Математический анализ

Понятие функции. Основные свойства функций

Если каждому элементу (значению) x множества X поставлен в соответствие по некоторому правилу f единственный элемент (значение) y множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$.

При этом x *называется независимой переменной (или аргументом),* y *— зависимой переменной, множество* $D(f) = X$ *— областью определения функции, а множество* $E(f) \subseteq Y$ *всех значений функции — областью изменения функции.*

Понятие функции. Основные свойства функций

Способы задания функций.

- *Аналитический способ — функция задается формулой вида $y = f(x)$. Одна функция может определяться и набором формул: разным участкам области определения функции соответствуют разные формулы (разные аналитические выражения).*
- *Табличный способ — функция задается таблицей, содержащей значения аргумента x и соответствующие значения функции $y = f(x)$.*

Понятие функции. Основные свойства функций

Способы задания функций.

- *Графический способ — функция задается с помощью графика — множества точек* (x, y) *плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента* x, *а ординаты — соответствующие им значения функции* $y = f(x)$.
- *Словесный способ — функция описывается правилом ее составления.*

Функция $y = f(x)$, заданная на симметричном относительно начала координат интервале, называется четной (нечетной), если для любых значений x из ее области определения $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Функция, которая не является ни четной ни нечетной, называется функцией общего вида.

Функция $y = f(x)$, заданная на симметричном относительно начала координат интервале, называется четной (нечетной), если для любых значений x из ее области определения $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.
Функция, которая не является ни четной ни нечетной, называется функцией общего вида.

Функция $y = f(x)$*, заданная на симметричном относительно начала координат интервале, называется четной (нечетной), если для любых значений* x *из ее области определения* $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.
Функция, которая не является ни четной ни нечетной, называется функцией общего вида.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (оси Oy), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ *называется возрастающей (убывающей / неубывающей / невозрастающей) на промежутке* X, *если для любых* $x_1, x_2 \in X$, *удовлетворяющих условию* $x_2 > x_1$, $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1)$ / $f(x_2) \geq f(x_1)$ / $f(x_2) \leq f(x_1))$.

Возрастающие, убывающие, неубывающие и невозрастающие функции называются монотонными (функции возрастающие и убывающие называются строго монотонными).

Функция $y = f(x)$ *называется ограниченной на промежутке* X*, если существует такое число* $M > 0$*, что* $|f(x)| < M$ *для всех* $x \in X$*. В противном случае функция называется неограниченной.*

Функция $y = f(x)$ называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции $f(x + T) = f(x)$.

Наименьший положительный период функции (если он существует) называется основным периодом функции.

Функция $y = f(x)$ *называется периодической с периодом* $T \neq 0$, *если для любых* x *из области определения функции* $f(x + T) = f(x)$.
Наименьший положительный период функции (если он существует) называется основным периодом функции.

Функция называется явной, если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной: $y = f(x)$*. Функция* y *аргумента* x *называется неявной, если она задана уравнением* $F(x, y) = 0$*, не разрешенным относительно зависимой переменной.*

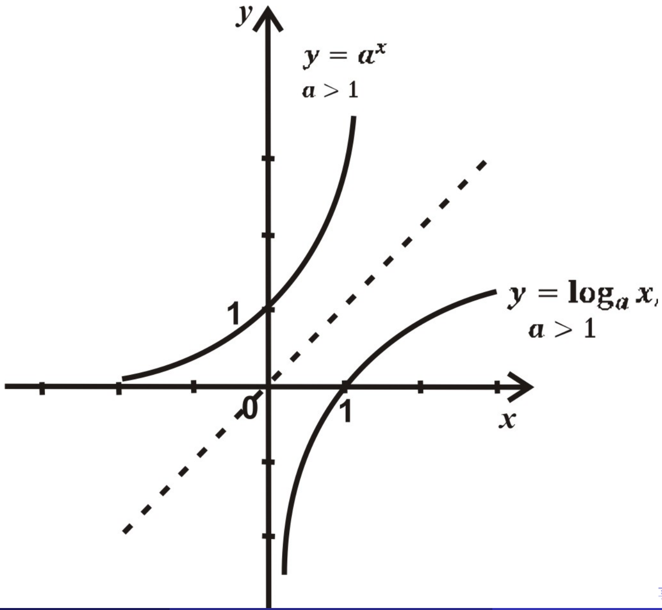
Пусть функция $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$ и областью значений $E(f)$ такова, что разным значениям аргумента x соответствуют разные значения функции y. Поставим в соответствие каждому $y \in E(f)$ единственное значение $x \in D(f)$, при котором $f(x) = y$. Полученная функция $x = f^{-1}(y)$ (так как обычно независимую переменную обозначают через x, а функцию через y, то ее обозначают также $y = f^{-1}(x)$) с областью определения $E(f)$ и областью значений $D(f)$ называется обратной (по отношению к исходной функции).

