

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**Модуль «Алгебра»****21**

Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 11, \\ 4x^2 + 6y^2 = 11x. \end{cases}$

Решение.

Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 11, & \begin{cases} 3y^2 + 8 = 11, & \begin{cases} y^2 = 1, \\ x = 2; \end{cases} \end{cases} \\ 22 = 11x; & \begin{cases} x = 2; \end{cases} \end{cases}$$

откуда получаем решения системы уравнений: $(2; -1)$ и $(2; 1)$.

Ответ: $(2; 1)$; $(2; -1)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ.
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	Максимальный балл

22

Расстояние между пристанями А и В равно 99 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошёл 22 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Решение.

Плот прошёл 22 км, значит, он плыл 11 часов, из которых лодка находилась в пути 10 часов. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна v км/ч, тогда

$$\frac{99}{v+2} + \frac{99}{v-2} = 10; \quad 99v - 198 + 99v + 198 = 10v^2 - 40; \quad v^2 - 19,8v - 4 = 0,$$

откуда $v = 20$.

Ответ: 20 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	Максимальный балл

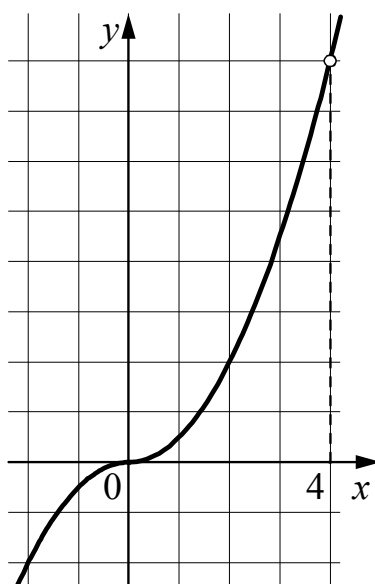
23

Постройте график функции $y = \frac{(0,5x^2 - 2x)|x|}{x - 4}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

Преобразуем выражение $\frac{(0,5x^2 - 2x)|x|}{x - 4} = 0,5x|x|$ при условии, что $x \neq 4$.

Построим график функции $y = -0,5x^2$ при $x < 0$ и график функции $y = 0,5x^2$ при $0 \leq x < 4$ и $x > 4$.



Прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки при $t = 8$.

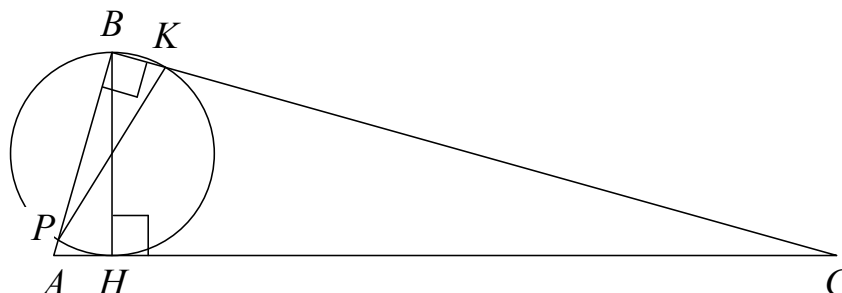
Ответ: 8.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра.
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл

Модуль «Геометрия»

- 24** Точка H является основанием высоты BH , проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC . Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите BH , если $PK = 20$.

Решение.



Угол PBK опирается на дугу PK и равен 90° , а значит, PK — диаметр, откуда получаем, что $BH = PK = 20$.

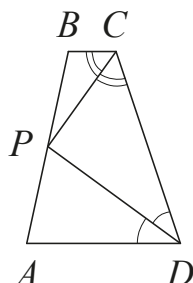
Ответ: 20.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	Максимальный балл

25

Биссектрисы углов C и D трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P , лежащей на стороне AB . Докажите, что точка P равноудалена от прямых BC , CD и AD .

Доказательство.



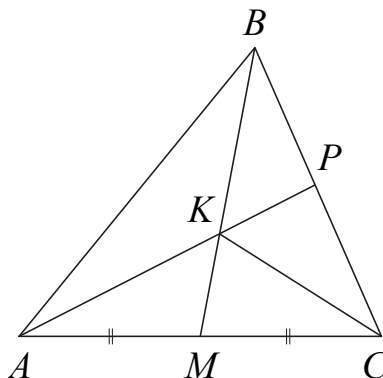
По свойству биссектрисы угла точка P равноудалена от прямых AD и CD (так как лежит на биссектрисе угла D) и равноудалена от прямых BC и CD (так как лежит на биссектрисе угла C). Значит, точка P равноудалена от всех трёх указанных прямых.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы.
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	Максимальный балл

26

В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK:KM = 7:3$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P . Найдите отношение площади треугольника BKP к площади четырёхугольника $KPCM$.

