admin-s22@rambler.ru

"… в математике следует помнить

не формулы, а процесс мышления"

Е.И. Игнатьев

Исследовательский образовательный проект

Методы и способы возведения чисел в n-ую степень и извлечения корней n-ой степени

Цель: изучить различные методы и способы возведения чисел в квадрат, куб и т. д., а также варианты извлечения арифметического корня n-ой степени из чисел.

Задачи:

✓ познакомиться с основами возведения чисел в степень и извлечения арифметического корня;

✓ исследовать способы возведения чисел в степень и извлечения арифметического корня;

✓ постараться применить на практике методы и способы возведения чисел в n-ую степень и извлечения корней n-ой степени.

Введение

В ходе решения некоторых математических задач приходится оперировать со степенями и арифметическими корнями. Поэтому важно знать правила действий со степенями и арифметическими корнями и научиться преобразовывать выражения, их содержащие. Нам показалась достаточно интересной тема «Методы и способы возведения чисел в n-ую степень и извлечения корней n-ой степени».

Данная тема актуальна, так как задания со степенями и арифметическими корнями есть в каждом классе общеобразовательных школ, лицеев, колледжей. Многие геометрические задачи, задачи по физике, химии и биологии решаются с помощью уравнений, содержащих степени и корни. Уравнения решали двадцать пять веков назад. Они создаются и сегодня – как для использования в учебном процессе, так и для конкурсных экзаменов в вузы, для олимпиад самого высокого уровня.

Для возведения в степень и извлечения квадратного корня существуют таблицы квадратов для двухзначных чисел, можно разложить число на простые множители и извлечь квадратный корень из произведения. Таблицы квадратов бывает недостаточно, извлечение корня разложением на множители – трудоёмкая задача, которая тоже не всегда приводит к желаемому результату. Мы постарались найти способы, которые бы позволили возвести число в степень и извлечь арифметический корень в любом случае.

I. Методы и способы возведения чисел в *n*-ую степень

1. Понятие степени x^n с натуральным показателем

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ раз}} = x^n$$

Произведение n сомножителей, каждый из которых равен x, называется ***n*-ой степенью числа *x*** и обозначается x^n.

Например, записать произведение в виде степени:

1) *mmmm*; 2) *aaabb*; 3) $5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}ccc$; 4) $ppkk + pppk - ppkkk$.

Решение:

1) $mmmm = m^4$, так как, по определению степени, произведение четырех сомножителей, каждый из которых равен m, будет четвертой степенью числа m.

2) $aaabb = a^3b^2$; 3) $5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}ccc = 5^4c^3$; 4) $ppkk + pppk - ppkkk = p^2k^2 + p^3k - p^2k^3$.

Действие, посредством которого находится произведение нескольких равных сомножителей, называется **возведением в степень.**

Число, которое возводится в степень, называется **основанием степени.**
Число, которое показывает, в какую степень возводится основание, называется **показателем степени.**

Так, a^n – степень, a – основание степени, n – показатель степени. Например,

2^3 — это степень. Число 2 — основание степени, показатель степени равен 3. Значение степени 2^3 равно 8, так как $2^3 = 2{\cdot}2{\cdot}2 = 8$.

2. Свойства степеней x^n, где n = натуральное (или целое)

1⁰. $x^0 = 1$

Любое число (кроме нуля) в нулевой степени равно единице.

2⁰. $x^1 = x$

Любое число в первой степени равно самому себе.

3⁰. $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели складывают.

4^0. $x^n : x^m = x^{n-m}$

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

5^0. $(x^m)^n = x^{mn}$

При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают.

6^0. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

При возведении произведения в степень возводят в эту степень каждый из множителей.

7^0. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

При возведении в степень дроби возводят в эту степень и числитель, и знаменатель дроби.

8^0. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \frac{y^n}{x^n}$, где n = целое

При возведении в отрицательную степень дроби возводят в положительную степень и числитель, и знаменатель дроби, а саму дробь переворачивают.

9^0. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, где n = целое

При возведении в отрицательную степень числа возводят в положительную степень число и записывают его в знаменателе дроби с числителем 1.

3. Степенная функция $y = x^n$

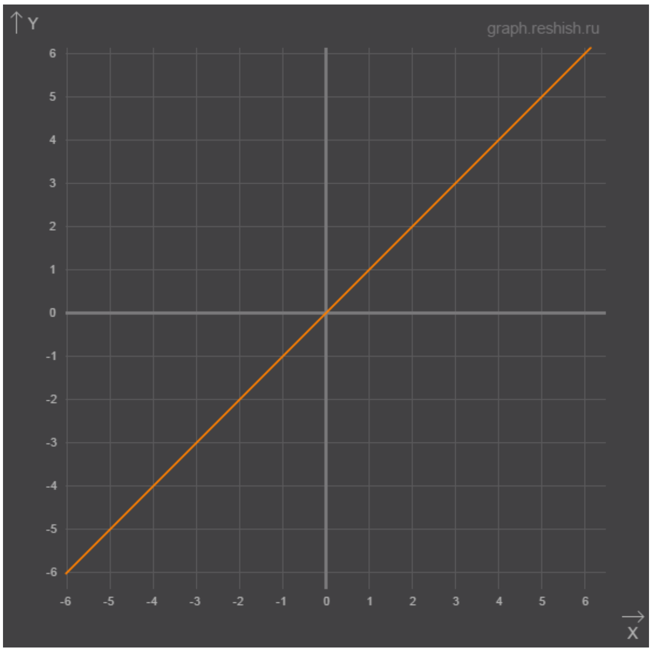
Степенной называется функция вида $y = x^n$ (читается как y равно x в степени n), где n – некоторое заданное число.

