы, которой в данном случае является образующая конуса. Радиус основания найдем по теореме Пифагора:

$$r = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}.$$

Тогда объем

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3 \cdot 1 = \pi.$$

Ответ: 1.

14. B 14 № 99566. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Решение.

Обозначим первоначальную стоимость акций за 1. Пусть в понедельник акции компании подорожали на $c \cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1 + c \cdot 1$. Во вторник акции подешевели на $c \cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1 + c - c(1 + c)$. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник, то есть 0,96. Таким образом,

$$1 + c - c(1 + c) = 0,96 \Leftrightarrow 1 - c^2 = 0,96 \Leftrightarrow c^2 = 0,04 \underset{c>0}{\Leftrightarrow} c = 0,2.$$

Ответ: 20.

15. B 15 № 26718. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

Решение.

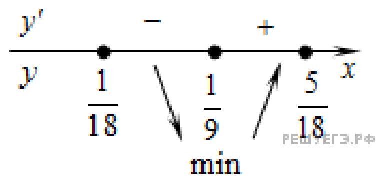
Функция определена и дифференцируема на заданном отрезке. Найдем ее производную:

$$y'(x) = 9 - \frac{1}{x}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 9 - \frac{1}{x} = 0, \\ \frac{1}{18} \le x \le \frac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9}, \\ \frac{1}{18} \le x \le \frac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке, и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = \frac{1}{9}$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} \cdot 9 - \ln 1 + 3 = 4.$$

Ответ: 4.

16. C 1 № 484542. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + \cos x = 0, \\ (5\sqrt{\cos x} - 1)(4y + 5) = 0. \end{cases}$

Решение.

Из второго уравнения получаем:

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{4}, \\ \cos x \ge 0 \end{cases} \text{ или } \cos x = \frac{1}{25}.$$

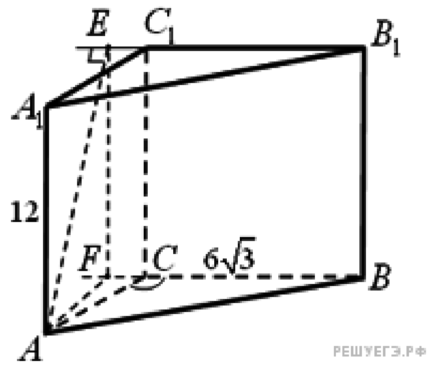
Если $y = -\frac{5}{4}$, то из первого уравнения $\cos x = \frac{5}{4}$. Уравнение не имеет решений. Если $\cos x = \frac{1}{25}$, то $x = \pm\arccos\frac{1}{25} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем: $y = -\frac{1}{25}$.

Ответ: $\left\{ \left(\arccos\frac{1}{25} + 2\pi n,\ -\frac{1}{25}\right),\ \left(-\arccos\frac{1}{25} + 2\pi n, -\frac{1}{25}\right)\ :\ n \in \mathbb{Z} \right\}$.

17. C 2 № 500007. Основанием прямой призмы $ABCA_1B1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, боковая сторона которого равна $6\sqrt{3}$, а угол ACB равен 120°. Найдите расстояние от точки А до прямой B_1C_1, если известно, что боковое ребро данной призмы равно 12.

Решение.

Опустим из точки A перпендикуляр AE на прямую B_1C_1 и проведем в плоскости грани CBB_1C_1 прямую EF, параллельную прямой C_1C. Так как $C_1C \perp ABC$, то и $EF \perp ABC$, а, значит, прямая AF является проекцией прямой AE на плоскость ABC. Поскольку $B_1C_1 \parallel BC$, то $AE \perp BC$, а, следовательно, и $AF \perp CB$ согласно теореме о трех перпендикулярах.



Далее находим:

1) из $\Delta ACF: AF = AC\sin\angle ACF = 6\sqrt{3}\sin 60^\circ = 9$;

2) из $\Delta AEF: AE = \sqrt{AF^2+EF^2} = 15$.

