МБОУ «Многопрофильный лицей №11им.В.Г.Мендельсона»
г.Ульяновск.

Программа элективного курса

«Подготовка ЕГЭ. Поиски решения нестандартных задач»

для 10-11 класс.

Учитель математики
высшей квалификационной категории
Спиридонова Валентина Васильевна

Пояснительная записка

На уроках в общеобразовательных школах учащиеся 10-11 классах только знакомятся с основными простейшими методами решения уравнений и неравенств. Для решения сложных задач, накопления нестандартных методов и приемов решения не хватает времени. А того объема упражнений, которые предлагаются в учебниках по алгебре и началам анализа для 10-11 классов, и вовсе недостаточно для формирования умения решать уравнения и неравенства. С этой точки зрения тема элективного курса «Поиски решения нестандартных задач» весьма актуальна. Ее рассмотрение обобщает опыт изучения в школьном курсе разнообразных способов решения уравнений и неравенств, а также компенсирует достаточно ограниченные возможности базового курса.

Предметом настоящего элективного курса является практика решения более сложных уравнений и неравенств. На спецкурсе добавляются новые, интересные способы и приемы решения (использование свойств функции, метод ОДЗ и др.) Изучение этих новых методов на занятиях должны помочь ученику впоследствии увидеть «идеи» при поиске способа решения конкурсных задач. Также на занятиях у учащихся есть возможность получить навыки самостоятельной работы в плане отбора, поиска и решения нестандартных заданий. Таким образом, делая выборку нестандартных уравнений и неравенств, ребята получают навыки работы с математической литературой.

Программа рассчитана на 17 часов классных занятий и может проводиться в течение одного учебного полугодия.

***Цель* программы элективного курса** - подготовка к сдаче ЕГЭ по математике, расширение и углубление знаний учащихся по предмету, повышение уровня математической подготовки выпускников средней школы.

Развивающие и познавательные цели элективного курса:

- дальнейшее формирование интереса к предмету;
- повышение математической культуры учащихся;
- дальнейшее развитие навыков самостоятельной работы
- развитие творческих способностей школьников (ведь если ученик с успехом разбирает и решает трудные задачи, то с определенной уверенностью можно предположить, что у него имеются определенные математические способности).

Задачи **данной программы состоят в том, чтобы научить учащихся:**

1. Применять различные методы и приемы решения данного класса уравнений и неравенств.
2. Применять разнообразные способы решения одного и того же уравнения (неравенства).
3. Применять уже изученные методы и приемы на практике.
4. Решать более сложные задания.

Методы проведения занятий в форме: лекций; семинаров, посвящённых разрешению проблемных ситуаций.

Ученики самостоятельно, в микрогруппах, в сотрудничестве с учителем выполняют различные задания в соответствии со своими познавательными приоритетами и возможностями, на занятиях обсуждаются результаты этой работы, заслушиваются рефераты, творческие работы, проекты, презентации (по выбору ученика).

Ожидаемый результат.

К концу работы по программе элективного курса учащиеся должны четко знать основные способы решения уравнений и неравенств, уметь быстро определить метод решения данного уравнения и неравенства; а в случаях, если способов решения несколько, найти альтернативный вариант. Также итогом совместной работы учителя и учеников должна явиться «копилка» интересных уравнений и неравенств. И результатом этой работы может служить самостоятельная подготовка отдельных сообщений по предложенным темам на заключительном семинаре.

Уравнения в целых числах

1. $x^2 - y^2 = 93$

<u>Поиск решения</u>

Решить уравнение с двумя неизвестными в целых числах - значит найти все пары чисел, удовлетворяющих данному уравнению, или убедиться, что ни одной такой пары нет.

Левая часть урпанения разлагается на целые множители, а правая часть - целое число, то решение начинаем с разложения левой части:

$(x + y)(x - y) = 93$, но $93 = 1 \cdot 93 = -1 \cdot (-93) = 3 \cdot 31 = -3 \cdot (-31)$

Решение:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 93; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 93 \\ x - y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -93; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -93 \\ x - y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 31; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 31 \\ x - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = -31; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -31 \\ x - y = -3; \end{cases}$$

Решив каждую систему, получим 8 решений данного уравнения: (47; –46), (47; 46), (–47; 46), (–47; –46), (17; –14), (17; 14), (–17; 14), (–17; –14).

В данном уравнении неизвестные x и y находятся в четной степени, поэтому решеня будут состоять из двух решений (17; 14) и (47; 46). Если бы одна или несколько систем имела решением нецелые числа, то их в ответ не включать.

Ответ: (17; 14), (47; 46).

Пример №2.

$xy + 3x - 5y = -3$

<u>Поиск решения</u>

Правая часть – целое число, левая же часть на целые множители не раскладывается. Возникли трудности, но если к обеим частям прибавим целое число, то правая часть окажется опять целым числом. Возникает вопрос: «Нельзя ли к обеим частям прибавить такое целое число, что бы левую часть можно было разложить на целые множители?» Оказывается можно, таким числом является- число –15.

