Вариант № 2887110

1. В 1 № 24655. В университетскую библиотеку привезли новые учебники по геометрии для 2—3 курсов, по 280 штук для каждого курса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 7 полок, на каждой полке помещается 30 учебников. Сколько шкафов можно полностью заполнить новыми учебниками?

Решение.

Всего привезли 280 · 2 = 560 учебников по геометрии. В книжном шкафу помещается 30 · 7 = 210 учебников. Разделим 560 на 210:

$$\frac{560}{210} = \frac{56}{21} = 2\frac{2}{3}.$$

Значит, полностью можно будет заполнить 2 шкафа.

Ответ: 2.

2. В 2 № 77344. Призерами городской олимпиады по математике стало 48 учеников, что составило 12% от числа участников. Сколько человек участвовало в олимпиаде?

Решение.

Разделим 48 на 0,12:

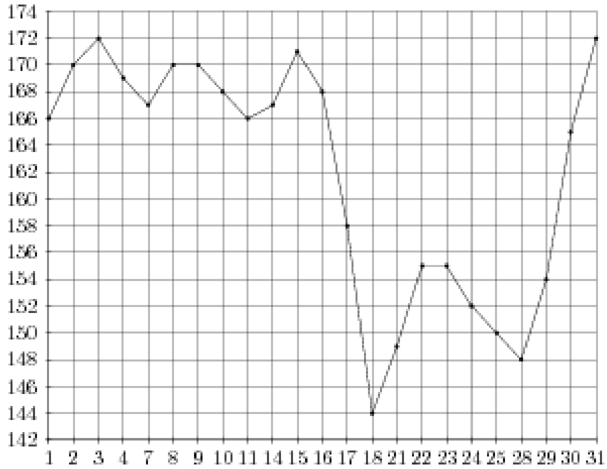
$$\frac{48}{0,12} = \frac{4800}{12} = 400.$$

Значит, в олимпиаде участвовало 400 человек.

Ответ: 400.

3. В 3 № 263737.

На рисунке жирными точками показана цена палладия, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена палладия в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой палладия за указанный период. Ответ дайте в рублях за грамм.



Решение.

Из графика видно, что наибольшая и наименьшая цены за указанный период составили 172 рубля и 144 рубля соответственно (см. рисунок). Их разность равняется 28 рублям.

Ответ: 28.

4. B 4 № 26674. Для изготовления книжных полок требуется заказать 48 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,25 $м^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекол и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 $м^2$)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	420	75
Б	440	65
В	470	55

Решение.

Общая площадь стекла равна $48 \cdot 0{,}25 = 12$ $м^2$. Рассмотрим различные варианты.

Стоимость заказа в фирме *А* складывается из стоимости стекла $420 \cdot 12 = 5040$ руб. и стоимости его резки и шлифовки $75 \cdot 48 = 3600$ руб. и равна 8640 руб.

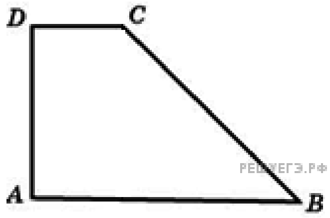
Стоимость заказа в фирме *Б* складывается из стоимости стекла $440 \cdot 12 = 5280$ руб. и стоимости его резки и шлифовки $65 \cdot 48 = 3120$ руб. и равна 8400 руб.

Стоимость заказа в фирме *В* складывается из стоимости стекла $470 \cdot 12 = 5640$ руб. и стоимости его резки и шлифовки $55 \cdot 48 = 2640$ руб. и равна 8280 руб.

Стоимость самого дешевого заказа составит 8280 рублей.

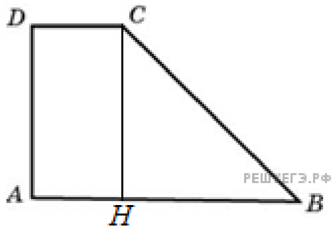
Ответ: 8280.

5. B 5 № 27634. Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 4. Ее площадь равна 64. Найдите острый угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



Решение.

$$S_{ABCD} = \frac{(AB+CD)\cdot CH}{2} \Leftrightarrow CH = \frac{2S_{ABCD}}{AB+CD} = \frac{2\cdot 64}{16} = 8.$$



Рассмотрим прямоугольный треугольник CHB. $BH = AB - CD = 8$. $CH = HB$, значит, треугольник CHB — равнобедренный. Тогда $\angle B = 45^\circ$.

