Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом
Модуль «Алгебра»

21

Решите систему уравнений $\begin{cases} 7x^2 - 5x = y, \\ 7x - 5 = y. \end{cases}$

Решение

Правые части уравнений системы равны, значит,

$$7x^2 - 5x = 7x - 5; \quad (7x-5)(x-1) = 0,$$

откуда $x = 1$ или $x = \frac{5}{7}$.

При $x = 1$ получаем $y = 2$.

При $x = \frac{5}{7}$ получаем $y = 0$.

Решения системы уравнений: $(1; 2)$ и $\left(\frac{5}{7}; 0\right)$.

Ответ: $(1; 2)$; $\left(\frac{5}{7}; 0\right)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ.
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	*Максимальный балл*

22 Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого автомобилиста на 9 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью 60 км/ч, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 40 км/ч.

Решение

Пусть весь путь составляет $2s$ км, а скорость первого автомобиля v км/ч, тогда первую половину пути второй автомобиль ехал со скоростью $v-9$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{2s}{v}=\frac{s}{v-9}+\frac{s}{60};\quad 120v-1080=60v+v^2-9v;\quad v^2-69v+1080=0,$$

откуда $v=24$ или $v=45$. Первое из этих значений не подходит, поскольку оно не превосходит 40. Значит, скорость первого автомобилиста равна 45 км/ч.

Ответ: 45 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	*Максимальный балл*

23

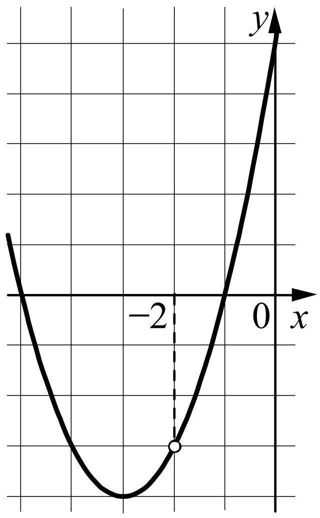
Постройте график функции $y=\dfrac{(x+1)\left(x^2+7x+10\right)}{x+2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение

Преобразуем выражение:

$\dfrac{(x+1)\left(x^2+7x+10\right)}{x+2}=\dfrac{(x+1)(x+2)(x+5)}{x+2}=x^2+6x+5$ при условии, что $x\neq-2$.

Построим график:



Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $m=-4$ и при $m=-3$.

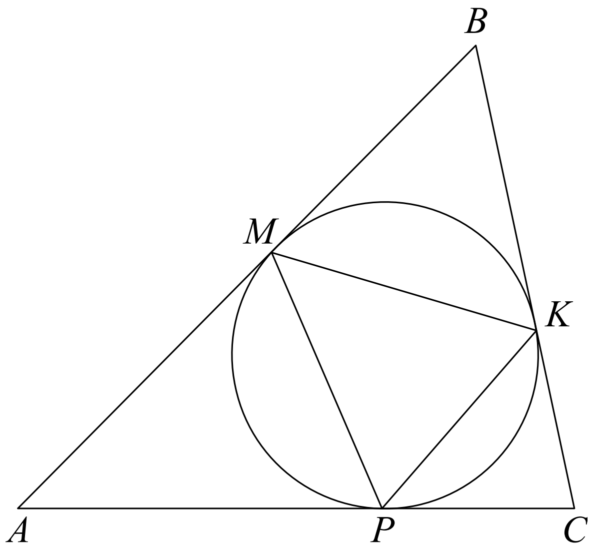
Ответ: -4; -3.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра.
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	*Максимальный балл*

Модуль «Геометрия»

24 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках M, K и P. Найдите углы треугольника ABC, если углы треугольника MKP равны $39°$, $78°$ и $63°$.