Решение.



Медиана KM разбивает треугольник AKC на два равновеликих треугольника — пусть их площади равны по $3S$. Поскольку $\frac{S_{ABK}}{S_{AMK}} = \frac{BK}{MK} = \frac{7}{3}$, получаем, что $S_{ABK} = 7S$.

Пусть $S_{PBK} = X$ и $S_{PCK} = Y$. Тогда $\frac{7S}{X} = \frac{AK}{KP} = \frac{6S}{Y}$, отсюда $X = \frac{7Y}{6}$. Далее, $10S = S_{ABM} = S_{CBM} = X + Y + 3S$, а тогда $X + Y = \frac{7Y}{6} + Y = \frac{13Y}{6} = 7S$, то есть $Y = \frac{42S}{13}$ и $X = \frac{49S}{13}$.

Получаем, что $S_{BKP} : S_{KPCM} = \frac{49S}{13} : \left(3S + \frac{42S}{13} \right) = 49 : 81$.

Ответ: 49:81.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**Модуль «Алгебра»****21**

Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$

Решение.

Из второго уравнения системы получаем $y = \frac{3}{x}$. Первое уравнение системы принимает вид

$$x^2 + \frac{9}{x^2} = 10; \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Пусть $t = x^2$. Тогда получаем уравнение $t^2 - 10t + 9 = 0$, решениями которого являются $t = 1$ и $t = 9$.

Уравнение $x^2 = 1$ имеет корни $x = -1$ и $x = 1$.

Уравнение $x^2 = 9$ имеет корни $x = -3$ и $x = 3$.

Значит, решения исходной системы: $(-1; -3)$, $(1; 3)$, $(-3; -1)$ и $(3; 1)$.

Ответ: $(1; 3)$; $(-1; -3)$; $(3; 1)$; $(-3; -1)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ.
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	Максимальный балл

22

Свежие фрукты содержат 86 % воды, а высушенные — 23 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 72 кг высушенных фруктов?

Решение.

Заметим, что сухая часть свежих фруктов составляет 14%, а высушенных — 77%. Значит, для приготовления 72 кг высушенных фруктов требуется

$$\frac{77}{14} \cdot 72 = 396 \text{ кг свежих.}$$

Ответ: 396 кг.

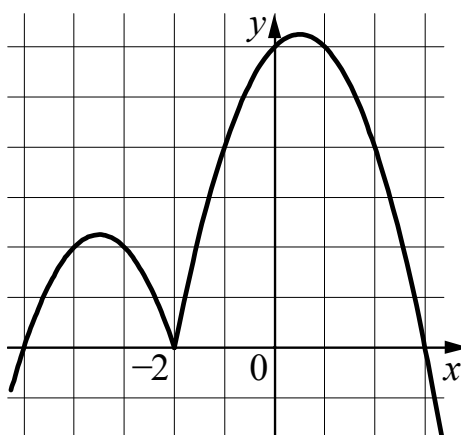
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	Максимальный балл

23

Постройте график функции $y = 4|x + 2| - x^2 - 3x - 2$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = -x^2 - 7x - 10$ при $x < -2$ и график функции $y = -x^2 + x + 6$ при $x \geq -2$.



Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки, если она проходит через вершину первой параболы и пересекает вторую или если она проходит через точку $(-2; 0)$. Получаем, что $m = 0$ и $m = 2,25$.

Ответ: 0; 2,25.

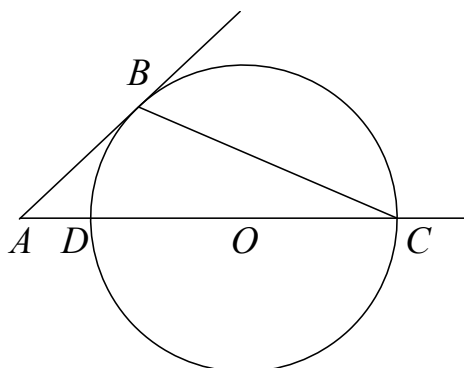
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	Максимальный балл

Модуль «Геометрия»

24

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите AC , если диаметр окружности равен 15, а $AB = 4$.

Решение.