Ответ: 15.

18. C 3 № 500589. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2} \le \dfrac{(3x+1)^2}{4}, \\ \dfrac{x^3+37}{(x+4)^3} \ge 1+\dfrac{1}{(x+4)^2}. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\frac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2} \le \frac{(3x+1)^2}{4} \Leftrightarrow 2(x-1)^2+8(x+1)^2 \le (3x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+2+8x^2+16x+8 \le 9x^2+6x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+9 \le 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=-3.$$

Проверим, удовлетворяет ли число -3 второму неравенству:

$$\frac{-27+37}{1} \ge 1+\frac{1}{(-3+4)^2} \Leftrightarrow 10 \ge 2,$$

что верно. Следовательно, число -3 удовлетворяет второму неравенству.

Ответ: -3

19. C 4 № 484610. В треугольнике ABC, $AB=15$, $BC=7$, $CA=9$. Точка D лежит на прямой BC причем $BD:DC=5:7$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение.

Пусть $AD = d, BD = x, DC = y$. Используя свойства касательных, подсчитаем разными способами периметры треугольников

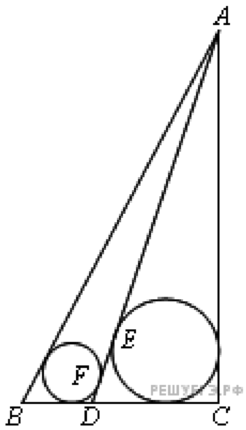
$$P_{ADC} = AE + ED + DC + AC = d + y + 9 = 2DE + 2 \cdot 9.$$

Откуда получаем: $DE = \dfrac{d+y-9}{2}$. Аналогично, $DF = \dfrac{d+x-15}{2}$.

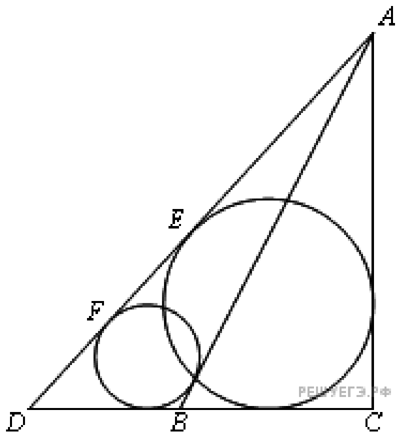
Тогда , $EF = |DE - DF| = \left|\dfrac{6+y-x}{2}\right|$.

Возможны два случая:

1. Точка D лежит на отрезке BC. Тогда $x = \dfrac{35}{12},\ y = \dfrac{49}{12}$, значит $EF = \dfrac{43}{12}$.



2. Точка D лежит вне отрезка BC. Тогда $y - x = BC = 7$, значит $EF = \dfrac{6+7}{2} = \dfrac{13}{2}$.



Ответ: $\dfrac{43}{12}$ или $\dfrac{13}{2}$.