Решение



Пусть

$$\angle BAC = \alpha,\ \angle ABC = \beta,\ \angle ACB = \gamma;$$
$$\angle PKM = 39°,\ \angle MPK = 78°,\ \angle KMP = 63°.$$

По свойству касательных $AM = AP$, $BM = BK$, $CP = CK$. Значит, треугольники AMP, BMK и CPK равнобедренные, откуда получаем

$$\angle AMP = \angle APM = 90° - \frac{\alpha}{2},\ \angle BMK = \angle BKM = 90° - \frac{\beta}{2},$$

$$\angle CPK = \angle CKP = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Значит, $\angle PKM = 180° - \angle CKP - \angle BKM = \frac{\gamma + \beta}{2} = 39°$. Аналогично получаем, что $\angle MPK = \frac{\alpha + \gamma}{2} = 78°$ и $\angle KMP = \frac{\alpha + \beta}{2} = 63°$.

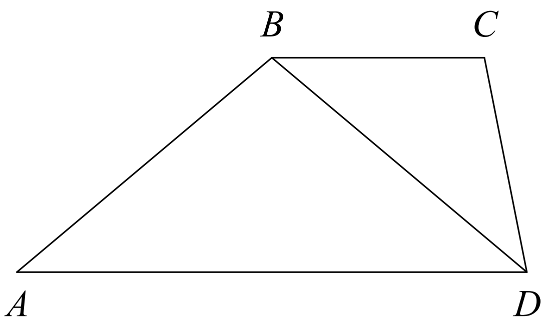
Решая систему относительно α, β и γ, получаем, что углы треугольника ABC равны $102°$, $24°$, $54°$.

Ответ: $102°$; $24°$; $54°$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	*Максимальный балл*

25 Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 6 и 24, $BD = 12$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Доказательство



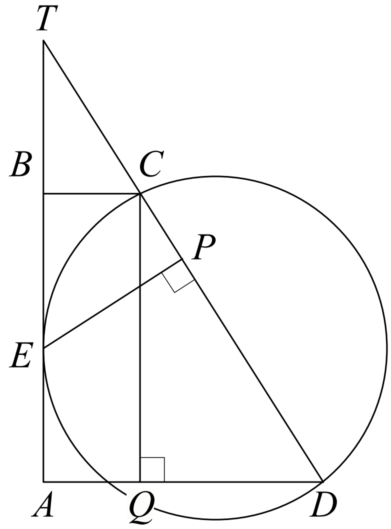
В треугольниках ADB и DBC углы ADB и DBC равны как накрест лежащие, кроме того, $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{BC} = 2$. Поэтому указанные треугольники подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы.
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	*Максимальный балл*

26 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 4$, $BC = 3$.

Решение

Пусть T — точка пересечения прямых AB и CD, P — проекция точки E на прямую CD, Q — проекция точки C на прямую AD (см. рисунок). Обозначим $\angle CDA = \alpha$, $CD = x$.



Поскольку $QD = AD - AQ = AD - BC = 1$, получаем, что $\cos\alpha = \frac{QD}{DC} = \frac{1}{x}$.

Из подобия треугольников TBC и TAD находим, что $TC = 3x$.

Поэтому

$TE^2 = TD \cdot TC = 12x^2$.

Следовательно,

$$EP = TE\cos\angle TEP = TE\cos\angle TDA = TE\cos\alpha = x\sqrt{12} \cdot \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	*Максимальный балл*

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом
Модуль «Алгебра»

21

Решите систему уравнений $\begin{cases}(5x+3)^2=8y,\\(3x+5)^2=8y.\end{cases}$

Решение

Правые части уравнений системы равны, значит,

$$(5x+3)^2=(3x+5)^2;\quad (2x-2)(8x+8)=0,$$

откуда $x=-1$ или $x=1$.

При $x=-1$ получаем $y=\frac{1}{2}$.

При $x=1$ получаем $y=8$.

Решения системы уравнений: $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ и $(1;8)$.

