Вариант № 2887103

1. B 1 № 26626. Шоколадка стоит 35 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 200 рублей в воскресенье?

Решение.

Разделим 200 на 35:

$$\frac{200}{35} = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}.$$

Значит, можно будет купить 5 шоколадок. Еще 2 будут даны в подарок. Всего можно будет получить 7 шоколадок.

Ответ: 7.

2. B 2 № 77340. В школе 124 ученика изучают французский язык, что составляет 25% от числа всех учеников. Сколько учеников учится в школе?

Решение.

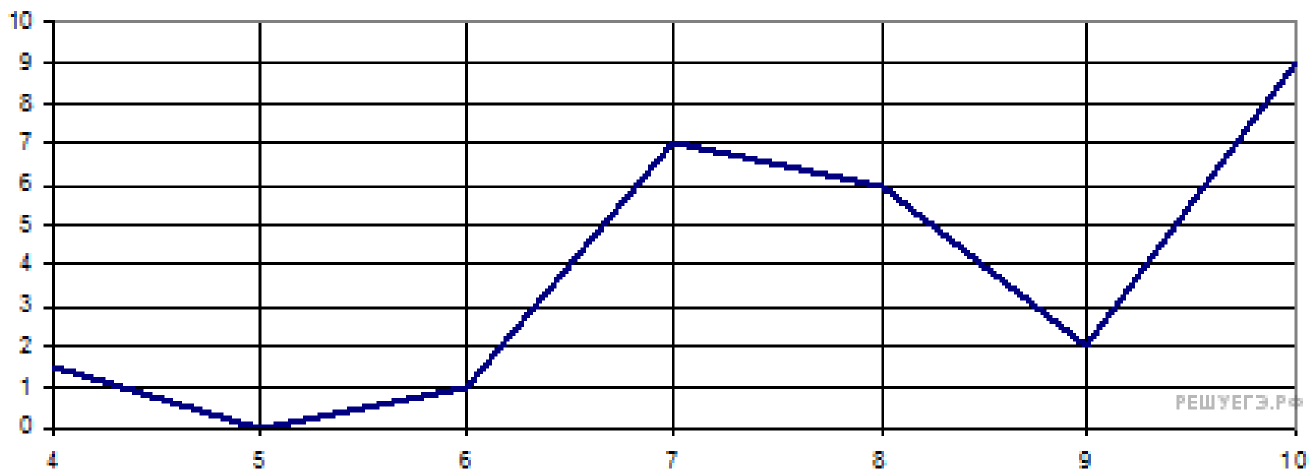
Разделим 124 на 0,25:

$$\frac{124}{0,25} = \frac{124 \cdot 100}{25} = 124 \cdot 4 = 496.$$

Значит, в школе учится 496 учеников.

Ответ: 496.

3. B 3 № 27529. На рисунке изображен график осадков в г. Калининграде с 4 по 10 февраля 1974 г. На оси абсцисс откладываются дни, на оси ординат — осадки в мм. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало от 2 до 8 мм осадков.



Решение.

Из графика видно, что от 2 до 8 мм осадков выпадало три дня: 7, 8 и 9 февраля (см. рисунок). Подробнее: 04.02 выпало 1,5 мм осадков, 05.02 — 0 мм, 06.02 — 1 мм, 07.02 — 7 мм, 08.02 — 6мм, 09.02 — 2 мм, 10.02 — 9 мм.

Ответ: 3.

4. B 4 № 77360. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести куртку ценой 9300 руб., рубашку ценой 1800 руб. и перчатки ценой 1200 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего:

1) Б. купит все три товара сразу.

2) Б. купит сначала куртку и рубашку, а потом перчатки со скидкой.

3) Б. купит сначала куртку и перчатки, а потом рубашку со скидкой.

В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

Решение.

Рассмотрим все случаи.

1) При покупке всех трёх товаров покупатель Б. потратит 9300 руб. + 1800 руб. + 1200 руб. = 12 300 руб.

2) При покупке куртки и рубашки покупатель Б. потратит 9300 руб. + 1800 руб. = 11 100 руб. Т. к. эта сумма больше 10 000 руб., то на следующую покупку покупателю будет предоставлена скидка $1200 \cdot 0{,}1 = 120$ руб. Поэтому перчатки будут приобретены за $1200 - 120 = 1080$ руб. В этом случае покупатель потратит 12 180 руб.