Частными случаями степенных функций являются функции вида $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ и многие другие. Расскажем подробнее о каждой из них.

Линейная функция $y = x^1$ ($y = x$)

График – прямая линия, проходящая через точку *(0; 0)* под углом 45 градусов к положительному направлению оси *Ох*.

График представлен ниже.



Основные свойства линейной функции:

- ✓ Функция возрастающая и определена на всей числовой оси.
- ✓ Не имеет максимального и минимального значений.

Квадратичная функция $y = x^2$

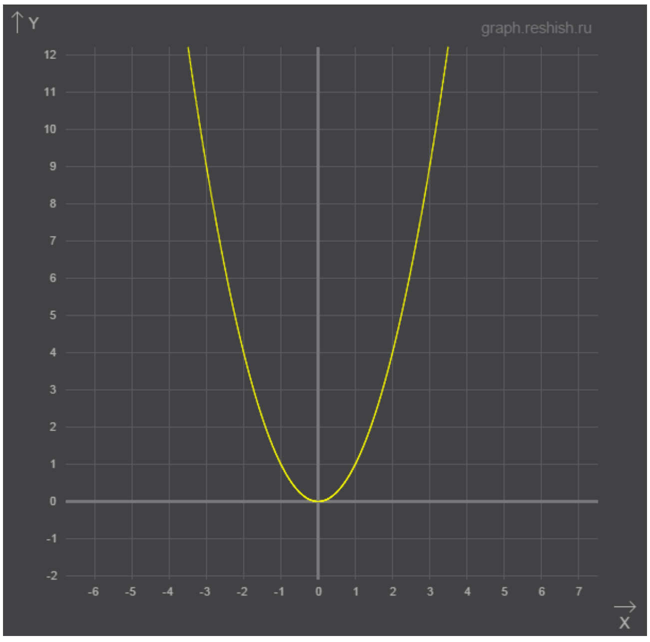
Графиком квадратичной функции является парабола.

Общий вид параболы представлен на рисунке ниже.

Основные свойства квадратичной функции:

✓ 1. При $x = 0$, $y = 0$, и $y > 0$ при $x \neq 0$

✓ 2. Минимальное значение квадратичная функция достигает в своей вершине y_{min} при $x = 0$; следует также заметить, что максимального значения у функции не существует



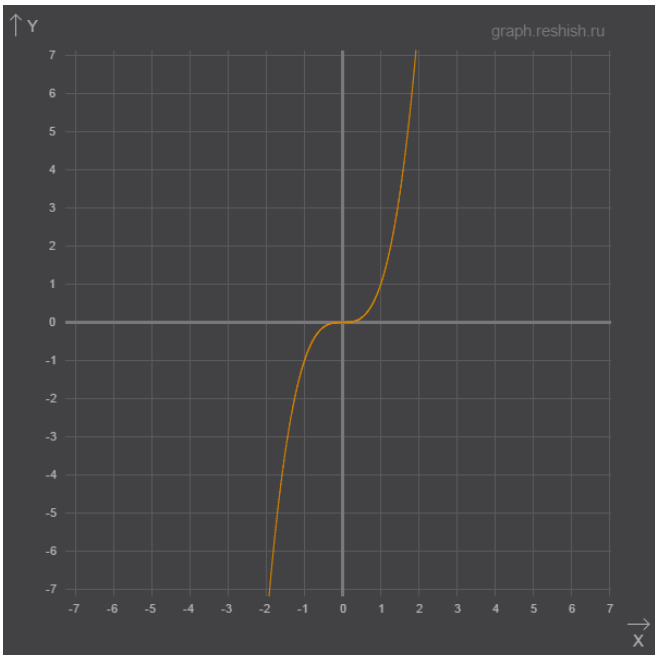
✓ 3. Функция убывает на промежутке $(-\infty;\ 0]$ и возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$

✓ 4. Противоположным значениям x соответствует одинаковые значения y

Кубическая функция $y = x^3$

Графиком кубической функции называется кубическая парабола.

Общий вид параболы представлен на рисунке ниже.



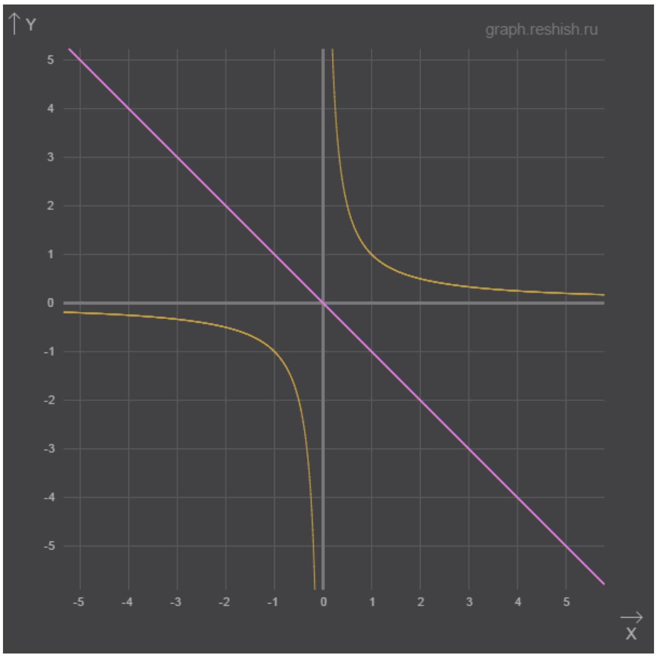
Основные свойства кубической функции:

- ✓ 1. При $x = 0, y = 0$. $y > 0$ при $x > 0$ и $y < 0$ при $x < 0$
- ✓ 2. У кубической функции не существует не максимального ни минимального значения.
- ✓ 3. Кубическая функция возрастает на всей числовой оси $(-\infty;+\infty)$.
- ✓ 4. Противоположным значениям x, соответствуют противоположные значения y.