Ответ: 45.

6. B 6 № 319355. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение.

Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: $0{,}52 \cdot 0{,}3 = 0{,}156$.

Ответ: 0,156.

7. B 7 № 13381.

Найдите корни уравнения: $\cos\frac{8\pi x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

Последовательно получаем:

$$\cos\frac{8\pi x}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{8\pi x}{6}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n\Leftrightarrow x=\frac{\pm1+12n}{8}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+12n}{8};\\ x=\dfrac{-1+12n}{8},\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Значениям $n\ge1$ соответствуют положительные корни.

Если $n=0$, то $x=\frac{1}{8}$ и $x=-\frac{1}{8}$.

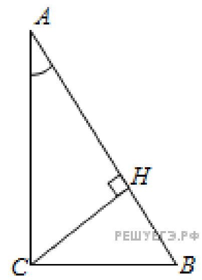
Если $n=-1$, то $x=-\frac{11}{8}$ и $x=-\frac{13}{8}$.

Значениям $n\le-2$ соответствуют меньшие значения корней.

Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число $-\frac{1}{8}$.

Ответ: −0,125.

8. B 8 № 27262. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH – высота, $AB=27$, $\cos A=\frac{2}{3}$. Найдите AH.



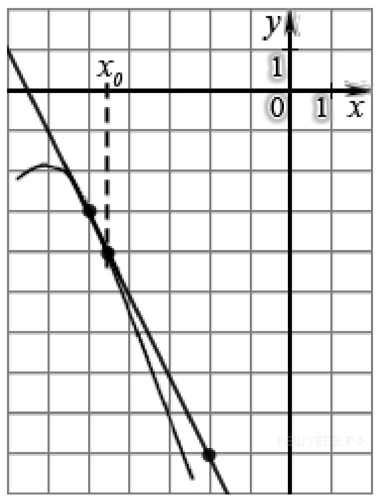
Решение.

Заметим, что $AC=AB\cos A$. Тогда

$$AH=AC\cos A=AB\cos^2 A=27\cdot\frac{4}{9}=12.$$

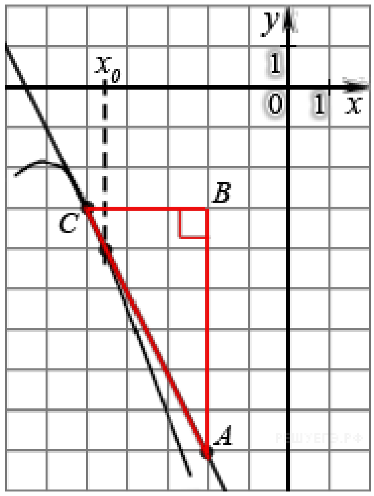
Ответ: 12.

9. B 9 № 27505. На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.



Решение.

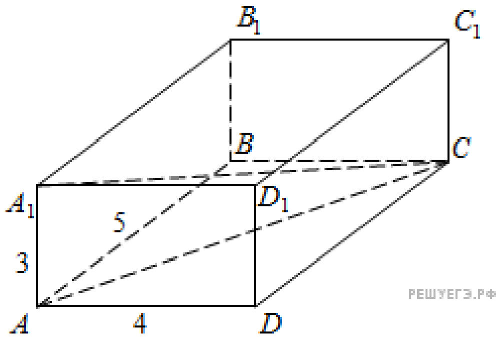
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (−2; −9), B (−2; −3), C (−5; −3). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB. Поэтому



$$y'(x_0) = \text{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\text{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{6}{3} = -2.$$

Ответ: -2.

10. B 10 № 245359. Найдите квадрат расстояния между вершинами C и A_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 4$, AA_1=3.



Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AA_1C, в котором A_1C является гипотенузой. По теореме Пифагора

$$A_1C^2 = AA_1^2 + AC^2.$$

В прямоугольнике $ABCD$ AC – диагональ, AB=CD. Значит,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 16 + 25 = 41,$$
$$A_1C^2 = 9 + 41 = 50.$$

Ответ: 50.