Решение:

$xy + 3x - 5y - 15 = -3 - 15$

$x (y +3) - 5(y + 3) = -18$

$(y + 3)(x - 5) = -18$

Получаем случай, рассмотренный выше.

Пример №3.

$x^2 + y^2 = 6$

Решение:

$(x - y)(x + y) = 6$

Затем получаем системы:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -6; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -6 \\ x + y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = -2. \end{cases}$$

решая которые не получим целых решений.

Значит, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Пример №4.

$x^2 + 4xy + 5y^2 = 169$

Поиск решения

Левая часть уравнения представляет собой многочлен второй степени. При решении таких задач часто пользуются либо разложением на множители этого многочлена, либо выделением из него полного квадрата. Разложение не годится, значит, выделяем полный квадрат.

Решение:

$x^2 - 4xy + 5y^2 = (x^2 - 4xy + 4y^2) + y^2 = (x - 2y)^2 + y^2$

$(x - 2y)^2 + y^2 = 169$

$(x - 2y)^2 + y^2 = 13^2$

Сумма квадратов двух чисел равна квадрату третьего числа. Такой тройкой чисел оказываются числа 5; 12 и 13.

Поэтому существует восемь пар чисел, удовлетворяющих условию $(x - 2y)^2 + y^2 = 13^2$, а именно (5; 12), (12; 5), (–5; –12), (–12; –5), (–5; 12), (–12; 5), (5; –12), (12; –5).

Составляем системы вида:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ y = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 12 \\ y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = -5 \\ y = -12; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = -12 \\ y = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = -5 \\ y = 12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = -12 \\ y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 5 \\ y = -12; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 12 \\ y = -5. \end{cases}$$

Уравнения в с одним неизвестным

Пример №1.

$(x-4)(x-6)(x^2+5x+6)=40x^2$

Поиск решения

В левой части уравнения третий множитель – квадратный трехчлен, разложим его на множители по формуле: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена. Затем выполним преобразования, используя переместительный закон умножения.

Решение:

$(x-4)(x-6)(x^2+5x+6)=40x^2$

$x^2+5x+6=0;$ $\quad D=25-24=1>0$

$\begin{cases} x1+x2=-5 \\ x_1\cdot x_2=6 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x_1=-2 \\ x=-3 \end{matrix}$

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

$(x-4)(x-6)(x+2)(x+3)=40x^2$

$((x-4)(x+3))((x-6)(x+2))=40x^2$

$(x^2-x-12)(x^2-4x-12)=40x^2 \quad |: x^2, x\neq 0$

$\dfrac{x2-x-12}{x}\cdot\dfrac{x2-4x-12}{x}=40$

$(x-1-\dfrac{12}{x})(x-4-\dfrac{12}{x})=40$

Введем новую переменную $x-\dfrac{12}{x}=y,\ x\neq 0.$

Получим:

$(y-1)(y-4)=40$

$y^2-5y+4=40$

$y^2-5y-36=0.$ $\quad D>0$

$\begin{cases} y_1+y_2=5 \\ y_1\cdot y_2=-36 \end{cases}$ $\quad y_1=9,\quad y_2=-4$

Имеем:

$x-\dfrac{12}{x}=9$ или $x-\dfrac{12}{x}=-4$

$x^2-12=9x$ $\qquad x^2-12=-4x$

$x^2-9x-12=0$ $\qquad x^2+4x-12=0$

$D=81+48=129$ $\qquad D=16+48=64$

$x_1=\dfrac{9+\sqrt{129}}{2}$ $\qquad x_3=\dfrac{-4+8}{2}=2;$

$x_2=\dfrac{9-\sqrt{129}}{2}$ $\qquad x_4=-6$

x_1 и x_2 – иррациональные числа. $\quad x_3=2$ и $x_4=-6$ – целые числа.

Ответ: –6; 2

Пример №2.

$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$

Поиск решения

Если в левой части данного уравнения раскрыть скобки, то получиться уравнение четвертой степени. А нет ли более удобного способа? Замечаем, что если перемножить отдельно крайние множители и средние, то получим одно и тоже выражение $x^2 + 3x$. Таким образом выход найден.

Решение:

$(x(x + 3))((x + 1)(x + 2)) = 24$

$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 24$

Пусть $x^2 + 3x = t$

Тогда $t(t + 2) = 24$

$t^2 + 2t - 24 = 0;$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -2 \\ t_1 \cdot t_2 = -24 \end{cases}$$

$t_1 = -6;\ t_2 = 4.$

Решаем уравнения

$x^2 + 3x = -6$	и	$x^2 + 3x = 4$
$x^2 + 3x + 6 = 0$		$x^2 + 3x - 4 = 0$
$D = 9 - 24 < 0$		$D = 25 > 0$
корней нет.		$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases}$
		$x_1 = 1;\ x_2 = -4.$

Ответ: $-4;\ 1.$

Пример №3.

$$\frac{3}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0.$$

Поиск решения

Если привести все дроби, стоящие в левой части, к общему знаменателю, то потребуется громозкие преобразования и получим уравнениепятой степени. Значит, этот способ не подходит, нужно искать более удобный. Однако замечаем, что чистели попарно одинаковы, а знаменатели каждой пары содержатпосле их преобразования одно и то же выражение $x^2 - 5x$.