Функция вида $y = x^{-1}$ **(**$y = 1/x$**)**

Графиком функции $y = 1/x$ называется гипербола.

Общий вид гиперболы представлен на рисунке ниже.



Основные свойства функции

$y = 1/x$:

- ✓ 1. Точка $(0; 0)$ центр симметрии гиперболы
- ✓ 2. Оси координат – асимптоты гиперболы
- ✓ 3. Прямая $y = - x$ – ось симметрии гиперболы
- ✓ 4. Область определения функции все x, кроме $x = 0$
- ✓ 5. $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$
- ✓ 6. Функция убывает как на промежутке $(-\infty; 0)$, так и на промежутке $(0; +\infty)$.

- ✓ 7. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.
- ✓ 8. У функции нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
- ✓ 9. Функция непрерывна на промежутке $(-\infty; 0)$ и на промежутке $(0; +\infty)$. Имеет разрыв в точке $x = 0$.
- ✓ 10. Область значений функции два открытых промежутка $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

4. Таблицы квадратов, кубов и четвёртой степени чисел от 1 до 9

В школьном курсе математики 5 класса даются таблицы значений квадратов и кубов чисел от 1 до 9. Вспомним их, а также рассмотрим и четвертую степень чисел от 1 до 9. В первой строке записаны числа от 1 до 9, а во второй строке таблицы – числа, возведенные в некоторую степень ($n = 2$, $n = 3$ или $n = 4$)

$n = 2$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**

$n = 3$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^3	**1**	**8**	**27**	**64**	**125**	**216**	**343**	**512**	**729**

$n = 4$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^4	**1**	**16**	**81**	**256**	**625**	**1296**	**2401**	**4096**	**6561**

5. Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

		Единицы									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Десятки	1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

6. Приемы возведения чисел в квадрат

Умение считать в уме квадраты чисел может пригодиться в разных жизненных ситуациях, например, для быстрой оценки инвестиционных сделок, для подсчета площадей и объемов, а также во многих других случаях. Кроме того, умение считать квадраты в уме может служить демонстрацией интеллектуальных способностей. Ниже разобраны методики и алгоритмы, позволяющие научиться этому навыку.

Квадрат суммы и квадрат разности

Одним из самых простых способов возведения двузначных чисел в квадрат является методика, основанная на использовании формул квадрата суммы и квадрата разности:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Для использования этого метода необходимо разложить двузначное число на сумму числа кратного 10 и числа меньше 10. Например:

- ✓ $37^2 = (30 + 7)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 7 + 7^2 = 900 + 420 + 49 = 1\ 369$
- ✓ $94^2 = (90 + 4)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 4 + 4^2 = 8100 + 720 + 16 = 8\ 836$

Практически все методики возведения в квадрат (которые описаны ниже) основываются на формулах квадрата суммы и квадрата разности. Эти формулы позволили выделить ряд алгоритмов, упрощающих возведение в квадрат в некоторых частных случаях.

Квадрат, близкий к известному квадрату

Если число, возводимое в квадрат, находится близко к числу, квадрат которого мы знаем, можно использовать одну из четырех методик для упрощенного счета в уме:

На 1 больше:

<u>Методика:</u> к квадрату числа на единицу меньше прибавляем само число и число на единицу меньше.

- ✓ $31^2 = 30^2 + 31 + 30 = 961$
- ✓ $16^2 = 15^2 + 15 + 16 = 225 + 31 = 256$

На 1 меньше:

<u>Методика:</u> из квадрата числа на единицу больше вычитаем само число и число на единицу больше.

- $19^2 = 20^2 – 19 – 20 = 400 – 39 = 361$
- $24^2 = 25^2 – 24 – 25 = 625 – 25 – 24 = 576$

На 2 больше

<u>Методика:</u> к квадрату числа на 2 меньше прибавляем удвоенную сумму самого числа и числа на 2 меньше.

- $22^2 = 20^2 + 2\cdot(20 + 22) = 400 + 84 = 484$
- $27^2 = 25^2 + 2\cdot(25 + 27) = 625 + 104 = 729$

На 2 меньше

<u>Методика:</u> из квадрата числа на 2 больше вычитаем удвоенную сумму самого числа и числа на 2 больше.

- ✓ $48^2 = 50^2 – 2\cdot(50 + 48) = 2500 – 196 = 2\,304$
- ✓ $98^2 = 100^2 – 2\cdot(100 + 98) = 10\,000 – 396 = 9\,604$

Все эти методики можно легко доказать, выведя алгоритмы из формул квадрата суммы и квадрата разности (о которых сказано выше).