Пусть $AC = x$. Тогда по свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем:

$$AB^2 = x(x - CD); \quad 16 = x(x - 15); \quad x^2 - 15x - 16 = 0,$$

откуда $x = 16$ или $x = -1$. Получаем, что $AC = 16$.

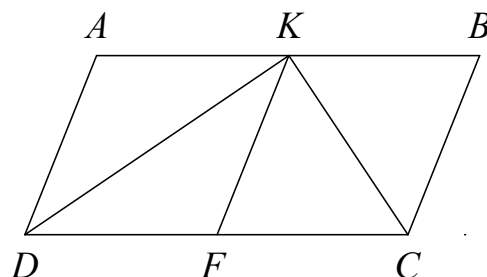
Ответ: 16.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

25

Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AD . Точка K — середина стороны AB . Докажите, что DK — биссектриса угла ADC .

Доказательство.



Проведём FK параллельно AD (см. рис.). Имеем $AD = AK = KB$, следовательно, параллелограмм $AKFD$ является ромбом. Диагональ DK ромба $AKFD$ является биссектрисой угла ADC .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы.
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	Максимальный балл

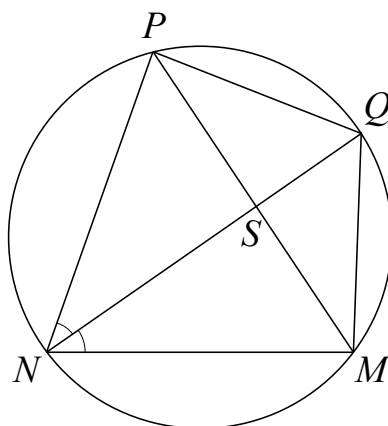
26

В выпуклом четырёхугольнике $NPQM$ диагональ NQ является биссектрисой угла PNM и пересекается с диагональю PM в точке S . Найдите NS , если известно, что около четырёхугольника $NPQM$ можно описать окружность, $PQ = 14$, $SQ = 4$.

Решение.

Поскольку $\angle QPS = \angle QPM = \angle MNQ = \angle QNP$ (см. рис.), треугольник PQS подобен треугольнику NQP по двум углам (угол при вершине Q общий).

Поэтому $\frac{QS}{PQ} = \frac{PQ}{QN}$.



Пусть $NS = x$. Тогда $\frac{4}{14} = \frac{14}{x+4}$.

Из этого уравнения находим, что $x = 45$.

Ответ: 45.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**Модуль «Алгебра»****21**

Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{24-3x}{8+(5-2x)^2} \geq 0, \\ 22-9x \leq 43-2x. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем систему неравенств:

$$\begin{cases} 24-3x \geq 0, & \begin{cases} x \leq 8, \\ x \geq -3. \end{cases} \\ -7x \leq 21; \end{cases}$$

Ответ: $[-3; 8]$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ.
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	<i>Максимальный балл</i>

22

Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 3 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 9 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 6 км/ч меньше скорости второго.

Решение.

Пусть скорость первого бегуна v км/ч, тогда скорость второго $v+6$ км/ч, а длина круга равна $\frac{51(v+6)}{60}$. Получаем уравнение:

$$\frac{51(v+6)}{60} - 3 = v; \quad 51(v+6) - 180 = 60v; \quad 9v = 126,$$

откуда $v = 14$.**Ответ:** 14 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	<i>Максимальный балл</i>

23

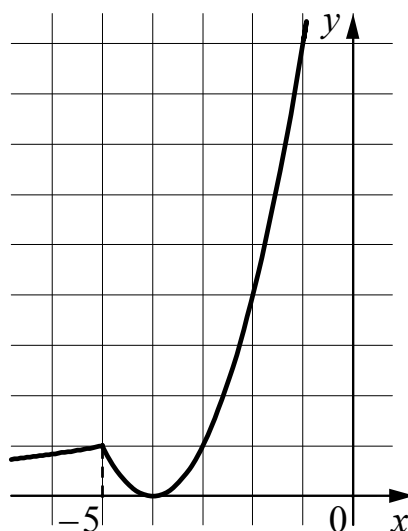
Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 8x + 16, & \text{если } x \geq -5, \\ -\frac{5}{x}, & \text{если } x < -5, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = -\frac{5}{x}$ при $x < -5$ и график функции $y = x^2 + 8x + 16$ при $x \geq -5$.



Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 0$ и при $m \geq 1$.

Ответ: $0; [1; +\infty)$.