Поэтому целесообразно преобразовать каждую пару дробей в отдельности.

Решение:

$$\left(\frac{3}{x} + \frac{4}{x-5}\right) + \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4}\right) + \left(\frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3}\right) = 0$$

$$\frac{6x-15}{x^2-5x} + \frac{2x-5}{x^2-5x+4} + \frac{8x-20}{x^2-5x+6} = 0$$

$$\frac{3(2x-5)}{x^2-5x} + \frac{2x-5}{x^2-5x+4} + \frac{4(2x-5}{x^2-5x+6} = 0$$

Замечаем, что одним из корней уравнения является число 2,5, т.к. при $x = 2{,}5$ ни один знаменатель не обращается в ноль. Для нахождения остальных корней надо решить уравнение:

$$\frac{3}{x^2-5x} + \frac{1}{x^2-5x+4} + \frac{4}{x^2-5x+6} = 0.$$

Пусть $x^2 - 5x = t$, тогда получим:

$$\frac{3}{t} + \frac{1}{t+4} + \frac{4}{t+6} = 0$$

Решив это квадратное уравнение, получим: $t_1 = -2$, $t_2 = -4{,}5$.
Теперь решаем уравнения

$x^2 - 5x = -2$	или	$x^2 - 5x = -4{,}5$
$x^2 - 5x + 2 = 0$		$x^2 - 5x + 4{,}5 = 0$
$D = 25 - 8 = 17 > 0$		$D = 25 - 18 = 7 > 0$
$x_{1;2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$		$x_{3;4} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$

Ответ: $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$; $\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$; 2,5

Пример №4.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x-6}$$

Поиск решения

Можно освободиться от знаменателя, раскрыть скобки, привести подобные члены и получить квадратное уравнение. Но можно попробовать облегчить себе решение: объединить дроби в пары и произвести сначала действия внутри пар.

Решение:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x+6}$$

$$\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x+6} - \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{5x-12}{(x-2)(x-3)} = \frac{5x-12}{(x-1)(x+6)}$$

Грубой ошибкой было бы сокращение обеих частей на $(5x - 12)$, т.к. при этом теряется корень $x = \frac{12}{5}$.

Запомнить: если левая и правая части уравнения имеют общий множитель, то сокращение на него может привести к потере корней. (Иное дело – сокращение на общий множитель числителя и знаменателя алгебраической дроби). В том случае корни не теряются.

Имеем два уравнения:

$5x - 12 = 0$	и	$(x-2)(x-3) = (x+6)(x-1)$
$x^1 = 2{,}4$		$x^2 - 5x + 6 = x^2 + 5x - 6$
		$-10x = -12$
		$x = 1{,}2$

Ответ: 1,2; 2,4

Пример №5.

$$31\left(\frac{24-5x}{x+1}+\frac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\left(\frac{17-7x}{x+2}+\frac{8x+55}{x+3}\right)$$

<u>Поиск решения</u>

Решение этого уравнения «в лоб» приведет к непомерным, не для всех преодолимым вычислительным трудностям. Однако эти трудности можно обойти. Преобразуем каждую из входящих в это уравнение дробь:

$$\frac{24-5x}{x+1}=\frac{29-5x-5}{x+1}=\frac{29-5(x+1)}{x+1}=\frac{20}{x+1}-5$$

$$\frac{5-6x}{x+4}=\frac{29-24-6x}{x+4}=\frac{29-6(x+4)}{x+4}=\frac{29}{x+4}-6$$

$$\frac{17-7x}{x+2}=\frac{31-7x-14}{x+2}=\frac{31-7(x+2)}{x+2}=\frac{31}{x+2}-7$$

$$\frac{8x+55}{x+3}=\frac{8x+24+31}{x+3}=\frac{8(x+3)+31}{x+3}=\frac{31}{x+3}+8$$

Получим:

$$31\left(\frac{29}{x+1}-5+\frac{29}{x+2}-6\right)+370=29\left(\frac{31}{x+2}-7+\frac{31}{x+3}+8\right)$$

$$31\cdot 29\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)-31\cdot 11+370=29\left(\frac{31}{x+2}+\frac{31}{x+3}\right)+29\cdot 1$$

$$31\cdot 29\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}\right)-341+370=29+31\cdot 29\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)$$

$$31\cdot 29\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}\right)+29=29+31\cdot 29\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)$$

$$31\cdot 29\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}\right)=31\cdot 29\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$$

$$\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{x+4-x-3}{(x+3)(x+4)}=\frac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{1}{(x+1)(x+2)} \qquad x\neq-1;\ x\neq-2;\ x\neq-3;\ x\neq-4;$$

$(x+1)(x+2)=(x+3)(x+4)$
$x^2+3x+2=x^2+7x+12$
$-4x=10$ $\qquad$ $x=-2{,}5$

Ответ: –2,5.

Пример №6.

$$\frac{3}{x^2+x-2} = \frac{1}{x(x-1)^2} + \frac{3}{x(x-3)}$$

Поиск решения

Данное уравнение рациональное, что бы привести его к целому виду, умножим обе части на общий знаменатель всех дробей.