Ответ: $(1;8)$; $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ.
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	*Максимальный балл*

22 Расстояние между пристанями А и В равно 108 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошёл 50 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Решение

Плот прошёл 50 км, значит, он плыл 10 часов, из которых лодка находилась в пути 9 часов. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна v км/ч, тогда

$$\frac{108}{v+5}+\frac{108}{v-5}=9;\quad 108v-540+108v+540=9v^2-225;\quad v^2-24v-25=0,$$

откуда $v=25$.

Ответ: 25 км/ч.

Баллы	**Критерии оценки выполнения задания**
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	*Максимальный балл*

23

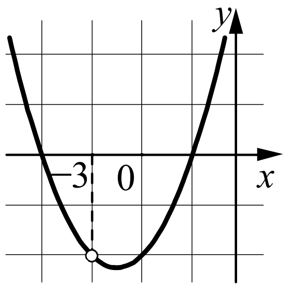
Постройте график функции $y=\dfrac{(x+1)(x^2+7x+12)}{x+3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение

Преобразуем выражение:

$\dfrac{(x+1)(x^2+7x+12)}{x+3}=\dfrac{(x+1)(x+3)(x+4)}{x+3}=x^2+5x+4$ при условии, что $x\neq-3$.

Построим график:



Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $m=-2,25$ и при $m=-2$.

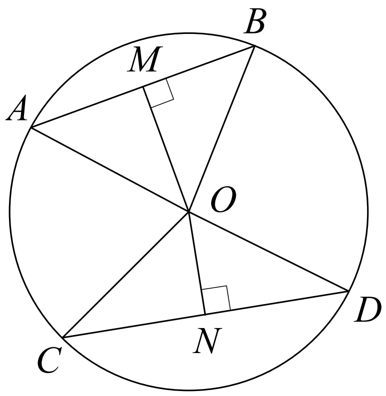
Ответ: $-2,25$; -2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра.
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	*Максимальный балл*

Модуль «Геометрия»

24 Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если $AB = 18$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 12 и 9.

Решение



Пусть O − центр окружности, $OM = 12$ и $ON = 9$ — перпендикуляры к хордам AB и CD соответственно. Треугольники AOB и COD равнобедренные, значит, $AM = MB$ и $CN = ND$.

Тогда в прямоугольном треугольнике MOB имеем

$$OB = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 15.$$

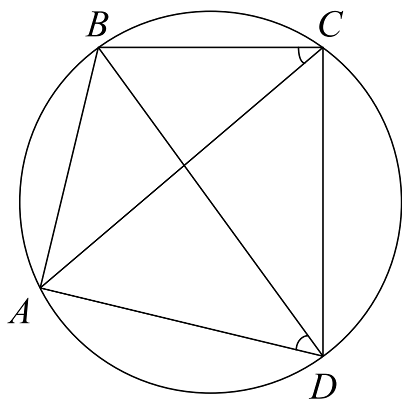
В прямоугольном треугольнике CON гипотенуза $CO = OB = 15$, откуда $CN = \sqrt{OC^2 - ON^2} = 12$. Получаем, что $CD = 2CN = 24$.

Ответ: 24.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	*Максимальный балл*

25 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.

Доказательство.

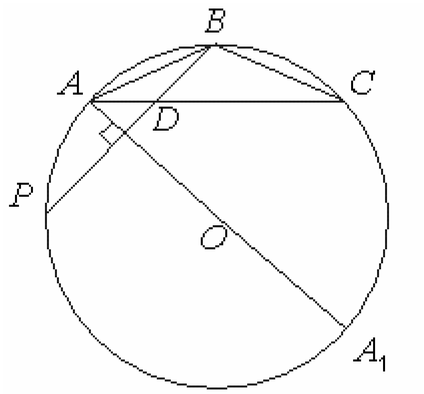


Поскольку четырёхугольника $ABCD$ выпуклый и $\angle BCA = \angle BDA$, получаем, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. А тогда $\angle ABD = \angle ACD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AD.