Связь между исходной функцией f и обратной к ней функцией f^{-1} определяется следующими соотношениями:

$$D(f^{-1}) = E(f); \quad E(f^{-1}) = D(f); \quad \left(f^{-1}\right)^{-1} = f(x);$$

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in D(f); \quad f(f^{-1}(x)) = x, x \in E(f).$$

Утверждение. Для любой строго монотонной функции существует обратная функция. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.


$y = a^x$
$a > 1$
$y = \log_a x,$
$a > 1$
y
x
1
0
1

Пусть $z = f(y)$ — функция с областью определения Y, а все значения функции $y = \varphi(x)$ с областью определения X содержатся в области Y. Тогда заданная на множестве X функция $z = f(\varphi(x))$ называется сложной функцией (композицией функций, суперпозицией функций).

Элементарные функции. Преобразование графиков функций

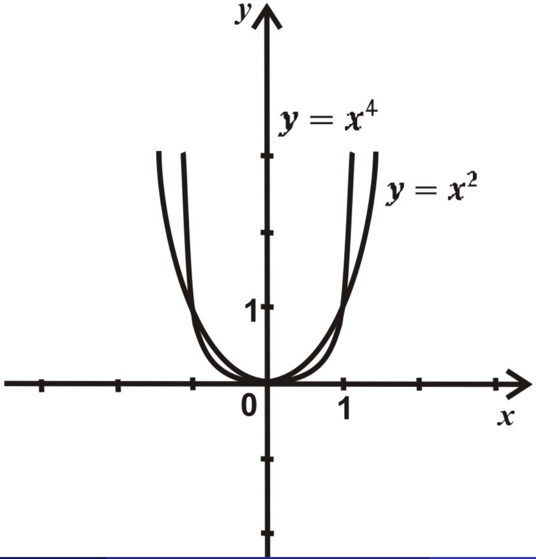
Степенная функция $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$.

Элементарные функции. Преобразование графиков функций

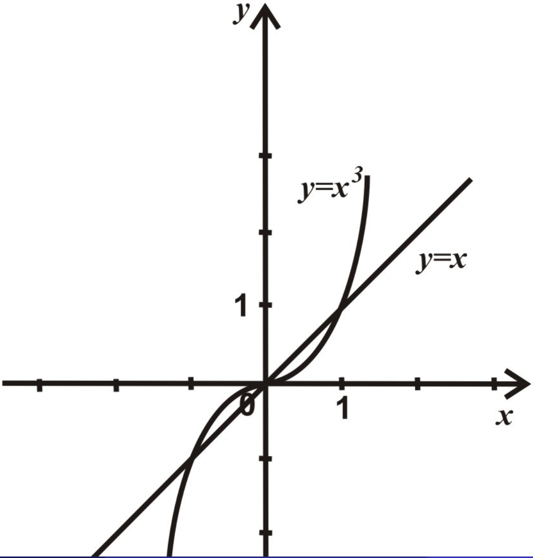
$a \in \mathbb{N}$. *Область определения функции* $D(f) = \mathbb{R}$.

1. *a четное. Область значений функции* $E(f) = [0, +\infty)$. *Функция является четной, убывает на* $(-\infty, 0]$ *и возрастает на* $[0, +\infty)$.
2. *a нечетное. Область значений функции* $E(f) = \mathbb{R}$. *Функция является нечетной, возрастает на* $(-\infty, +\infty)$.