3) При покупке куртки и перчаток покупатель Б. потратит 9300 руб. + 1200 руб. = 10 500 руб. Т. к. эта сумма больше 10 000 руб., то то на следующую покупку покупателю будет предоставлена скидка $1800 \cdot 0{,}1 = 180$ руб. Поэтому рубашка будет приобретена за $1800 - 180 = 1620$ руб. В этом случае покупатель потратит 12 120 руб.

Меньше всего покупатель заплатит, если воспользуется третьим вариантом: сумма составит 12 120 руб.

Примечание.

Ранее текст задания был другим.

В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10% уплаченной суммы. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести куртку ценой 9300 руб., рубашку ценой 1800 руб. и перчатки ценой 1200 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего:

1) Б. купит все три товара сразу.

2) Б. купит сначала куртку и рубашку, а потом перчатки со скидкой.

3) Б. купит сначала куртку и перчатки, а потом рубашку со скидкой.

В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

Решение задания в предыдущей формулировке.

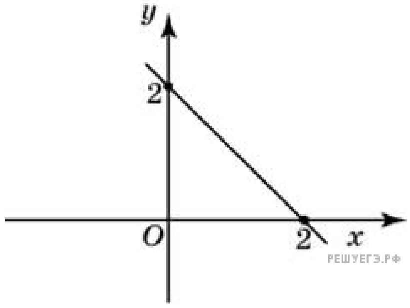
1) При покупке всех трёх товаров покупатель Б. потратит 9300 руб. + 1800 руб. + 1200 руб. = 12 300 руб.

2) При покупке куртки и рубашки покупатель Б. потратит 9300 руб. + 1800 руб. = 11 100 руб. Т. к. эта сумма больше 10 000 руб., то на следующую покупку покупателю будет предоставлена скидка $11\,100 \cdot 0{,}1 = 1110$ руб. Поэтому перчатки будут приобретены за $1200 - 1110 = 90$ руб. В этом случае покупатель потратит 11 190 руб.

3) При покупке куртки и перчаток покупатель Б. потратит 9300 руб. + 1200 руб. = 10 500 руб. Т. к. эта сумма больше 10 000 руб., то то на следующую покупку покупателю будет предоставлена скидка $10\,500 \cdot 0{,}1 = 1050$ руб. Поэтому рубашка будет приобретена за $1800 - 1050 = 750$ руб. В этом случае покупатель потратит 11 250 руб.

Меньше всего покупатель заплатит, если воспользуется вторым вариантом: сумма составит 11 190 руб.

5. B 5 № 27668. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами (2; 0) и (0; 2).



Решение.

Угловой коэфиициент прямой, проходящей через точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ и непараллельной оси ординат, вычисляется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставляя значения абсцисс и ординат точек (0; 2) и (2; 0), получаем: $k = -1$.

Приведем другое решение.

Уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент. Подставляя значения абсцисс и ординат точек, и решая систему полученых уравнений, получим $k = -1$.

Ответ: −1.

6. B 6 № 282854. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

Решение.

Равновозможны 4 исхода эксперимента: орел-орел, орел-решка, решка-орел, решка-решка. Орел выпадает ровно один раз в двух случаях: орел-решка и решка-орел. Поэтому вероятность того, что орел выпадет ровно 1 раз, равна

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

7. B 7 № 27465. Найдите корень уравнения $\sqrt{3x-8} = 5$.

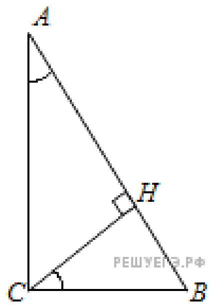
Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{3x-8} = 5 \Leftrightarrow 3x - 8 = 25 \Leftrightarrow 3x = 33 \Leftrightarrow x = 11.$$

Ответ: 11.