Баллы	**Критерии оценки выполнения задания**
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы.
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	*Максимальный балл*

26 В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 36$, $AC = 48$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите CD.

Решение



Пусть продолжение отрезка BD за точку D пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P (см. рисунок). Тогда хорда BP перпендикулярна диаметру AA_1 этой окружности. Значит, точка A — середина дуги BP, не содержащей вершину C. Отсюда следует, что $\angle ABD = \angle ABP = \angle ACB$ (как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги). Поэтому треугольники ABD и ACB подобны по двум углам (угол A общий). Следовательно,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC},\ \text{откуда}\ AD = \frac{AB^2}{AC} = 27\ \text{и}\ CD = AC - AD = 48 - 27 = 21.$$

Ответ: 21.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	*Максимальный балл*

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом
Модуль «Алгебра»

21

Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y. \end{cases}$

Решение

Правые части уравнений системы равны, значит,

$$3x^2 - 2x = 3x - 2; \quad (3x-2)(x-1) = 0,$$

откуда $x = 1$ или $x = \frac{2}{3}$.

При $x = 1$ получаем $y = 1$.

При $x = \frac{2}{3}$ получаем $y = 0$.

Решения системы уравнений: $(1;1)$ и $\left(\frac{2}{3};0\right)$.

Ответ: $(1;1)$; $\left(\frac{2}{3};0\right)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ.
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	*Максимальный балл*

22 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 140 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 5 км/ч, стоянка длится 11 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 32 часа после отплытия из него.

Решение

Пусть скорость теплохода равна v км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{140}{v-5}+\frac{140}{v+5}=21;\quad 140v+700+140v-700=21v^2-525;\quad 3v^2-40v-75=0,$$

откуда $v=15$.

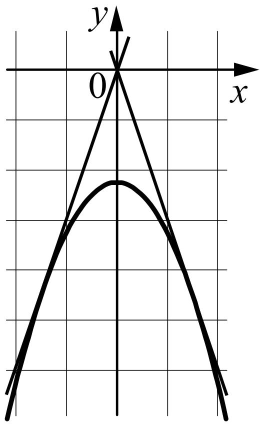
Ответ: 15 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	*Максимальный балл*

23 Найдите все значения k, при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = -x^2 - 2{,}25$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Решение

Построим график функции $y = -x^2 - 2{,}25$:



Прямая $y = kx$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку, если уравнение $-x^2 - 2{,}25 = kx$ имеет один корень. Дискриминант этого уравнения равен $k^2 - 9$, и он должен быть равен нулю. Получаем, что $k = -3$ или $k = 3$.

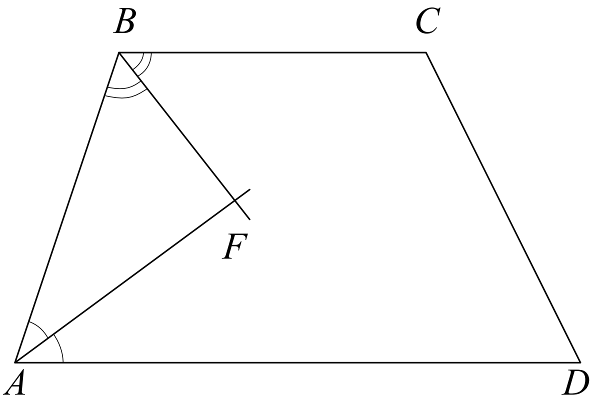
Ответ: -3; 3.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра.
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	*Максимальный балл*

Модуль «Геометрия»

24 Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F. Найдите AB, если $AF = 12$, $BF = 5$.