11. B 11 № 77390. Найдите значение выражения $(432^2 - 568^2) : 1000$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$(432^2 - 568^2) : 1000 = \frac{(432 - 568)(432 + 568)}{1000} = \frac{-136 \cdot 1000}{1000} = -136.$$

Ответ: -136.

12. B 12 № 27996. Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\upsilon = 3$ моля воздуха объемом $V_1 = 8$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \upsilon T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 5{,}75$ – постоянная, а $T = 300$ – температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10350 Дж?

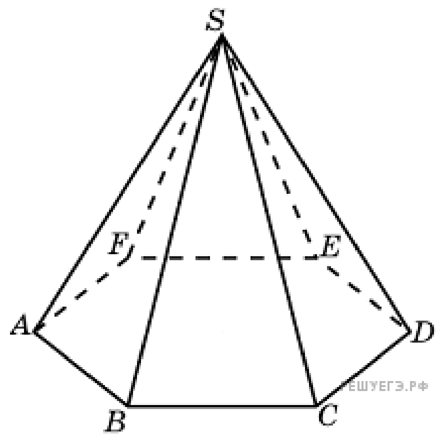
Решение.

Задача сводится к решению уравнения $\alpha \upsilon T \log_2 \frac{V_1}{V_2} = 10350$ при заданных значениях постоянной $\alpha = 5{,}75$, температуры воздуха $T = 300$ К, количества воздуха $\upsilon = 3$ моль и объема воздуха $V_1 = 8$ л:

$$5,75 \cdot 3 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{8}{V_2} = 10350 \Leftrightarrow \log_2 \frac{8}{V_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{8}{V_2} = 4 \Leftrightarrow V_2 = 2 \text{ л}.$$

Ответ: 2.

13. B 13 № 27089. Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в четыре раза?



Решение.

Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S – площадь основания, а h – высота пирамиды. При увеличении высоты в 4 раза объем пирамиды также увеличится в 4 раза.

Ответ: 4.

14. B 14 № 26591. От пристани A к пристани B отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним со скоростью на 1 км/ч большей отправился второй. Расстояние между пристанями равно 110 км. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть u км/ч — скорость второго теплохода, тогда скорость первого теплохода равна $u-1$ км/ч. Первый теплоход находился в пути на 1 час больше, чем второй, отсюда имеем:

$$\frac{110}{u-1} - \frac{110}{u} = 1 \Leftrightarrow \frac{110}{u^2-u} = 1 \Leftrightarrow 110 = u^2 - u \Leftrightarrow u^2 - u - 110 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 11; \\ u = -10 \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u = 11.$$

Ответ: 11.

15. B 15 № 77493. Найдите точку минимума функции $y = (0,5 - x)\cos x + \sin x$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

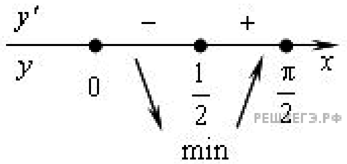
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x-0,5)\sin x - \cos x + \cos x = (x-0,5)\sin x.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} (x-0,5)\sin x = 0, \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}, \\ x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

16. C 1 № 501195. а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}, 0\right]$.

Решение.

По формуле привидения получаем $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$. Далее имеем:

$$2\cos^2 x = \cos x \Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0. \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

Отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}, 0\right]$ принадлежат корни $-\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}$ и $-\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, б) $-\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{3}$.

17. C 2 № 485934. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = 5$, $BC = 8$. Высота призмы равна 3. Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1.

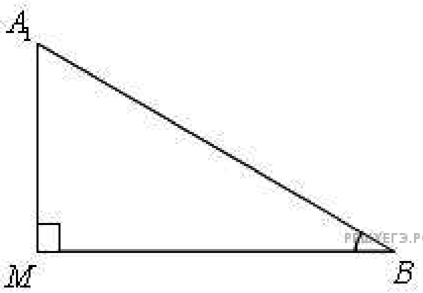
Решение.

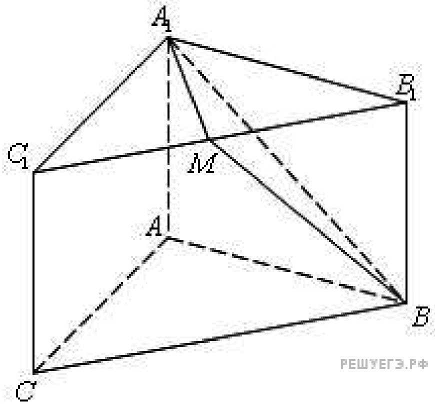
Поскольку призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая, то высота A_1M треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярна плоскости BCC_1. Поэтому прямая BM — проекция прямой A_1B на плоскость BCC_1. Значит, искомый угол равен углу A_1BM.