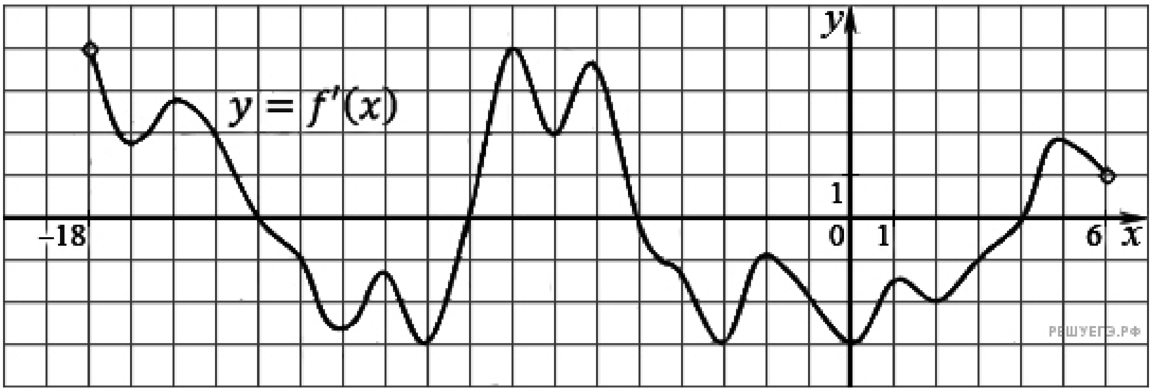
8. B 8 № 27260. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AB = 27$, $\sin A = \frac{2}{3}$. Найдите BH.



Решение.
Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. $BH = BC\sin\angle HCB = AB\sin A\sin\angle HCB = AB\sin^2 A = \frac{27\cdot 4}{9} = 12.$

Ответ: 12.

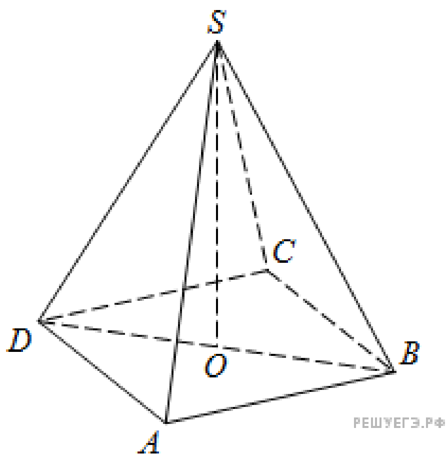
9. B 9 № 27495. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18;6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-13;1]$.



Решение.
Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с минуса на плюс. На отрезке $[-13;1]$ функция имеет одну точку минимума $x = -9$.

Ответ: 1.

10. B 10 № 911. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO = 15$, $BD = 16$. Найдите боковое ребро SA.



Решение.
В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды. тогда по теореме Пифагора

$$SA = SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \sqrt{SO^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{225 + 64} = 17.$$

Ответ: 17.

11. B 11 № 26853. Найдите значение выражения $\log_5 9 \cdot \log_3 25$.

Решение.
Выполним преобразования:

$$\log_5 9 \cdot \log_3 25 = 2\log_5 3 \cdot 2\log_3 5 = 4\log_5 3 \cdot \frac{1}{\log_5 3} = 4.$$

Ответ: 4.

12. B 12 № 27977. Коэффициент полезного действия (КПД) кормозапарника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой $m_{\text{в}}$ (в килограммах) от температуры t_1 до температуры t_2 (в градусах Цельсия) к количеству теплоты, полученному от сжигания дров массы $m_{\text{др}}$ кг. Он определяется формулой $\eta = \frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}}(t_2 - t_1)}{q_{\text{др}} m_{\text{др}}} \cdot 100\%$, где $c_{\text{в}} = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) – теплоёмкость воды, $q_{\text{др}} = 8,3 \cdot 10^6$ Дж/кг – удельная теплота сгорания дров. Определите наименьшее количество дров, которое понадобится сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть $m = 83$ кг воды от $10^\circ C$ до кипения, если известно, что КПД кормозапарника не больше 21%. Ответ выразите в килограммах.