Решение:

$$\frac{3}{x^2+x-2} = \frac{1}{x(x-1)^2} + \frac{3}{x(x-3)}$$

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x(x-1)^2} + \frac{3}{x(x-3)}$$

$$3x(x-1)(x-3) = (x+2)(x-3) + 3(x-1)^2(x+2)$$

$$3x^3 - 3x^2 - 9x^2 + 9x = x^2 + 2x - 3x - 6 + 3x^3 - 6x^2 + 3x + 6x^2 - 12$$

$$3x^3 - 12x^2 + 9x = 3x^3 + x^2 - 10x$$

$$-13x^2 + 19x = 0$$

$$-x(13x - 19) = 0$$

$x_1 = 0$ или $13x - 19 = 0$

$$x_2 = \frac{19}{13}$$

Проверка:

$x_1 = 0;$ $-\frac{19}{13} \neq 0;$ $x_1 = 0$ – посторонний корень

$$x = \frac{19}{13}$$

Левая часть уравнения:

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{3}{\left(\frac{19}{13}-1\right)\left(\frac{19}{13}+2\right)} = \frac{3}{\frac{6}{13} \cdot \frac{19+26}{13}} = \frac{3 \cdot 169}{6 \cdot 45} = \frac{169}{90};$$

Правая часть уравнения:

$$\frac{1}{\frac{19}{13}\left(\frac{19}{13}-1\right)^2} + \frac{3}{\frac{19}{13}\left(\frac{19}{13}-3\right)} = \frac{1}{\frac{19}{13}\left(\frac{6}{13}\right)^2} + \frac{3}{\frac{19}{13}\left(-\frac{20}{13}\right)} = \frac{1}{\frac{19}{13} \cdot \frac{36}{169}} - \frac{3}{\frac{19}{13} \cdot \frac{20}{13}} =$$

$$= \frac{13 \cdot 169}{19 \cdot 36} - \frac{3 \cdot 169}{19 \cdot 20} = \frac{13 \cdot 5 \cdot 169}{19 \cdot 180} - \frac{3 \cdot 9 \cdot 169}{19 \cdot 180} = \frac{169(65-27)}{19 \cdot 180} = \frac{169 \cdot 38}{19 \cdot 180} = \frac{169 \cdot 2}{180} = \frac{169}{90}$$

$x = \frac{19}{13}$ – корень уравнения

Ответ: $\frac{19}{13}$.

Пример №7.

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3}$$

Решение:

Прежде чем приводить к общему знаменателю выделим челые части кажой дроьи. Перепишем уравнение в виде:

$$\frac{(x + 1)^2 + 1}{x + 1} + \frac{(x + 4)^2 + 4}{x + 4} = \frac{(x + 2)^2 + 2}{x + 2} + \frac{(x + 3)^2 + 3}{x + 3}$$

Получим равносильное уравнение.

$$x + 1 + \frac{1}{x - 1} + x + 4 + \frac{4}{x + 4} = x + 2 + \frac{2}{x + 2} + x + 3 + \frac{3}{x + 3}$$

$$2x + 5 + \frac{1}{x + 1} + \frac{4}{x + 4} = 2x + 5 + \frac{2}{x + 2} + \frac{3}{x + 3}$$

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{4}{x + 4} = \frac{2}{x + 2} + \frac{3}{x + 3}$$

$$\frac{4}{x + 4} - \frac{3}{x + 3} = \frac{2}{x + 2} - \frac{1}{x + 1}$$

$$\frac{4(x + 3) - 3(x + 4)}{(x + 4)(x + 3)} = \frac{2\,(x + 1) - (x + 2)}{(x + 2)(x + 1)}$$

$$\frac{4x + 12 - 3x - 12}{(x + 3)(x + 4)} = \frac{2x + 2 - x - 2}{(x + 1)(x + 2)}$$

$$\frac{x}{(x + 3)(x + 4)} = \frac{x}{(x + 1)(x + 2)}$$

$x \neq 0;\ x \neq -1;\ x \neq -2;\ x \neq -3;\ x \neq -4.$

$x(x + 1)(x + 2) = x\,(x + 3)(x + 4)$
$(x^2 + 3x + 2)x = x(x^2 + 7x + 12)$
$x(x^2 + 7x + 12) - x(x^2 + 3x + 2) = 0$
$x(x^2 + 7x + 12 - x^2 - 3x - 2) = 0$
$x(4x + 10) = 0$
$x = 0$ или $4x + 10 = 0$
$4x = -10$
$x = -2{,}5$

Ответ: –2,5; 0.

Возвратные уравнения четвертой степени

Определение.

Уравнение четвертой степени

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (1).

называют возвратным, если существует число $\lambda \neq 0$ такое, что коэффициенты уравнения, равноудаленные от концов удовлетворяют условию $d = \lambda \cdot b$, $e = \lambda 2 \cdot a$ (2) или что то же самое $b \neq 0$, условию $\left(\frac{d}{b}\right)^2 = \frac{e}{a}$

Например, уравнение

$2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 6x + 8 = 0$

Возвратное, так как $\left(-\frac{6}{3}\right)^2 = \frac{8}{2}$, т.е. $\lambda = -2$.