Квадрат чисел, заканчивающихся на 5

<u>Методика:</u> умножим первую цифру саму на себя +1, а в конце допишем 25.
252 = (2· (2+1)) & 25

2 · 3 = 6
625

Это верно и для более сложных примеров:

- ✓ 155^2 = (15*(15+1)) 25 = (15*16)25 = 24 025

Квадрат чисел близких к 50

Методика: Считать квадрат чисел, которые находятся в **диапазоне от 40 до 60**, можно очень простым способом. Алгоритм таков: к 25 прибавляем (или вычитаем) столько, насколько число больше (или меньше) 50. Умножаем эту сумму (или разность) на 100. К этому произведению добавляем квадрат разности числа, возводимого в квадрат, и пятидесяти. Например:

- $44^2 = (25 - 6) \cdot 100 + 6^2 = 1900 + 36 = 1936$
- $53^2 = (25+3) \cdot 100 + 3^2 = 2800 + 9 = 2809$

Квадрат трехзначных чисел

Возведение в квадрат трехзначных чисел может быть осуществлено при помощи одной из формул сокращенного умножения:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Нельзя сказать, что этот способ является удобным для устного счета, но в особо сложных случаях его можно взять на вооружение:

$436^2 = (400 + 30 + 6)^2 = 400^2 + 30^2 + 6^2 + 2\cdot400\cdot30 + 2\cdot400\cdot6 + 2\cdot30\cdot6 =$

$= 160\ 000 + 900 + 36 + 24\ 000 + 4\ 800 + 360 = 190\ 096$

7. *За страницами математики.* Быстрое возведение чисел в степень с помощью языков программирования C++ и Pascal

Для возведения числа x в степень n, как правило, число x умножают n раз само на себя.

Другое дело программирование, где важно не только решить поставленную задачу, но и составить оптимальное решение, удовлетворяющее предусмотренному диапазону входных данных. Так, в частности, для операции возведения числа в степень имеется алгоритм, позволяющий значительно сократить число требуемых операций. Он достаточно прост и основывается на математических свойствах степеней.

Пусть имеется некоторая степень x^n, где x – действительное число, а n – натуральное. Тогда для x^n справедливо равенство: $x^n = (x^m)^k$

При этом $m \cdot k = n$. Например, $3^6=(3^3)^2$, $5^7=(5^7)^1$. Это свойство является одним из основных степенных свойств, и именно на нем основывается рассматриваемый метод. Далее, заметим, что в случае, если *n* является *четным* числом, то верно следующее равенство:

$$x^n = (x^{n/2})^2 = x^{n/2} \cdot x^{n/2}$$

Так, если $x = 3$, а $n = 6$, то имеем $3^6 = (3^{6/2})^2 = 3^{6/2} \cdot 3^{6/2}$. Используя это свойство, удастся существенно уменьшить число операций необходимых для возведения *x* в степень *n*. Теперь адаптируем формулу для случая с *нечетным* *n*. Для этого понадобится просто перейти к степени на единицу меньшей. Например, $5^7 = 5^6 \cdot 5$, $12^5 = 12^4 \cdot 12$. Общая форма равенства перехода:

$$x^n = x^{n-1} \cdot x$$

В программе, реализующей алгоритм быстрого возведения в степень, используются указанные свойства: если степень n четная, то переходим к степени вдвое меньшей, иначе заменяем по имеющимся правилам нечетную степень на четную.

Код программы на C++

```cpp
#include "stdafx.h"
#include <iostream>
using namespace std;
//быстрое возведение в степень
float bpow(float x, int n)
{
float count=1;
if (!n) return 1;
while (n)
{
if (n%2==0)
{
n/=2;
x*=x;
}
else
{
n--;
count*=x;
}
}
return count;
}
//главная функция
void main()
{
setlocale(LC_ALL,"Rus");
float x; int n;
cout<<"Основание > "; cin>>x;
cout<<"Степень > "; cin>>n;
cout<<x<<"^"<<n<<"="<<bpow(x, n);
system("pause>>void");
}
```

Код программы на Pascal

```pascal
program Exponentiation;
uses crt;
var x: real; n: integer;
{быстрое возведение в степень}
function bpow(x: real;
n: integer): real;
var count: real;
begin
if n=0 then
begin
bpow:=1; exit;
end;
count:=1;
while n>0 do
begin
if n mod 2=0 then
begin
n:=n div 2;
x:=x*x;
end
else
begin
n:=n-1;
count:=count*x;
end;
end;
bpow:=count;
end;
{основной блок программы}
begin
write('Основание > '); read(x);
write('Степень > '); read(n);
write(x, '^', n, '=', bpow(x, n));
end.
```

II. Методы и способы извлечения корней n-ой степени

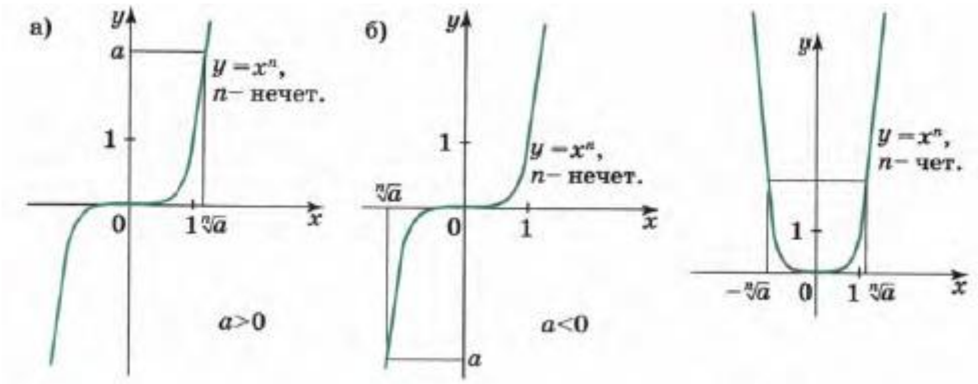
1. Корень n-ой степени

Напомним, что квадратным корнем из числа a называется такое число, квадрат которого равен a. Аналогично определяется корень любой натуральной степени n.