Так как $B_1M = 4, BB_1 = 3$, имеем: $BM = 5, A_1M = \sqrt{A_1B_1^2 - B_1M^2} = 3$.

Отсюда $\operatorname{tg} \angle A_1BM = \frac{A_1M}{BM} = \frac{3}{5}$. Следовательно, $\angle A_1BM = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{3}{5}$.





18. С 3 № 485969. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{6}{x-3} \geq 0 \\ \sqrt{x^2+34} \geq 6. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{6}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6+2(x^2-4x+3)-6(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0, \\ 1 < x \leq \frac{5}{3}, \\ 2 < x < 3. \end{array}\right.$$

2. Решим второе неравенство:

$$x^2+34 \geq 36 \Leftrightarrow x^2 \geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\sqrt{2}, \\ x \geq \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

3. Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Поскольку $1 < \sqrt{2} < \frac{5}{3}$, получаем.

Ответ: $x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup \left[\sqrt{2}, \frac{5}{3}\right] \cup (2, 3)$.

19. C 4 № 501458. Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина C, на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 16$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Решение.

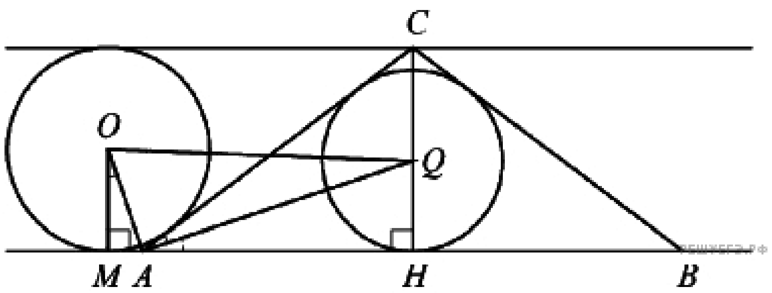
Пусть CH — высота треугольника ABC, r и Q — радиус и центр вписанной окружности, $CH = 6$, $AH = 8$, поэтому $AC = 10$. Найдем площадь, полу периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC:

$$S = \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{6 \cdot 16}{2} = 48,\ p = \frac{1}{2}(AC + AB + CB) = AC + AH = 18.$$

Тогда $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{8}{3}$. Кроме того, по теореме Пифагора

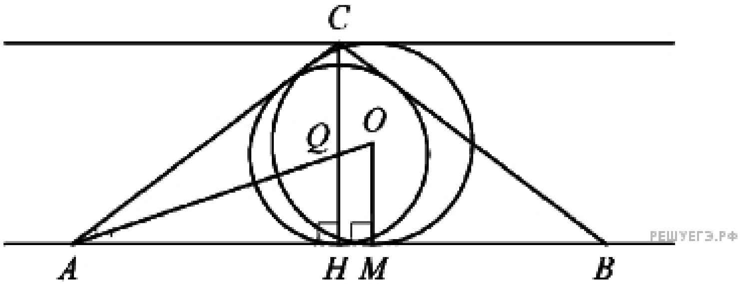
$$AQ = \sqrt{AH^2 + QH^2} = \sqrt{64 + \frac{64}{9}} = \frac{8\sqrt{10}}{3}.$$

Пусть окружность с центром в точке O касается боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC и данных параллельных прямых. Радиус этой окружности равен 3, поскольку он вдвое меньше расстояния между прямыми. Точку касания окружности с прямой AB обозначим M.