Возвратное уравнение можно представить в виде $ax^4 + bx^3 + cx^2 + (\lambda b)x + (\lambda^2 a) = 0$ (3)

Название «возвратное» происходит от следующего свойства такого уравнения.

Если в возвратном уравнении сделать замену $x = \frac{\lambda}{y}$, то относительно нового неизвестного получим прежнее уравнение («возвратимся» к исходнлму уравнению).

Действительно, подставляя в (3) $x = \frac{\lambda}{y}$, получим $\frac{a\lambda^4}{y^4} + \frac{b\lambda^3}{y^3} + \frac{c\lambda^2}{y^2} + \frac{b\lambda^2}{y} + \lambda^2 a = 0$

После приведения к общему знаменателю и сокращения на λ^2, получим прежнее уравнение

$(a\lambda^2) + (b\lambda)y + cy^2 + by^3 + ay^4 = 0$.

Рассмотрим схему решения возвратного уравнения. Так как, очевидно, $x = 0$ не является корнем уравнения (3), то разделив это уравнение почленно на x^2 и сгруппировав члены, равноудаленые от концов, получим равносильное уравнение $a\left(x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) + c = 0$ (4)

Положим $x + \frac{\lambda}{x} = y$

Тогда имеем: $x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2} = \left(x + \frac{\lambda}{x}\right)^2 - 2\lambda = y^2 - 2\lambda$ (5)

Следовательно, относительно нового неизвестного y уравнения становится квадратным

$a(y^2 - 2\lambda) + by + c = 0$.

Если y_1, y_2 – корни этого уравнения, то значения неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 найдем из совокупности уравнений $x + \frac{\lambda}{x} = y_1$, $x + \frac{\lambda}{x} = y_2$

Пример №1.

Решить уравнение $2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 6x + 8 = 0$.

Поиск решения

Это уравнение, как видем, является возвратным. Разделив обе части этого уравнения на x^2 и группируя члены, равноудаленные от концов, получим равносильное уравнение.

Решение:

$2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 6x + 8 = 0 \quad | : x^2$

$2\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{2}{x}\right) - 13 = 0$

Полагая $x - \frac{2}{x} = y$

Найдем $x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 + 4$

После подстановки получим относительно y уравнение

$2y^2 + 8 + 3y - 13 = 0$

$2y^2 + 3y - 5 = 0$

$D = 9 + 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49 > 0$ - два корня.

$y_1 = \frac{-3-7}{4} = -\frac{5}{2}$; $\quad y_2 = \frac{-3+7}{4} = 1.$

Теперь из уравнений

$x - \frac{2}{x} = -\frac{5}{2}$ и $x - \frac{2}{x} = 1$

Находим $2x^2 + 5x - 4 = 0$ $\qquad x^2 - x - 2 = 0$

$D = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 25 + 32 = 57$ $\qquad D > 0$

$x_1 = \frac{-5-\sqrt{57}}{4}$ $\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases}$

$x_3 = -1; x_4 = 2.$

$x_2 = \frac{-5+\sqrt{57}}{4}$

Ответ: $\frac{-5-\sqrt{57}}{4}$; 1; $\frac{-5+\sqrt{57}}{4}$; 2

Частными случаями возвратных уравнений являются уравнения симметрические ($\lambda = 1$)

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \qquad (6)$

(коэффициенты членов, равноотносящих от начала и от конца одинаковы) и косометрические ($\lambda = -1$)

$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \qquad (7)$

(коэффициенты членов, равноотносящих от концов, при четных степенях равны, а при нечетных равны по обсолютной величине и противоположны по знаку).

Подстановкой $x + \frac{1}{x} = y$ для симметрического и $x - \frac{1}{x} = y$ для косометрического уравнения они сводятся к квадратным уравнениям.

Пример №2.

$y^5 - 1 = 0$

Решение:

$y^5 - 1 = 0$

$(y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) = 0$

$y - 1 = 0$ или $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0$ - симметрическое уравнение.

$y = 1$

Решим уравнение $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0 \quad |: y^2$

получим равносильное уравнение

$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + 1 = 0$

Полагая $y + \frac{1}{y} = z$, $\left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = z^2$, $y^2 + 2 + \frac{1}{y^2} = z^2$,

Получим $y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2$

$z^2 - 2 + z + 1 = 0$

$z^2 + z - 1 = 0$

$D = 1 + 4 = 5 > 0 \qquad z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\quad z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Для нахождения *у* получаем совокупность двух квадратных уравнений:

$y + \frac{1}{y} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ и $y + \frac{1}{y} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$2y^2 + (1 + \sqrt{5})\, y + 2 = 0$ и $2y^2 - (\sqrt{5} - 1)\, y + 2 = 0$

$D = (1 + \sqrt{5})^2 - 16 =$
$= 1 + 2\sqrt{5} + 5 - 16 = 2\sqrt{5} - 10$

$D = (\sqrt{5} - 1)^2 - 16 =$
$= 5 - 2\sqrt{5} + 1 - 16 = -2\sqrt{5} - 10$

$y_{1,2} = \frac{-(1 + \sqrt{5}) \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot i}{4}$; $y_{3,4} = \frac{\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot i}{4}$

Ответ: $\frac{-(1 + \sqrt{5}) \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$; $\frac{\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot i}{4}$

Пример №3.