Корнем n-ой степени из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.

Например, корнем пятой степени из 32 является число 2, так как $2^5 = 32$; корнем четвертой степени из 81 является каждое из чисел 3 и -3, так как $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$. Корень второй степени принято называть квадратным корнем, а корень третьей степени — кубическим корнем.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^n$ с нечетным показателем n. Для любого числа a существует единственное значение x, n-я степень которого равна a. Это значение является корнем n-й степени из a. Для записи корня нечетной степени n из числа a используют обозначение $\sqrt[n]{a}$ (читают: «Корень n-й степени из a»). Число n называют *показателем корня*, выражение, стоящее под знаком корня, — *подкоренным выражением.*



Приведем примеры.

Запись $\sqrt[3]{125}$ означает кубический корень из 125. Из определения корня следует, что $\sqrt[3]{125} = 5$, так как $5^3 = 125$. Запись $\sqrt[7]{-128}$ означает корень седьмой степени из -128. Так как $-128 = (-2)^2$, то $\sqrt[7]{-128} = -2$.

Рассмотрим теперь степенную функцию $y = x^n$ с четным показателем n. При любом $a > 0$ существует два противоположных значения x, n-я степень которых равна a. При $a = 0$ такое число одно (число 0), при $a < 0$ таких чисел нет. Другими словами, если n – четное число и $a > 0$, то существует два корня n-ой степени из a. Эти корни являются противоположными числами. Если $a = 0$, то корень n-ой степени из a равен нулю. Если $a < 0$ и n – четное число, то корня n-ой степени из a не существует.

В случае четного n знаком $\sqrt[n]{a}$ обозначают неотрицательный корень n-ой степени из a. Отрицательный корень n-ой степени из a (при $a > 0$) записывают так: $-\sqrt[n]{a}$. Выражение $\sqrt[n]{a}$ при четном n и $a < 0$ не имеет смысла.

Итак, если n – нечетное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом a; если n – четное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл лишь при $a \geq 0$.

Из определения корня n-ой степени следует, что при всех значениях a, при которых выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл, верно равенство $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$.

Выражение $\sqrt[n]{a}$ при $a \geq 0$ имеет смысл как при четном, так и при нечетном n, и значение этого выражения является неотрицательным числом. Его называют арифметическим корнем n-ой степени из a.

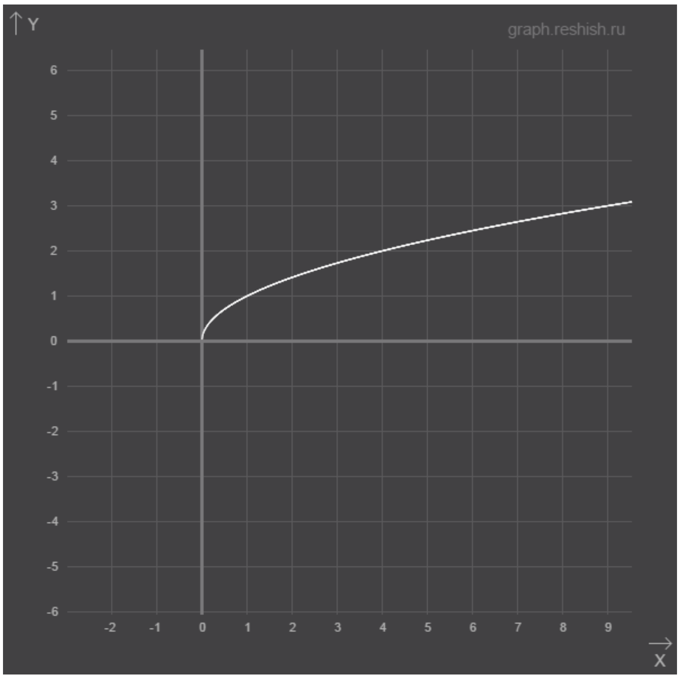
Арифметическим корнем n-ой степени из неотрицательного числа a называют неотрицательное число, n-ая степень которого равна a.

Корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень. Например, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$, так как $\sqrt[3]{-8} = -2$ и $-\sqrt[3]{8} = -2$.

Вообще, при любом нечетном n и положительном a верно равенство $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

2. Функция вида $y = \sqrt[n]{x}$

Выше мы ввели понятие корня n-й степени, отметили, что из любого неотрицательного числа можно извлечь корень любой степени (второй, третьей, четвертой и т.д.), а из отрицательного числа можно извлечь корень любой нечетной степени. Но тогда следует подумать и о функции вида $y = \sqrt[n]{x}$, о ее графике, о ее свойствах.



Функция вида $y = \sqrt[n]{x}$, где n = чётное

График функции $y = \sqrt[n]{x}$, где n = чётное, можно получить из графика функции $y = x^2$, $x \geq 0$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$.

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, где n = чётное.