Решение



Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна $180°$, значит,

$$\angle ABF + \angle BAF = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}\left(\angle ABC + \angle BAD\right) = 90°.$$

Получаем, что треугольник ABF прямоугольный с прямым углом F. По теореме Пифагора находим AB:

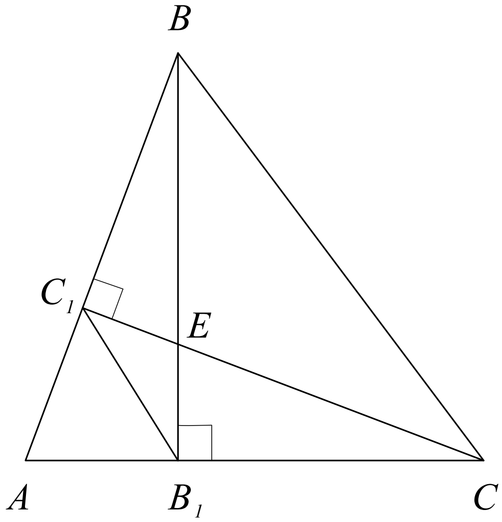
$$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

Ответ: 13.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	*Максимальный балл*

25 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E. Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.

Доказательство

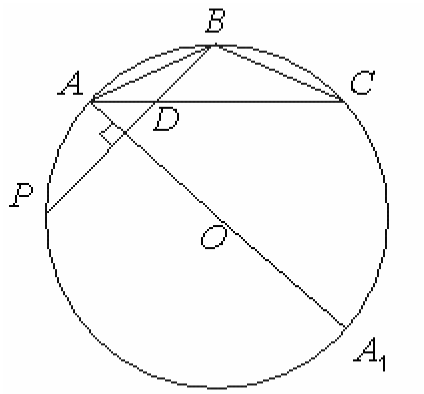


Поскольку диагонали четырёхугольника CB_1C_1B пересекаются, он является выпуклым, а так как $\angle CB_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$, около него можно описать окружность. Тогда углы BB_1C_1 и BCC_1 равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу BC_1.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы.
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	*Максимальный балл*

26 В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 32$, $AC = 64$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите CD.

Решение



Пусть продолжение отрезка BD за точку D пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P (см. рисунок). Тогда хорда BP перпендикулярна диаметру AA_1 этой окружности. Значит, точка A — середина дуги BP, не содержащей вершину C. Отсюда следует, что $\angle ABD = \angle ABP = \angle ACB$ (как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги). Поэтому треугольники ABD и ACB подобны по двум углам (угол A общий). Следовательно,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}, \text{ откуда } AD = \frac{AB^2}{AC} = 16 \text{ и } CD = AC - AD = 64 - 16 = 48.$$

Ответ: 48.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	*Максимальный балл*

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом
Модуль «Алгебра»

21 Решите уравнение $x^6=(7x-6)^3$.

Решение

$$x^6=(7x-6)^3;\quad x^2=7x-6;\quad (x-6)(x-1)=0,$$

откуда $x=1$ или $x=6$.

Ответ: 1; 6.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ.
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	*Максимальный балл*

22 Первые 5 часов автомобиль ехал со скоростью 110 км/ч, следующие 3 часа — со скоростью 50 км/ч, а последние 3 часа — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение

Заметим, что всего автомобиль проехал $110\cdot5+50\cdot3+60\cdot3=880$ км, затратив на весь путь $5+3+3=11$ часов. Таким образом, его средняя скорость равна $\frac{880}{11}=80$ км/ч.

Ответ: 80 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	*Максимальный балл*

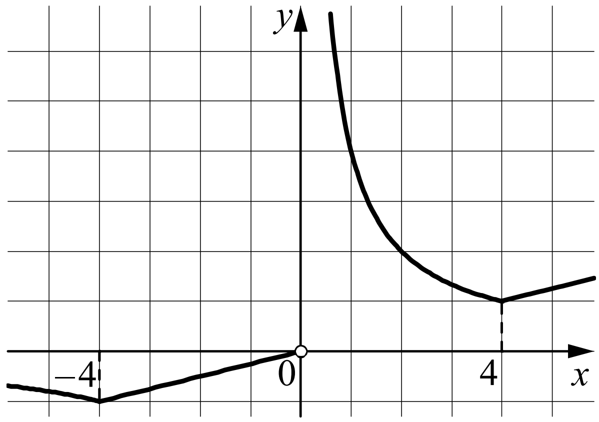
23

Постройте график функции $y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{4}-\frac{4}{x}\right|+\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение

Значение выражения $\frac{x}{4}-\frac{4}{x}$ неотрицательно при $-4\le x<0$ и $x\ge 4$, а при $x<-4$ и $0<x<4$ значение этого выражения отрицательно.

Построим график функции $y=\frac{x}{4}$ при $-4\le x<0$ и $x\ge 4$ и график функции $y=\frac{4}{x}$ при $x<-4$ и $0<x<4$.



Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $m=1$ и $m=-1$.

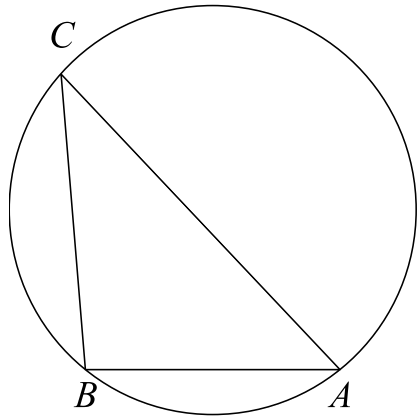
Ответ: -1; 1.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра.
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	*Максимальный балл*

Модуль «Геометрия»

24 Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как $6:7:23$. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон равна 11.

Решение



Пусть длины дуг AB, BC и AC относятся как 6:7:23, тогда наименьшая сторона треугольника ABC — сторона $AB = 11$.

По свойству вписанного угла $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{6+7+23} \cdot 360° = 30°$.

Из теоремы синусов находим, что радиус окружности равен

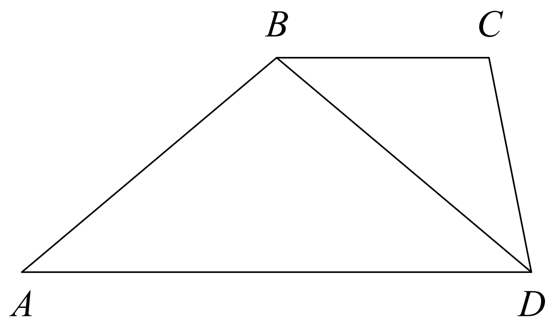
$$R = \frac{AB}{2\sin 30°} = 11.$$

Ответ: 11.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	*Максимальный балл*

25 Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 6 и 24, $BD = 12$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Доказательство

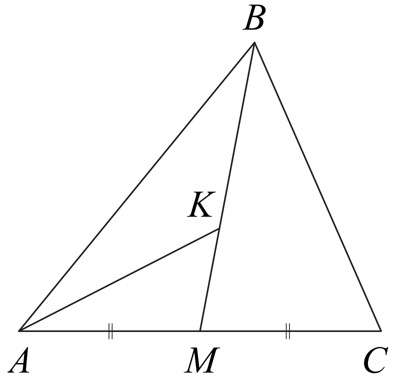


В треугольниках ADB и DBC углы ADB и DBC равны как накрест лежащие, кроме того, $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{BC} = 2$. Поэтому указанные треугольники подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы.
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	*Максимальный балл*

26 В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 7 : 3$. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC.

Решение



Медиана AM разбивает треугольник ABC на два равновеликих треугольника — пусть их площади равны по $10S$.

Поскольку $\frac{S_{ABK}}{S_{AMK}} = \frac{BK}{MK} = \frac{7}{3}$, получаем, что $S_{ABK} = 7S$ и $S_{AMK} = 3S$. Тогда $S_{ABK} : S_{ABC} = 7S : 20S = 7 : 20$.

Ответ: 7:20.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	*Максимальный балл*