Пусть точки B и M лежат по разные стороны от точки A (рис. 1). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO и AQ — биссектрисы смежных углов $\angle MAC$ и $\angle CAB$ соответственно. Значит, $\angle OAQ = 90^0$, и $\angle MOA = \angle QAH$, поскольку эти углы образованы парами соответственно перпендикулярных прямых. Следовательно, прямоугольные треугольники OMA и AHQ подобны с коэффициентом $\dfrac{OM}{AH} = \dfrac{3}{8}$. Поэтому

$$OQ = \sqrt{OA^2 + AQ^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{8}AQ\right)^2 + AQ^2} = \sqrt{\frac{9}{64} + 1} \cdot AQ = \frac{\sqrt{73}}{8} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{730}}{3}.$$



Пусть точки B и M лежат по одну сторону от точки A (рис. 2). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому лучи AO и OQ совпадают и являются биссектрисой угла MAC Значит, прямоугольные треугольники AOM и AQH подобны с коэффициентом $\dfrac{OM}{QH} = \dfrac{3}{8/3} = \dfrac{9}{8}$.

Тогда

$$OQ = AO - AQ = \frac{9}{8}AQ - AQ = \frac{1}{8}\cdot\frac{8\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{730}}{3}$, $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

20. C 5 № 502026. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2 - 7a + 7\sqrt{2x^2+49} = 3|x-7a| - 6|x|$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

Рассмотрим две функции: $f(x) = a^2 - 7a + 7\sqrt{2x^2+49}$ и $g(x) = 3|x-7a| - 6|x|$. Поскольку $x^2 \geq 0$, получаем: $f(x) \geq f(0) = a^2 - 7a + 49$.

Функция $g(x) = 3|x-7a| - 6|x|$ является кусочно-линейной, причём при $x < 0$ угловой коэффициент равен либо 3, либо 9, а при $x > 0$ угловой коэффициент равен либо –3, либо –9. Значит, функция $g(x)$ возрастает при $x < 0$ и убывает при $x > 0$, поэтому $g(x) \leq g(0) = 21|a|$.

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда $f(0) \leq g(0)$:

$$a^2 - 7a + 49 \leq 21|a| \Leftrightarrow a^2 - 7a - 21|a| + 49 \leq 0.$$

Значит, либо $\begin{cases} a^2 - 28a + 49 \leq 0, \\ a \geq 0, \end{cases}$ откуда $14 - 7\sqrt{3} \leq a \leq 14 + 7\sqrt{3}$, либо

$\begin{cases} a^2 + 14a + 49 \leq 0, \\ a < 0, \end{cases}$ откуда $a = -7$.

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень при $a = -7$ и при $14 - 7\sqrt{3} \leq a \leq 14 + 7\sqrt{3}$ и не имеет корней при других значениях a.

Ответ: $a \in \{-7\} \cup [14 - 7\sqrt{3},\ 14 + 7\sqrt{3}]$.

21. C 6 № 500197. Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

Решение.

Обозначим суммы чисел в группах S_1, S_2, S_3, S_4 а указанную в условии сумму модулей их попарных разностей через A. Можно считать, что $S_1 \le S_2 \le S_3 \le S_4$.

а) Чтобы число A равнялось 0, необходимо, чтобы каждая из разностей $S_i - S_j$ равнялась 0, то есть $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Сумма всех двенадцати чисел $1 + 2 + \ldots + 11 + 12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$. С другой стороны, она равна $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4S_1$, но 78 не делится на 4. Значит, $A \ne 0$.

б) Чтобы число A равнялось 1, необходимо, чтобы все, кроме одной, разности $S_i - S_j$ равнялись 0. Значит, $S_1 < S_4$, но в этом случае каждая из сумм S_2, S_3 не равна хотя бы одной из сумм S_1, S_4 поэтому хотя бы три разности $S_i - S_j$ не равны 0 и число A не меньше 3. Значит, $A \ne 1$.

в) Выразим число A явно через S_1, S_2, S_3, S_4:

$$A = (S_2 - S_1) + (S_3 - S_1) + (S_4 - S_1) + (S_3 - S_2) + (S_4 - S_2) + (S_4 - S_3) = 3(S_4 - S_3) + 4(S_3 - S_2) + 3(S_2 - S_1).$$

В предыдущих пунктах было показано, что $A \ge 3$. Если $A = 3$, то $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 - 1$ или $S_4 = S_2 = S_3 = S_1 + 1$. В этом случае сумма всех двенадцати чисел равна $4S_1 + 1$ или $4S_4 - 1$, то есть нечётна, что неверно.

Для следующего разбиения чисел на группы: $\{12;7\}$; $\{11;6;2\}$; $\{10;5;4;1\}$; $\{9;8;3\}$ — число A равно 4.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.