1) Область определения функции $[0; +\infty)$;

2) Функция не является ни четной, ни нечетной;
3) Возрастает на $[0;\ +\infty)$;
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) Не имеет наибольшего значения; $y_{min} = 0$;
6) Непрерывна;
7) Область значений функции $[0;\ +\infty)$

Здесь можно дать понятие выпуклости вверх и выпуклости вниз. График функции $y = \sqrt[n]{x}$, где n = чётное, обращен выпуклостью вверх, тогда как график функции $y = x^n$, где n = чётное, обращен выпуклостью вниз.

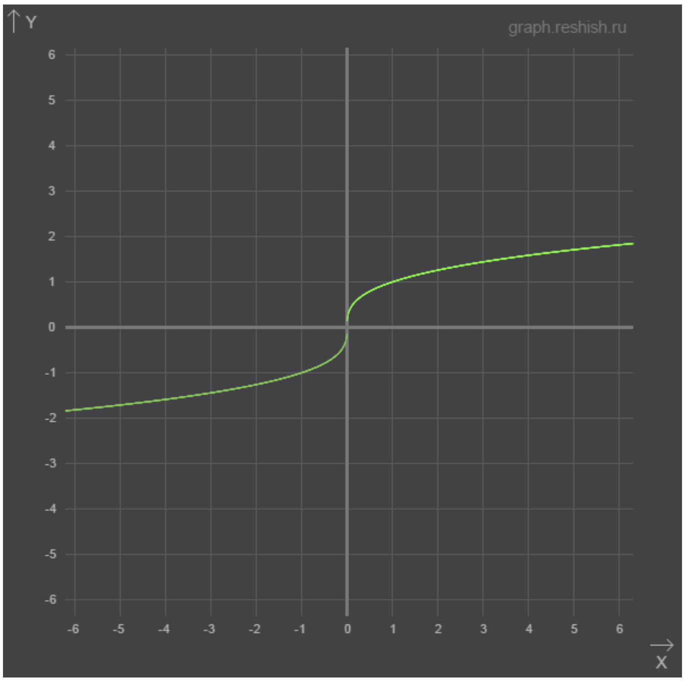
Обычно говорят, что непрерывная функция выпукла вниз, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит ниже проведенного отрезка; непрерывная функция выпукла вверх, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит выше проведенного отрезка.

Функция вида $y = \sqrt[n]{x}$, где n = нечётное

Далее есть смысл поговорить о функции $y = \sqrt[n]{x}$, где n = нечётное, для любых значений x.

Собственно говоря, если n – нечетное число ($n = 3, 5, 7, \ldots$), то $y = \sqrt[n]{x}$ – нечетная функция.

Как же выглядит график функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае нечетного показателя n? При $x \geq 0$ ветвь можно получить из графика функции $y = x^n$, $x \geq 0$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$. Добавив к ней ветвь, симметричную ей относительно начала координат (что, напомним, характерно для любой нечетной функции), получим график функции $y = \sqrt[n]{x}$, где n = нечётное, и здесь ось y является касательной к графику в точке $x = 0$.



Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, где n = нечётное.

1) Область определения функции $(-\infty;\ +\infty)$;
2) Функция нечетная;
3) Возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$;
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу;

5) Не имеет наибольшего и наименьшего значений;
6) Непрерывна;
7) Область значений функции $(-\infty;\ +\infty)$

Итак, повторим еще раз:
если n – четное число, то график функции $y = \sqrt[n]{x}$ существует только в 1 четверти, если n – нечетное число, то график функции $y = \sqrt[n]{x}$ существует и в 1 четверти, и в 3 четверти.

3. Свойства корня *n*-ой степени

Чтобы успешно использовать на практике операцию извлечения корня, нужно познакомиться со свойствами этой операции, что мы и сделаем.

Все свойства формулируются только для неотрицательных значений переменных, содержащихся под знаками корней.

1^0. *Корень n-ой степени из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней n-ой степени из этих чисел.*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

2^0. *Если $a \geq 0$ и $b > 0$ и n – натуральное число, большее 1, то справедливо равенство:*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Краткая (хотя и неточная) формулировка, которую удобнее использовать на практике: корень из дроби равен дроби от корней.

3^0. *Если $a \geq 0$, k и n – натуральные числа, большие 1, то справедливо равенство:*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

Иными словами, чтобы возвести корень в натуральную степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение.

4^0. *Если $a \geq 0$, k и n – натуральные числа, большие 1, то справедливо равенство:*

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Иными словами, чтобы извлечь корень из корня, достаточно перемножить показатели корней.

5^0. *Если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится.*

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$$

Все свойства корней, которые мы обсуждали в этом параграфе, рассмотрены нами только для случая, когда переменные принимают лишь неотрицательные значения? Почему пришлось сделать такое ограничение? Потому, что корень n-й степени из отрицательного числа не всегда имеет смысл – он определен только для нечетных значений n. Для таких значений показателя корня рассмотренные свойства корней верны и в случае отрицательных подкоренных выражений.

4. История квадратного корня

Знак корня (радикал) происходит из строчной латинской буквы r (начальной в лат. radix – корень), сросшейся с надстрочной чертой: ранее, надчеркивание выражения использовалось вместо нынешнего заключения его в скобки. Так что $\sqrt{a+b}$ есть всего лишь видоизменённый способ записи выражения $r\overline{a+b}$.