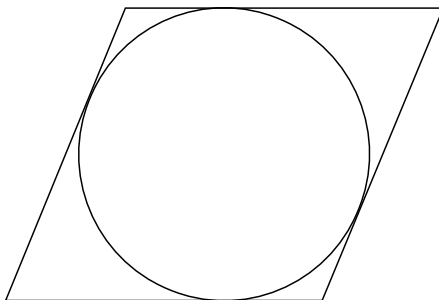
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра.
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл

Модуль «Геометрия»

24

В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 12.

Решение.



Поскольку в данный параллелограмм можно вписать окружность, суммы его противоположных сторон равны. Так как противоположные стороны также равны, получаем, что все стороны данного параллелограмма равны, а значит, этот четырёхугольник является ромбом. Следовательно, его периметр равен $12 \cdot 4 = 48$.

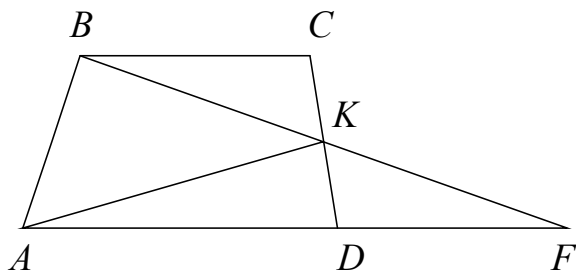
Ответ: 48.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	<i>Максимальный балл</i>

25

Точка K — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Доказательство.



Продолжим BK до пересечения с прямой AD в точке F . Заметим, что в треугольниках FDK и BCK стороны CK и DK равны по условию, углы при вершине K равны как вертикальные, а углы KDF и KCB равны как накрест лежащие. Значит, треугольники FDK и BCK равны.

Следовательно, их площади равны, то есть площадь трапеции равна площади треугольника ABF . Но из равенства треугольников также вытекает, что $FK = BK$, то есть AK — медиана в треугольнике ABF . Тогда треугольник KAB по площади составит половину треугольника FAB , а значит, и данной трапеции.

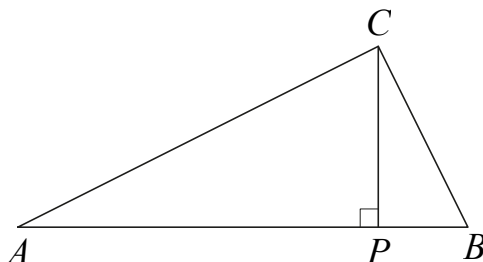
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы.
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	Максимальный балл

26

Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP . Радиус окружности, вписанной в треугольник BSP , равен 96, тангенс угла BAC равен $\frac{8}{15}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Решение.

Заметим, что $\angle CAB = 90^\circ - \angle CBA = \angle PCB$, так что треугольник ABC подобен треугольнику CBP .



Пусть радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , равен r , тогда $\frac{96}{r} = \frac{BC}{BA} = \sin \angle BAC$. Поскольку тангенс угла BAC равен $\frac{8}{15}$, получаем, что $\sin \angle BAC = \frac{8}{17}$. Значит, $\frac{96}{r} = \frac{8}{17}$, откуда $r = 204$.

Ответ: 204.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**Модуль «Алгебра»****21**

Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 4(9x + 3) - 9(4x + 3) > 3x, \\ (x - 2)(x + 9) < 0. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем систему неравенств:

$$\begin{cases} 36x + 12 - 36x - 27 > 3x, \\ -9 < x < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -5, \\ -9 < x < 2. \end{cases}$$

Ответ: $(-9; -5)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ.
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	<i>Максимальный балл</i>

22

Расстояние между пристанями А и В равно 75 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошёл 44 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Решение.

Плот прошёл 44 км, значит, он плыл 11 часов, из которых лодка находилась в пути 10 часов. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна v км/ч, тогда

$$\frac{75}{v + 4} + \frac{75}{v - 4} = 10; \quad 75v - 300 + 75v + 300 = 10v^2 - 160; \quad v^2 - 15v - 16 = 0,$$

откуда $v = 16$.*Ответ:* 16 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	<i>Максимальный балл</i>

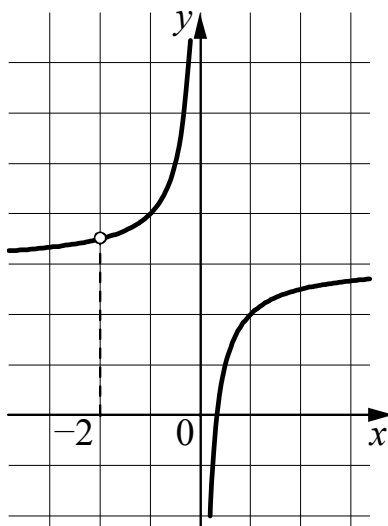
23

Постройте график функции $y = 3 - \frac{x+2}{x^2+2x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

Преобразуем выражение: $3 - \frac{x+2}{x^2+2x} = 3 - \frac{1}{x}$ при условии, что $x \neq -2$.