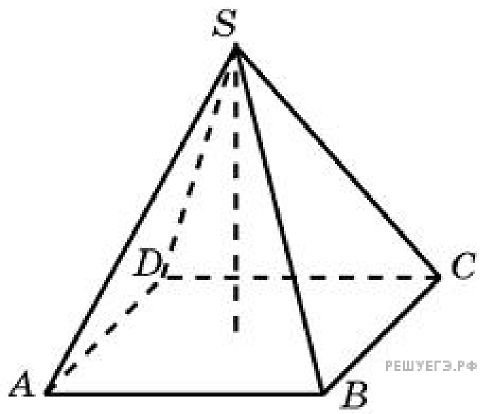
Решение.

Задача сводится к решению неравенства $\eta \le 21\%$. А при известных значениях теплоёмкости воды $c_{\text{в}} = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/кг, удельной теплоты сгорания дров $q_{\text{др}} = 8{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг, массы воды $m_{\text{в}} = 83$ кг и изменения температуры $t_2 - t_1 = 100 - 10 = 90$ К:

$$\eta \le 21 \Leftrightarrow \frac{4,2 \cdot 10^3 \ \cdot 83 \cdot 90}{8{,}3 \cdot 10^6 \ m_{\text{др}}} \cdot 100 \le 21 \Leftrightarrow \frac{4,2 \cdot 90}{m_{\text{др}}} \le 21 \Leftrightarrow m_{\text{др}} \ge 18 \text{ кг.}$$

Ответ: 18.

13. B 13 № 27178. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12, объем равен 200. Найдите боковое ребро этой пирамиды.



Решение.

Объем пирамиды с площадью основания S и высотой h равен $V = \frac{1}{3}Sh$, откуда площадь основания $S = \frac{3V}{h} = 50$.Сторона основания тогда $a = \sqrt{S} = 5\sqrt{2}$, а диагональ $d = a\sqrt{2} = 10$. Боковое ребро найдем по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Ответ: 13.

14. B 14 № 99615. Первый насос наполняет бак за 20 минут, второй — за 30 минут, а третий — за 1 час. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

Решение.

Обозначим объем бака за 1. Тогда три насоса, работая вместе, заполнят бак за

$$\frac{1}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}}=\frac{60}{3+2+1}=10 \text{ минут.}$$

Ответ: 10.

Приведем другое решение.

Первый насос за минуту наполняет одну двадцатую бака, второй — одну тридцатую, третий — одну шестидесятую. Работая вместе, за минуту они наполнят шесть шестидесятых или одну десятую бака. Значит, весь бак насосы наполнят за 10 минут.

Приведем другое решение.

За один час первый насос наполнит 3 бака, второй — 2 бака, а третий — 1 бак. Работая вместе, за один час они 6 баков. Значит, один бак насосы наполнят в шесть раз быстрее, т. е. за 10 минут.

15. B 15 № 245174. Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2-6x+11}$.

Решение.

Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min}=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает минимума в той же точке, в которой достигает минимума подкоренное выражение.

Ответ: 3.

16. C 1 № 485940. *а)* Решите уравнение $4\sin^2 x-12\sin x+5=0$.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi,\, 2\pi]$.

Решение.

Сделаем замену $\sin x=y$ и получим квадратное уравнение $4y^2-12y+5=0$, откуда, $y=\frac{1}{2}, y=\frac{5}{2}$. Уравнение $\sin x=\frac{5}{2}$ не имеет решений, а из уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ находим $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \in \mathbb{Z}$.

Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi,\, 2\pi]$.

$$-\pi \le \frac{\pi}{6}+2\pi n \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \le n \le \frac{11}{12} \Leftrightarrow n=0,\ x=\frac{\pi}{6};$$
$$-\pi \le \frac{5\pi}{6}+2\pi k \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{11}{12} \le k \le \frac{7}{12} \Leftrightarrow k=0, x=\frac{5\pi}{6}.$$

Отрезку $[-\pi,\, 2\pi]$ принадлежат корни $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: *а)* $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; *б)* $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

17. C 2 № 502314. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB=5,\ AD=4,\ AA_1=9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении 4:5, считая от вершины B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1.

Решение.

Пусть плоскость AOC_1 пересекает ребро DD_1 в точке P. Плоскость сечения пересекает плоскость CC_1D_1 по прямой C_1P, параллельной AO, следовательно, искомое сечение — параллелограмм AOC_1P (рис. 1).