Впервые такое обозначение использовал немецкий математик Томас Рудольф в 1525 году.

Оказывается, существует неофициальный праздник, посвященный квадратному корню.

День квадратного корня – праздник, отмечаемый девять раз в столетие: в день, когда и число, и порядковый номер месяца являются квадратными корнями из двух последних цифр года (например, 2 февраля 2004 года: 02-02-04).

Впервые этот праздник отмечался 9 сентября 1981 года (09-09-81). Основателем праздника является школьный учитель Рон Гордон из города Редвуд Сити, Калифорния, США. По состоянию на 2010 год Гордон продолжает публиковать заметки о придуманном им празднике, активно контактируя по этому поводу со СМИ. Его дочь с помощью Facebook собрала группу поклонников этого праздника, где каждый может поделиться своим способом отметить эту необычную дату.

Главным блюдом на этом «праздничном столе» обычно являются вареные кубики из овощей и выпечка в форме математического знака квадратного корня.

По объективным математическим причинам этот праздник может отмечаться строго девять раз в столетие (семь раз в первой половине века и дважды — во второй), всегда в одни и те же дни:

1 января xx01 года

2 февраля xx04 года

3 марта xx09 года

4 апреля xx16 года

5 мая xx25 года

6 июня xx36 года

7 июля xx49 года

8 августа xx64 года

9 сентября xx81 года

При этом интересно заметить, что промежуток (в годах) между праздниками составляет непрерывную последовательность нечётных чисел: 3. 5, 7 и т. д.

Рассмотрим приближенные методы извлечения квадратного корня (без использования калькулятора), используемые в древности.

Древние вавилоняне пользовались следующим способом нахождения приближенного значения квадратного корня их числа. Число x они представляли в виде суммы $a^2 + b$, где a^2 ближайший к числу x точный квадрат натурального числа а ($a^2 \leq x$), и пользовались формулой

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

Извлечем с помощью этой формулы корень квадратный, например, из числа 28:

$$\sqrt{28} = \sqrt{5^2 + 3} \approx 5 + \frac{3}{2 \cdot 5} \approx 5{,}3.$$

Результат извлечения корня из 28 с помощью микрокалькулятора 5,2915026.

Как видим способ вавилонян дает хорошее приближение к точному значению корня.

Исаак Ньютон разработал метод извлечения квадратного корня, который восходил еще к Герону Александрийскому (около 100 г. н.э.). Метод этот (известный как метод Ньютона) заключается в следующем.

Пусть a_1 — первое приближение числа $\sqrt{x}$ (в качестве a_1 можно брать значения квадратного корня из натурального числа – точного квадрата, не превосходящего x).

Следующее, более точное приближение a_2 числа $\sqrt{x}$ найдется по формуле

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{x}{a_1}\right).$$

Третье, еще более точное приближение

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{x}{a_2}\right)$$

и т.д.

$(n + 1)$-е приближение $\sqrt{x}$ найдется по формуле

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right).$$

Нахождение приближенного значения числа $\sqrt{28}$ методом Ньютона дает следующие результаты: $a_1 = 5$; $a_2 = 5{,}3$; $a_3 = 5{,}2915$.

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$ - формула Ньютона для нахождения квадратного корня из числа x ($n = 2, 3, 4, \ldots$, a_n - n-е приближение $\sqrt{x}$).

5. Извлечение квадратного корня из многозначных чисел

Для извлечения квадратного корня существуют таблицы квадратов для двухзначных чисел, можно разложить число на простые множители и извлечь квадратный корень из произведения. Таблицы квадратов бывает недостаточно, извлечение корня разложением на множители - трудоёмкая задача, которая тоже не всегда приводит к желаемому результату. Попробуйте извлечь квадратный корень из числа 209764? Разложение на простые множители дает произведение 2·2·52441. Методом проб и ошибок, подбором – это, конечно, можно сделать, если быть уверенным в том, что это целое число. Способ, приведенный ниже, позволяет извлечь квадратный корень в любом случае.

Основой этого способа, является состав числа

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0.$$

Извлечем квадратный корень из числа 5963364. Искомое число &: $\sqrt{5963364}$ = &, т.е. & ^{2} = 596334.

1. Разбиваем число (5963364) на пары справа налево (5\`96\`33\`64)

2. Извлекаем квадратный корень из первой слева группы ($\sqrt{5}$ – число 2). Так мы получаем первую цифру числа &.

3. Находим квадрат первой цифры (2 ^{2} = 4).

4. Находим разность первой группы и квадрата первой цифры (5 – 4 = 1).

5. Сносим следующие две цифры (получили число 196).

6. Удваиваем первую, найденную нами цифру, записываем слева за чертой

(2 · 2 = 4).

7.Теперь необходимо найти вторую цифру числа &: удвоенная первая цифра, найденная нами, становится цифрой десятков числа, при умножении которого на число единиц, необходимо получить число меньшее 196 (это цифра 4, 44·4=176). 4 – вторая цифра числа &.

8. Находим разность (196 – 176 = 20).

9. Сносим следующую группу (получаем число 2033).

10. Удваиваем число 24, получаем 48.

11. 48 десятков в числе, при умножении которого на число единиц, мы должны получить число меньшее 2033 (484*4=1936). Найденная нами цифра единиц (4) и есть третья цифра числа &.

$$\sqrt{5'96'33'64} = 2442$$

$$\begin{array}{r|l}
44 & \underline{4} \\
\underline{4} & 1\ 96 \\
484 & \underline{1\ 76} \\
\underline{4} & \quad 20\ 33 \\
4882 & \quad \underline{19\ 36} \\
2 & \qquad 97\ 64 \\
 & \qquad \underline{97\ 64} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

Далее процесс повторяется.