$6x^3 + x^2 - 11x - 6 = 0$

Нахождение рациональных (в частности, целых) корней алгебраических уравнений с целыми коэффициентами основано на следующей теореме.

Пусть $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$ - уравнение с целыми коэффициентами.

Если число $x_0 = \frac{p}{q}$, где p и q - целые числа и дробь $\frac{p}{q}$ несократима, является корнем уравнения, то p - есть делитель свободного члена a_n, а q - делитель коэфициента при старшем числе a_0

Решение:

Рациональные корни этого уравнения следует искать среди чисел:
$\pm1; \pm2; \pm3; \pm6; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{2}{3}; \pm\frac{1}{6}$

Подставляя их поочередно в данное уравнение, найдем, что число $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = -\frac{2}{3}$ удовлетворяют уравнению. Ими и исчерпываются все корни уравнения.

Ответ: $-1; \frac{3}{2}; -\frac{2}{3}$

Решить самостоятельно.

1) $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$ 2) $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

При решении уравнений, содержащих переменную под знаком моделя, применяются чаще всего следующие методы: 1) раскрытие модуля по определению; 2) возведение обеих частей уравнения в квадрат; 3) метод разбиения на промежутки.

Пример №1.

Решим уравнение $|2x - 3| = 5$

Решение:

<u>*1 способ.*</u> Так как по определению $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \ge 0 \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0 \end{cases}$, то уравнение равносидльно следующей совокупности двух смешанных систем

$\begin{cases} 2x - 3 \ge 0 \\ 2x - 3 = 5 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ -(2x - 3) = 5 \end{cases}$

$x_1 = 4$ $\quad$ $x_2 = -1$

<u>*2 способ.*</u> Так как обе части уравнения $|2x - 3| = 5$ неотрицательны, то это уравнение равносильно следующему уравнению $|2x - 3|^2 = 25$.

Но $|f(x)|^2 = f(x)$, поэтому наше уравнение равносилно уравнению $(2x - 3)^2 = 25$

Откуда, получим: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$

Ответ: 4; –1.

Пример №2.

Решим уравнение $|2x - 3| = x + 1$

Решение:

Это уравнение, как и предыдущее, может быть решено двумя способами.

При решении первым способом будет получена равносильная уравнению слудующая совокупность смешанных систем.

$\begin{cases} 2x - 3 \ge 0 \\ 2x - 3 = x + 1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ -(2x - 3) = x + 1 \end{cases}$

$x_1 = 4$

$x_2 = \frac{2}{3}$

При решении вторым способом следует учесть, что выражение $x + 1$, находящееся в правой части уравнения, по смыслу уравнения должно быть неотрицательным: $x + 1 \ge 0$. При этом условии возведение обеих частей уравнения в квадрат приведет к уравнению, равносильному исходному. Значит, уравнение $|2x - 3| = x + 1$ равносильно смешанной системе:

$\begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ (2x - 3)^2 = (x + 1)^2 \end{cases}$, решив которую получим $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{2}{3}$

Ответ: 4; $\frac{2}{3}$.

Пример №3.

Решим уравнение $|2x - 3| = |x + 7|$

Решение:

Нетрудно убедиться, что способ решения «возведения в квадрат» (второй способ) здесь наиболее целесообразен. Действительно, при решении этим способом получим одно уравнение, равносильное данному уравнению (3)

$(2x - 3)^2 = (x + 7)^2$

Откуда, $x_1 = 10$, $x_2 = -\frac{4}{3}$

Пример №4.

Решим уравнение $|3 - x| - |x + 2| = 5$

Решение:

В данном случае более предпочтительным является метод «разбиение на промежутки» (третий способ).

Нанесем на числовую прямую значение x, при котором $3 - x = 0$, и значение x_1 при котором $x + 2 = 0$.

Числовая прямая при этом разбивается на промежутки

$(-\infty; -2)$, $[2; 3]$, $(3; +\infty)$.

Рещим уравнение (4) на каждом из этих промежутков, т.е. решим равносильную уравнению (4) совокупность смешанных систем:

$\begin{cases} x < -2 \\ 3 - x + x + 2 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \le x \le 3 \\ 3 - x - x - 2 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3 \\ -3 + x - x - 2 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x < -2 \\ 5 = 5 \end{cases}$ $x = -2$ решений нет.

Решение является промежуток $(-\infty; -2)$

объединяя решения этих трех систем, получаем решение уравнения $(-\infty; -2]$

Ответ: $(-\infty; -2]$.

Пример №5.

Решим уравнение $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 18$

Решение:

Нанесем на числовую прямую значения x, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

Числовая прямая при этом разбивается на промежутки $(-\infty; 1)$, $[1; 2]$, $[2; 3]$, $[3; +\infty)$

Решим уравнение на каждом из этих промежутков:

а) $x < 1$ данное уравнение примет вид

$-x + 1 - x + 2 - x + 3 = 18$

$x = -4$; $-4 < 1$, значение -4 является корнем уравнения.