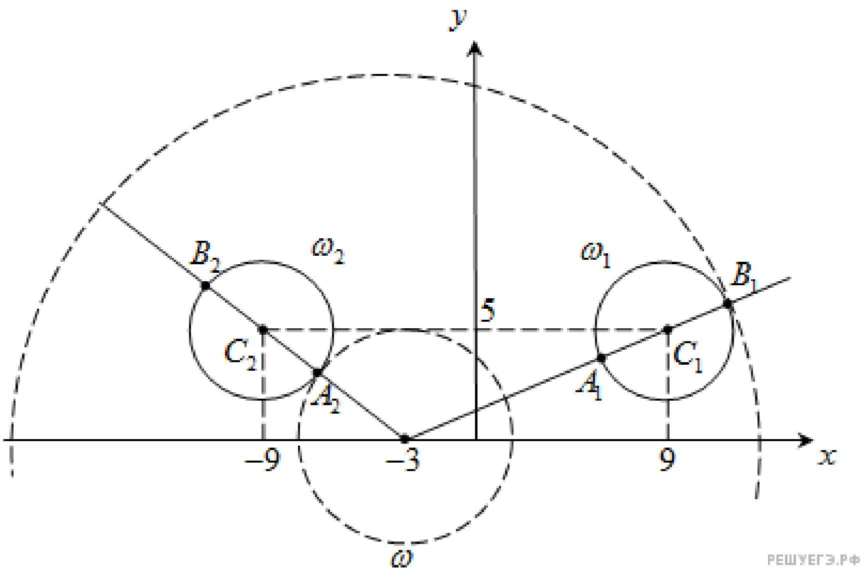
20. C 5 № 485952. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x|-9)^2 + (y-5)^2 = 9, \\ (x+3)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение задаёт на плоскости окружности ω_1 и ω_2 радиуса 3,симметричные относительно оси ординат. Центры этих окружностей — точки $C_1\,(9;\ 5)$ и $C_2\,(-9;5)$. Второе уравнение — уравнение окружности ω радиуса $a>0$ с центром $C\,(-3;\ 0)$.



Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается одной из окружностей ω_1 и ω_2, но не имеет общих точек с другой окружностью.

Из точки C проведём лучи CC_1 и CC_2 и обозначим $A_1,\ \ B_1,\ \ A_2,\ \ B_2$ точки их пересечения с окружностями ω_1 и ω_2 (см. рис.).

Заметим, что $CC_2 < CC_1$, поэтому $CA_2 < CA_1$ и $CB_2 < CB_1$. Значит, если $a = CA_2$, то ω касается ω_2, но не имеет общих точек с ω_1. Если $a = CB_1$, то ω касается ω_1, но не имеет общих точек с ω_2.

$$CA_2 = CC_2 - C_2A_2 = \sqrt{(9-3)^2+5^2} - 3 = \sqrt{61} - 3;$$

$$CB_1 = CC_1 + C_1B_1 = \sqrt{(9+3)^2+5^2} + 3 = 13 + 3 = 16.$$

Сравним CA_1 и CB_2:

$$CA_1 = \sqrt{(9+3)^2+5^2} - 3 = 10, CB_2 = \sqrt{(9-3)^2+5^2} + 3 = \sqrt{61} + 3.$$

Получаем $CA_1 < CB_2$. Значит, если ω касается ω_1 в точке A_1, то ω пересекает ω_2 в двух точках. Аналогично, если ω касается ω_2 в точке B_2, то ω пересекает ω_1 в двух точках. Следовательно, других решений, кроме двух найденных, система не имеет.

Ответ: $\sqrt{61} - 3$ или 16.

21. C 6 № 484667. Найдите все тройки натуральных чисел k, m и n, удовлетворяющие уравнению $2 \cdot k! = m!\ - 2 \cdot n!$, где $1! = 1;\ 2! = 1 \cdot 2 = 2;\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Решение.

1. Так как $m! = 2 \cdot k! + 2 \cdot n!$, то $n < m$ и $k < m$.

2. Пусть $k \leq n$, тогда $4 \cdot n! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (n+1) \cdot n!$, откуда $4 \geq n+1$ и $k \leq n \leq 3$.

3. Пусть $k > n$, тогда $4 \cdot k! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (k+1) \cdot k!$, откуда $4 \geq k+1$ и $n \leq k \leq 3$.

4. Далее конечным перебором значений $1 \leq n \leq 3, 1 \leq k \leq 3$ находим все решения:

n	***k***	$m! = 2 \cdot k! + 2 \cdot n!$	***m***
3	3	24	4
3	2	16	нет решений
3	1	14	нет решений
2	3	16	нет решений
2	2	8	нет решений
2	1	6	3
1	3	14	нет решений
1	2	6	3
1	1	4	нет решений

Ответ: $k = 1,\ n = 2,\ m = 3;\ k = n = 3,\ m = 4;\ k = 2,\ n = 1,\ m = 3.$