Элементарные функции. Преобразование графиков функций



Элементарные функции. Преобразование графиков функций

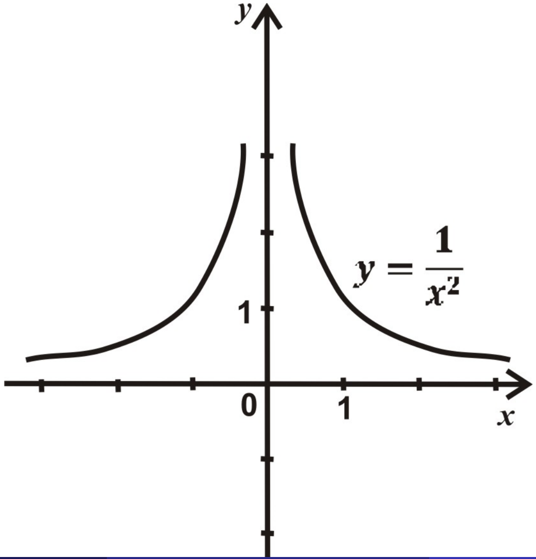


Элементарные функции. Преобразование графиков функций

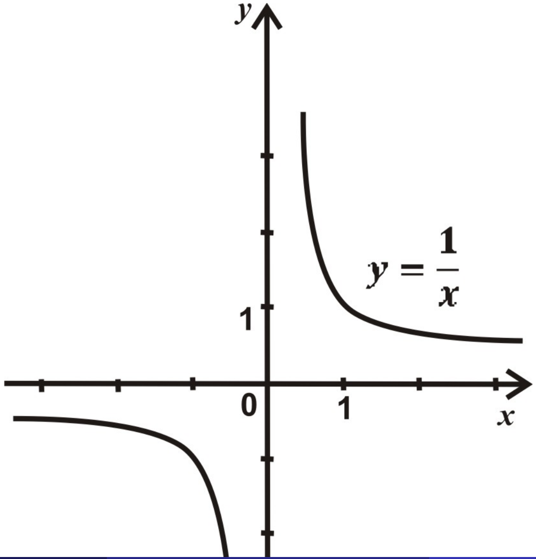
a — целое отрицательное число. Область определения функции $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. *a четное. Область значений функции* $E(f) = (0, +\infty)$. *Функция является четной, возрастает на* $(-\infty, 0)$ *и убывает на* $(0, +\infty)$.
2. *a нечетное. Область значений функции* $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Функция является нечетной, убывает на* $(-\infty, 0)$ *и* $(0, +\infty)$.

Элементарные функции. Преобразование графиков функций



Элементарные функции. Преобразование графиков функций

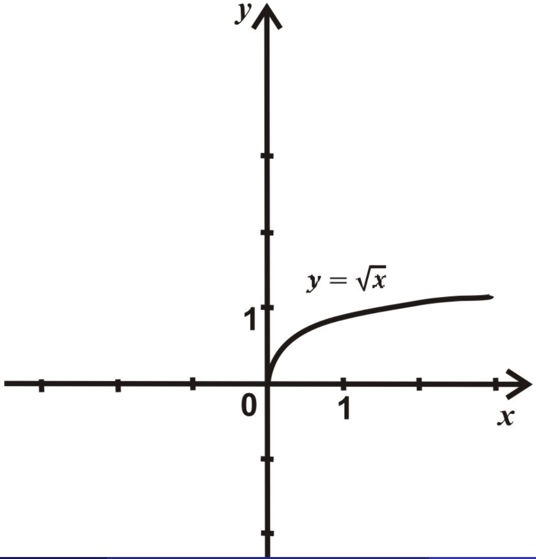


Элементарные функции. Преобразование графиков функций

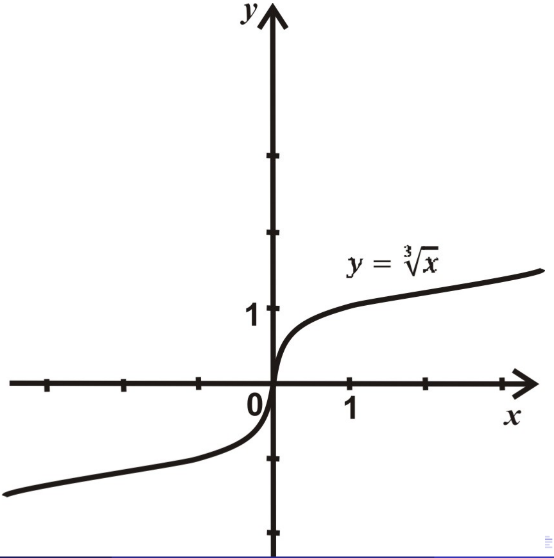
$a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *n четное. Область определения функции $D(f) = [0, +\infty)$. Область значений $E(f) = [0, +\infty)$.Функция возрастает на всей области определения.*
2. *n нечетное. Область определения функции $D(f) = \mathbb{R}$. Область значений функции $E(f) = \mathbb{R}$. Функция является нечетной и возрастает на всей области определения .*

Элементарные функции. Преобразование графиков функций



Элементарные функции. Преобразование графиков функций



Элементарные функции. Преобразование графиков функций

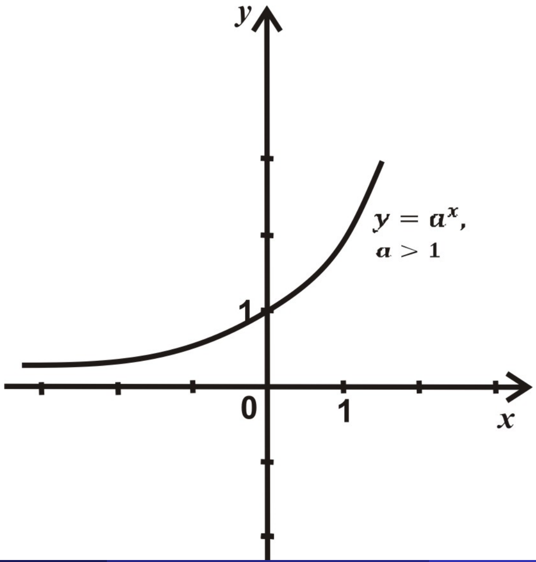
Степенная функция $y = x^a$ *не является периодической ни при каком* a.