б) $1 \le x \le 2$ имеем $x - 1 - x + 2 - x + 3 = 18$

$x = -14$

-14 не является корнем уравнения, т.к. $-14 \notin [1; 2]$,

значит, при $1 \le x \le 2$ корней нет.

в) $2 \le x \le 3$ получим $x - 1 + x - 2 - x + 3 = 18$

$x = 18$

Но $18 \notin [2; 3]$ Значит, при $2 \le x \le 3$ данное уравнение не имеет корней.

г) При $x \ge 3$ имеем $x - 1 + x - 2 - x + 3 = 18$

$x = 8$, $8 > 3$. Значит при $x \ge 3$ уравнение имеет два корня.

Ответ: -4; 8.

Пример №6.

Решим уравнение $|2x + 1| + |5 - 3x| + 1 - 4x = 0$

Решение:

Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль при $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{3}$

Соответственно, нужно рассматривать три случая:

1) $x < -\frac{4}{3}$ 2) $-\frac{1}{2} \le x < \frac{5}{3}$ 3) $x \ge \frac{5}{3}$

Получим три уравнения, в каждом из которых на неизвестное наложено условие – ограничение.

а) $x < -\frac{1}{2}$

В этом случае $2x + 1 < 0$, $5 - 3x > 0$.

Следовательно, $|2x + 1| = -2x - 1$, $|5 - 3x| = 5 - 3x$

Получаем $-2x - 1 + 5 - 3x + 1 - 4x = 0$,

$-9x + 5 = 0$

$x = \frac{5}{9}$

$\frac{5}{9} \notin (-\infty; -\frac{1}{2})$, значит не является корнем уравнения.

2) $-\frac{1}{2} \le x < \frac{5}{3}$

$2x + 1 + 5 - 3x + 1 - 4x = 0$ $\qquad x = \frac{7}{5}$ $\qquad \frac{7}{5} \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right)$

3) $x \ge \frac{5}{3}$ $\qquad 2x + 1 + 3x - 5 + 1 - 4x = 0$ $\qquad x = 3$ $\qquad 3 \in \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$

Ответ: $\frac{7}{5}$; 3.

Пример №7.

Решим уравнение $|3x^2 + 5x - 4| = 2x - 1$

Решение:

Это уравнение может быть решено 1 способом:

$3x^2 + 5x - 4 = 2x - 1$

$3x^2 - 3x - 3 = 0$

$x^2 - x - 1 = 0$

$D = 1 + 4 = 5 > 0$

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$; $\quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

и

$3x^2 + 5x - 4 = -2x + 1$

$3x^2 + 7x - 5 = 0$

$D = 49 + 3 \cdot 4 \cdot 5 = 49 + 60 = 109$

$x_3 = \frac{-7 + \sqrt{109}}{6}$; $\quad x_2 = \frac{-7 - \sqrt{109}}{6}$;

Среди корней, которые нужно отобрать удовлетворящие условию, $x \ge \frac{1}{2}$; являются корни

$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ и $x = \frac{-7 + \sqrt{109}}{6}$

Ответ: $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; $\quad x = \frac{-7 + \sqrt{109}}{6}$

<u>*Решить самостоятельно.*</u>

1. $|3x - 8| - |3x - 2| = 6$
2. $|x - 1| + |3x - 9| = 2x - 4$
3. $1 + x + |x2 - x - 3| = 0$
4. $2\,|x^2 + 2x - 5| = x - 1$
5. $x^2 + |x + 3| + |x - 3| = 4{,}5\,|x| + 6$
6. $|x^2 - 9| + |x - 2| = 5$
7. $|x^2 - 4| - |9 - x^2| = 5$
8. $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$
9. $|x - x^2 - 1| = |2x - 3 - x^2|$
10. $|x^2 + 2x| - |2 - x| = |x^2 - x|$

Решение иррациональных уравнений

Пример №1.

Решим уравнение $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 5$

Поиски решение:

Так уравнение $\sqrt[3]{f(x)} = q(x)$ равносильно уравнению $f(x) = q^3(x)$, корни исходного уравнения не нуждаются в проверке. Основной метод решения – возведение в куб, последнее удобно делать по формуле $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ или видоизмененной формулой $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$

Решение:

<u>1 способ.</u> Возведем обе части уравнения в куб:

$(\sqrt[3]{x+34})^3 - 3(\sqrt[3]{x+34})^2 \cdot \sqrt[3]{x-3} + 3\sqrt[3]{x+34} \cdot (\sqrt[3]{x-3})^2 - (\sqrt[3]{x-3})^3 = 1$

$(x+34) - 3(\sqrt[3]{x+34}) \cdot \sqrt[3]{x-3}\,(\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3}) - (x-3) = 1$

$x + 34 - 3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)} \cdot 1 - x + 3 = 1$