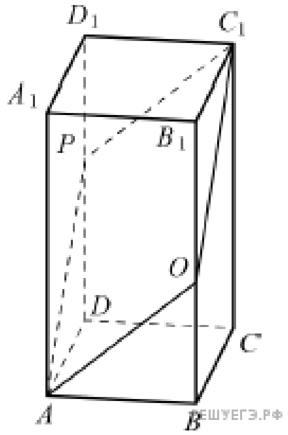


Рис. 1

Треугольники ADP и C_1B_1O равны, следовательно,

$$DP = B_1O = \frac{5}{9}BB_1 = 5;\ BO = BB_1 - B_1O = 4.$$

Далее,

$$AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \sqrt{41};\ AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{41},$$

значит, AOC_1Pи — ромб со стороной $\sqrt{41}$ и диагональю $AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{122}$ (рис. 2).

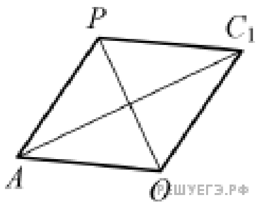


Рис. 2

Тогда другая диагональ

$$OP = 2\sqrt{A0^2 - \left(\frac{AC_1}{2}\right)^2} = \sqrt{42};\ S_{AOC_1P} = \frac{AC_1}{2} = \sqrt{1281}.$$

Ответ: $\sqrt{1281}$.

18. C 3 № 485976. Решите систему

$$\begin{cases} 9^{\lg x} + x^{2\lg 3} \le \dfrac{2}{3}, \\ \log_2^2 x + 5\log_2 x + 6 > 0. \end{cases}$$

Решение.

Решения обоих неравенств ищем при условии $x>0$. Так как при этом условии $9^{\lg x}=x^{2\lg 3}$, то решая первое неравенство, получаем

$$9^{\lg x}\le 3^{-1}\Leftrightarrow\ \lg x\le -\frac{1}{2}\Leftrightarrow\quad 0<x\le\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Решая второе неравенство, получаем:

$$\log_2^2 x+5\log_2 x+6>0\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\log_2 x<-3,\\ \log_2 x>-2.\end{array}\right.$$

Значит, $0<x<\frac{1}{8}$ или $x>\frac{1}{4}$.

Решением системы является общая часть решений двух неравенств.

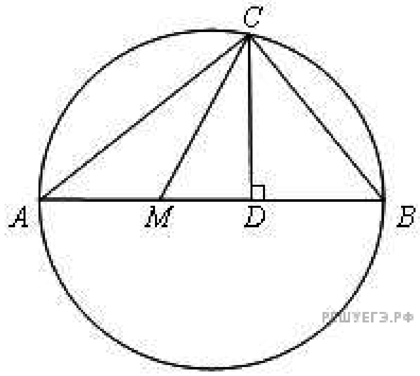
Поскольку $\frac{1}{\sqrt{10}}>\frac{1}{4}$, получаем: $0<x<\frac{1}{8}$ или $\frac{1}{4}<x\le\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $0<x<\frac{1}{8},\ \ \frac{1}{4}<x\le\frac{1}{\sqrt{10}}$.

19. C 4 № 485945. Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A, M и B на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.

Решение.

Точка C лежит на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle ACB = 90^\circ$.



По теореме Пифагора$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50.$ Пусть CD — высота треугольника ABC. Тогда:

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{40 \cdot 30}{50} = 24,$$
$$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{900 - 576} = 18.$$

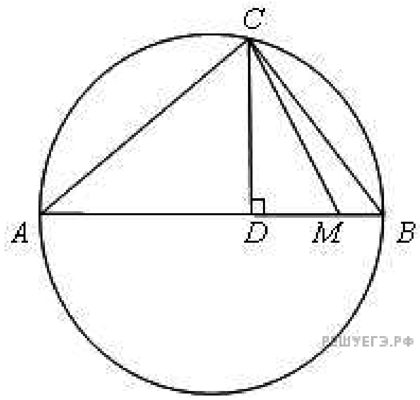
Из прямоугольного треугольника находим:

$$DM = \sqrt{CM^2 - CD^2} = \sqrt{29^2 - 24^2} = \sqrt{265}.$$

Если точка M лежит между точками A и D, то $MB = MD + BD = 18 + \sqrt{265}.$ Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (18 + \sqrt{265}) = 216 + 12\sqrt{265}.$$