Элементарные функции. Преобразование графиков функций

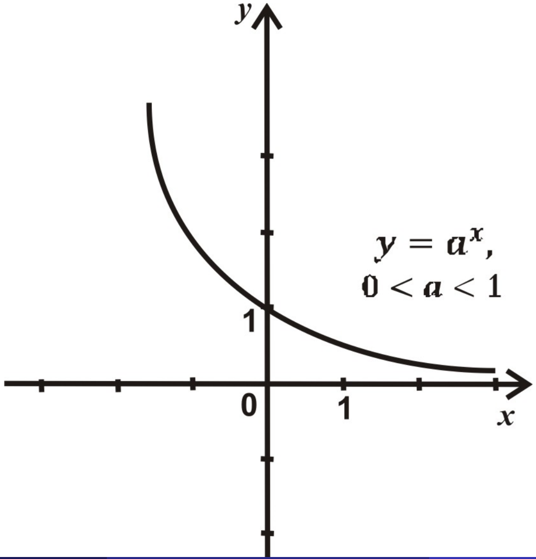
Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. *Область определения функции* $D(f) = \mathbb{R}$. *Область значений* $E(f) = (0, +\infty)$. *Функция является функцией общего вида.*

1. $a > 1$. *Функция возрастает на всей области определения .*
2. $0 < a < 1$. *Функция убывает на всей области определения.*

Элементарные функции. Преобразование графиков функций



Элементарные функции. Преобразование графиков функций



Элементарные функции. Преобразование графиков функций

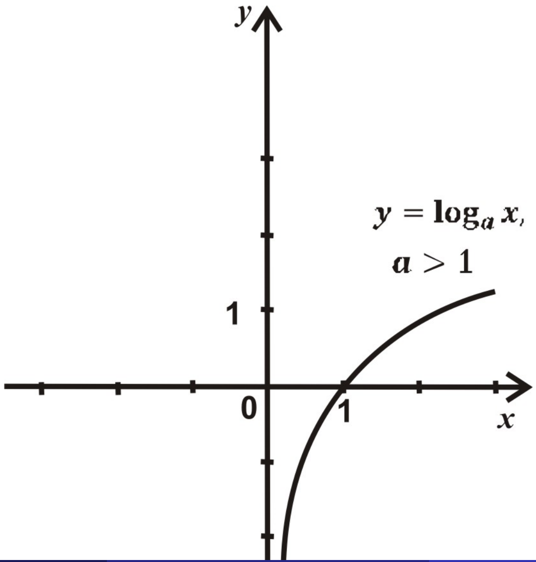
Показательная функция $y = a^x$ не является периодической ни при каком a.

Элементарные функции. Преобразование графиков функций

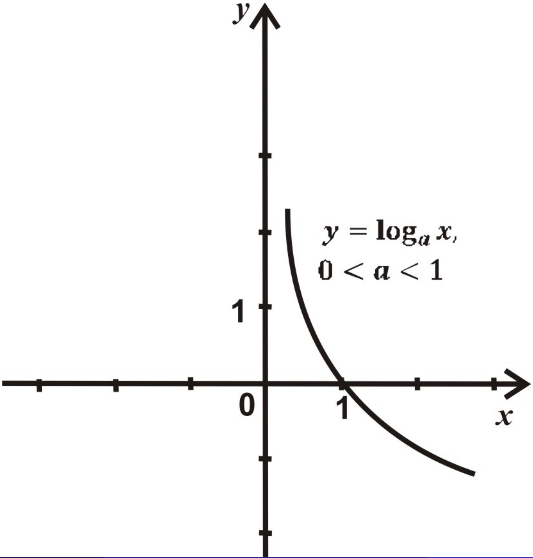
Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. *Область определения функции* $D(f) = (0, +\infty)$. *Область значений* $E(f) = \mathbb{R}$. *Функция является функцией общего вида.*

1. $a > 1$. *Функция возрастает на всей области определения* .
2. $0 < a < 1$. *Функция убывает на всей области определения* .

Элементарные функции. Преобразование графиков функций



Элементарные функции. Преобразование графиков функций



Элементарные функции. Преобразование графиков функций

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ не является периодической ни при каком a.

Показательная функция $y = a^x$ и логарифмическая функция $y = \log_a x$ являются взаимно обратными.

Элементарные функции. Преобразование графиков функций

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ не является периодической ни при каком a.
Показательная функция $y = a^x$ и логарифмическая функция $y = \log_a x$ являются взаимно обратными.