Построим график:



Прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки при $m = 3$ и $m = \frac{7}{2}$.

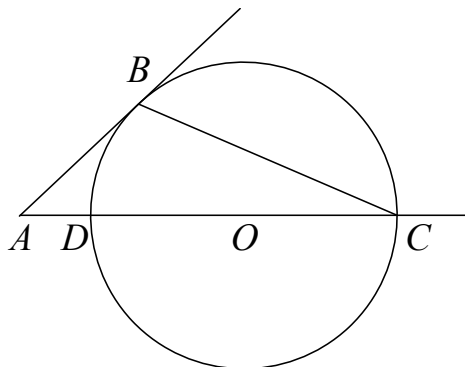
Ответ: $3; \frac{7}{2}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра.
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл

Модуль «Геометрия»

- 24** Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B . Найдите диаметр окружности, если $AB = 15$, $AC = 25$.

Решение.



Пусть $DC = x$. Тогда по свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем:

$$AB^2 = AC(AC - x); \quad 225 = 25(25 - x), \text{ откуда } x = 16.$$

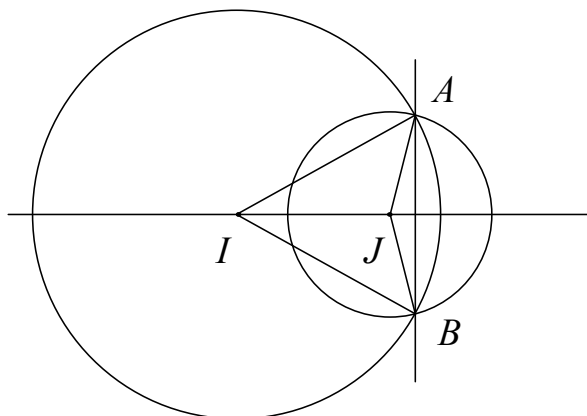
Ответ: 16.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ.
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
2	Максимальный балл

25

Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B , причём точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB . Докажите, что отрезки AB и IJ перпендикулярны.

Доказательство.



Точка I равноудалена от A и B , поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB . То же можно сказать и о J . Значит IJ — серединный перпендикуляр к AB .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы.
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
3	Максимальный балл

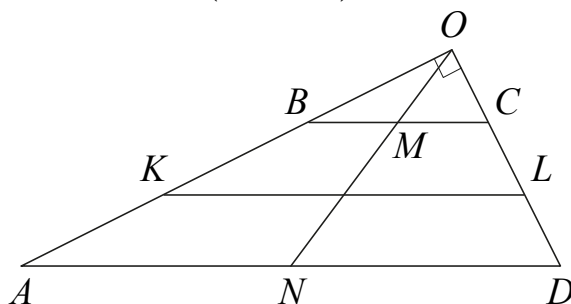
26

Углы при одном из оснований трапеции равны 85° и 5° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 11 и 1. Найдите основания трапеции.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AD — большее основание, K и L — середины сторон AB и CD соответственно. Сумма углов при одном из оснований равна $85^\circ + 5^\circ = 90^\circ$, так что это большее основание AD .

Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O (см. рис.). Легко видеть, что $\angle AOD = 180^\circ - (85^\circ + 5^\circ) = 90^\circ$.



Пусть N — середина основания AD . Тогда $ON = \frac{AD}{2}$ — медиана прямоугольного треугольника AOD . Поскольку медиана ON делит пополам любой отрезок с концами на сторонах AO и DO треугольника AOD , параллельный стороне AD , она пересекает основание BC также в его середине M .

Значит, $OM = \frac{BC}{2}$. Таким образом, $MN = \frac{AD - BC}{2}$. Средняя линия KL трапеции при этом равна $\frac{AD + BC}{2}$.

Получаем, что $AD = MN + KL = 11 + 1 = 12$; $BC = KL - MN = 11 - 1 = 10$.

Ответ: 12; 10.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ.
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.
4	Максимальный балл