Если точка M лежит между B и D , то $MB = BD - MD = 18 - \sqrt{265}.$



Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (18 - \sqrt{265}) = 216 - 12\sqrt{265}.$$

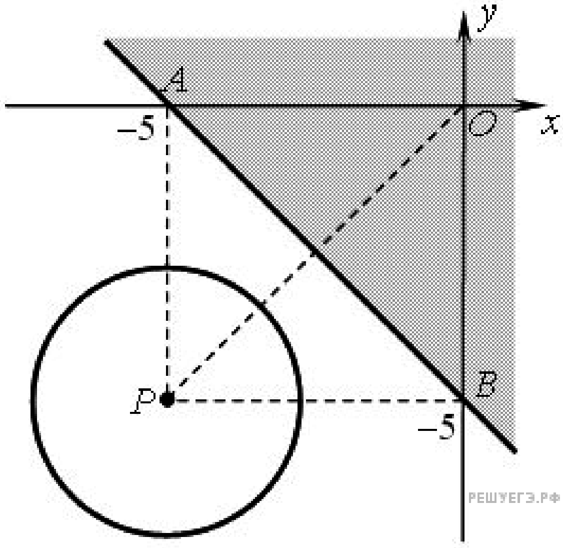
Ответ: $216 \pm 12\sqrt{265}.$

20. C 5 № 501399. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2xy + a} = x + y + 5$ не имеет решений.

Решение.

$$\sqrt{2xy+a}=x+y+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5 \geq 0, \\ 2xy+a=x^2+y^2+25+2xy+10x+10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5 \geq 0, \\ (x+5)^2+(y+5)^2=a+25. \end{cases}$$

Неравенство $x+y+5 \geq 0$ задает на координатной плоскости «верхнюю» полуплоскость с границей $x+y+5=0$, а уравнение $(x+5)^2+(y+5)^2=a+25$ при $a>-25$ — окружность с центром $P(-5;\,-5)$ и радиусом $R=\sqrt{a+25}$ (см. рисунок).



Окружность и полуплоскость не имеют общих точек тогда и только тогда, когда радиус окружности меньше половины диагонали *PO* квадрата *APBO*, т. е., $\sqrt{a+25}<\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, откуда $-25<a<-12{,}5$.

При $a<-25$ уравнение, а, следовательно, и вся система решений не имеют, а при $a=-25$ решением уравнения является пара $(-5;-5)$, которая не удовлетворяет неравенству $x+y+5 \geq 0$.

Ответ: $a<-12{,}5$.

21. C 6 № 503365. Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 20?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 81?

в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Решение.

Пусть данное число равно $100a + 10b + c$, где a, b и c — цифры сотен, десятков и единиц соответственно. Если частное этого числа и суммы его цифр равно к, то выполнено $100a + 10b + c = ka + kb + kc$.

а) Если частное равно 20, то $100a + 10b + c = 20a + 20b + 20c$; $80a = 10b + 19c$, что верно, например, при $b = 8$, $a = 1$, $c = 0$: частное числа 180 и суммы его цифр равно 20.

б) Если частное равно 81, то $100a + 10b + c = 81a + 81b + 81c$. Получаем: $a < 10$: $19a < 190$; $71b + 80c < 190$. Значит, $b + c < 0$. Но ни 71, ни 80, ни 142, ни 151, ни 1+160 не делится на 19. Значит, частное трёхзначного числа и суммы его цифр не может быть равным 81.

в) Частное числа 198 и суммы его цифр равно 11.

Пусть k — наименьшее натуральное значение частного числа н суммы его цифр — равно 10 или меньше. Тогда $(100-k)\,a+(10-k)\,b=(k-1)\,c$. Учитывая условие $k \leq 10$, получаем неравенство

$$100-k \leq (100-k)\,a \leq (100-k)\,a+(10-k)\,b=(k-1)\,c \leq 9\,(k-1),$$

откуда $100-k \leq 9\,(k-1) \Leftrightarrow 10k \geq 109 \Leftrightarrow k \geq 10{,}9$. Это противоречит условию $k \leq 10$. Значит, наименьшее натуральное значение частного трёхзначного числа и суммы его цифр равно 11.

Ответ: а) да; б) нет; в) 11.