Доказательство для случая извлечения квадратного корня из трехзначного числа:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c \qquad \overline{mn} = 10m + n$$

$$\begin{array}{r|l}
2m \cdot 10 + n & \sqrt{\overline{abc}} = \overline{mn} \\
n & \underline{m^2} \\
 & (a - m^2)100 + 10b + c \\
 & \underline{20mn + n^2} \\
 & 100a + 100m^2 + 10b + c - 20mn - n^2 \\
 & \text{так как корень извлекается, то остаток равен нулю} \\
 & 100a + 100m^2 + 10b + c - 20mn - n^2 = 0 \\
 & \text{для удобства разбиваем на части, т. е.} \\
 & 100a + 10b + c = 100m^2 + 20mn + n^2 \\
 & \overline{abc} = (10m + n)^2
\end{array}$$

следовательно, $\overline{abc}$ - это квадрат числа $\overline{mn}$

Доказательство для случая извлечения квадратного корня из четырехзначного числа:

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$$

$$2m \bullet 10 + n \;\Big|\; \sqrt{\overline{abcd}} = \overline{mn}$$

$$n \;\Big|\; m^2$$

$$(10a + b - m^2)100 + 10c + d$$

$$20mn + n^2$$

$$1000a + 100b - 100m^2 + 10c + d - 20mn - n^2 = 0$$

$$1000a + 100b + 10c + d = 100m^2 + 20mn + n^2$$

$$\overline{abcd} = (10m + n)^2$$

следовательно, $\overline{abcd}$ *- это квадрат числа* $\overline{mn}$

Указанный способ позволяет извлекать квадратный корень из большого числа с любой точностью, правда с существенным недостатком: громоздкость вычислений.

6. *За страницами математики.* Извлечение из чисел корней n-ой степени с помощью языков программирования C++ и Pascal

Код программы на C++

```
#include<iostream>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
using namespace std;

int main()
{setlocale(LC_ALL,"Rus");
float a,b;
int c,t=0;
cout<<"Введите число --> ";
cin>>a;
cout<<"Введите  степень извлечения -->
";
cin>>b;
c=b;
if(a<0&&c%2!=0)
{a*=-1;t++;}
if(a<0&&c%2==0||b-c>0)
        {cout<<"Ошибка ";
cin.get();
cin.get();
exit(0);}
b=pow(a,1/b);
if (t!=0)
```

Код программы на Pascal

```
Program koren;
var k,n:integer;
s:real;
Function po(x:real;m:integer):real;
   var y:real;
    i:integer;
   Begin
   y:=1;
   For i:=1 to m do
   y:=y*x;
   po:=y;
   end;
Begin
Writeln ('Введите число и степень
понижения через пробел');
Readln (k,n);
if n>0
then
    begin
   s:=Po(k,(1/n));
   Writeln ('корень  ',n,'-ой степени
из   ',k,'   равен  ',s:10:3);
   Readln;
   end
```

```
        b*=-1;
cout<<"Результат = "<<b;
cin.get();
cin.get();
return 0;
}
```

```
   else Writeln ('Ошибка');
readln;
End.
```

Заключение

Работа над данным показала показала, что изучение корней – не прихоть математиков, а объективная необходимость: в реальной жизни случаются ситуации, математические модели которых содержат операцию извлечения квадратного корня. Но не всегда под рукой мы имеем калькулятор. Помимо того, бывают ситуации, когда использование калькулятора недопустимо, например, на ЕГЭ. Вот тогда-то и придут на помощь материалы данной работы, которые позволяют быстро, эффективно справиться с предложенными заданиями.

В предисловии к своему первому изданию «В царстве смекалки» (1908 год) Е. И. Игнатьев пишет: «... умственную самодеятельность, сообразительность и «смекалку» нельзя ни «вдолбить», ни «вложить» ни в чью голову. Результаты надёжны лишь тогда, когда введение в область математических знаний совершается в лёгкой и приятной форме, на предметах и примерах обыденной и повседневной обстановки, подобранных с надлежащим остроумием и занимательностью».

Мы не можем не согласиться с известным русским математиком, так как в математике следует помнить не формулы, а процесс мышления.

Список используемой литературы

- Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразоват. организаций / А45 [Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.И.Нешков, С.Б.Суворова] ; под ред. С. А. Теляковского. - 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.
- Алгебра: учеб. для 8-х кл. общеобразоват. шк. с углубл. изучением математики / К.О. Ананченко и др. – Мн.: Нар. асвета, 1994.
- Петраков И.С. «Математические кружки в 8–10 классах»: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1987 г.
- Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика/ Глав. ред. М. Аксенова. М.: Аванта+плюс. 2004 г.

Интернет-ресурсы

- http://graph.reshish.ru/
- http://www.nado5.ru/e-book
- http://4brain.ru/schitat-v-ume/vozvedenie-v-kvadrat.php
- http://kvodo.ru/byistroe-vozvedenie-v-stepen.html
- http://festival.1september.ru/articles/517087/
- http://genius.pstu.ru/file.php/1/pupils_works/Bursuk.pdf
- http://mathematik.boom.ru/
- http://www.worldlingo.com/ma/enwiki/ru/