$37 - 3\sqrt[3]{(x^2 + 31x - 102} = 12$

$x^2 + 31x - 102 = 1728$

$x^2 + 31x - 1830 = 0$

$D = 31^2 - 4 \cdot (-1830) = 961 + 7320 = 8281 = 91^2$

$x_1 = \dfrac{-31+91}{2} = \dfrac{60}{2} = 30 \qquad x_1 = \dfrac{-31-91}{2} = -61$

Ответ: –61; 30

<u>2 способ.</u> Введем новые переменные:

$x + 34 = y^3,\ x - 3 = z^3$

Получим такую систему уравнений $\begin{cases} x + 34 = y^3 \\ x - 3 = z^3 \\ y - z = 1 \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения второе и преобразуем полученную разность

$37 = y^3 - z^3 = (y - z)((y - z)^2 + 3yz)$, но $y - z = 1$, получим $37 = 1 + 3yz$.

Откуда, $yz = 12$

Итак, нужно найти два числа, произведение коротых равно 12, а разность равна 1, т.е.

$\begin{cases} y - z = 1 \\ yz = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = z + 1 \\ (z+1)z = 12 \end{cases}$

Получаем два решения $y = 4,\ z = 3$ и $y = -3,\ z = -4$.

Подставляя найденные значения z в уравнение $x - 3 = z^3$.

Найдем $x_1 = 3^3 + 3 = 30$

$x_2 = (-4)^3 + 3 = -61$

Получим те же корни.

Ответ: –61; 30.

Пример №2.

$$\sqrt[3]{\frac{x+13}{x-13}} + \sqrt[3]{\frac{x-13}{x+13}} = \frac{10}{3}$$

Решение:

Область определения уравнения: $x \neq \pm 13$

Пусть $\sqrt[3]{\dfrac{x+13}{x-13}} = y$, тогда $\sqrt[3]{\dfrac{x-13}{x+13}} = \dfrac{1}{y}$; $y \neq 0$.

Поэтому $y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{10}{3}$; $\quad 3y^2 - 10y + 3 = 0 \quad y_1 = 3;\ y_2 = \dfrac{1}{3}$

Отсюда: 1) $\sqrt[3]{\dfrac{x+13}{x-13}} = 3$; $\quad \dfrac{x+13}{x-13} = 27$; $\quad x + 13 = 27(x - 13)$;
$x + 13 = 27x - 351$
$26x = 364$
$x_1 = 14$

2) $\sqrt[3]{\dfrac{x+13}{x-13}} = \dfrac{1}{3}$; $\quad \dfrac{x+13}{x-13} = \dfrac{1}{27}$; $\quad 27(x + 13) = x - 13$;
$27x + 351 = x - 13$
$26x = -364$
$x_2 = -14$

Ответ: –14; 14.

Пример №3.

Решим уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2$.

Решение:

Уединив $\sqrt[3]{2x-6}$, получим: $\sqrt[3]{2x-6} = \sqrt{x+1} - 2$.

Возведем в куб обе части этого уравнения:

$2x - 6 = (x + 1)\sqrt{x+1} - 6(x + 1) + 12\sqrt{x+1} - 8$,
$2x - 6 = (x + 13)\sqrt{x+1} - 6x - 6 - 8$,
$2x - 6 = (x + 13)\sqrt{x+1} - 6x - 14$,
$8x + 8 = (x + 13)\sqrt{x+1}$,
$(x + 13)\sqrt{x+1} = 8(x + 1)$,

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим

$(x + 13)^2(x + 1) = 64(x + 1)^2$
$(x + 1)(x + 13)^2 - 64(x + 1)^2 = 0$
$(x + 1)((x + 13)^2 - 64(x + 1)) = 0$ или
$(x + 1)(x^2 + 26x + 169 - 64x - 64) = 0$
$(x + 1)(x^2 - 38x + 105) = 0$

Таким образом задача сводиться к решению совокупности:

$x + 1 = 0$ и $x^2 - 38x - 105 = 0$
$x_1 = -1$; $\quad x_2 = 3$; $x_3 = 35$.

Проверка.

Подстановкой найденных значений x в заданное убеждаемся, что все они являются его корнями: 1) $\sqrt{x_1+1} - \sqrt[3]{2x_1-6} = \sqrt{-1+1} - \sqrt[3]{-2-6} = -(-2) = 2$; $2 = 2$;

2) $\sqrt{x_2+1} - \sqrt[3]{2x_2-6} = \sqrt{3+1} - \sqrt[3]{2\cdot 3-6} = \sqrt{4} - \sqrt[3]{0} = 2$; $2 = 2$;

3) $\sqrt{x_3+1} - \sqrt[3]{2x_3-6} = \sqrt{35+1} - \sqrt[3]{2\cdot 35-6} = \sqrt{36} - \sqrt[3]{70-6} = 6 - 4 = 2$; $2 = 2$.

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 35$.

Пример №4.

Решим уравнение $\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x-16} = 1$.

Решение:

Возведя в куб, получим:

$x + 3 - 3\sqrt[3]{(x+3)^2(x-16)} + 3\sqrt[3]{x+3}\cdot\sqrt[3]{(x-16)^2} - x + 16 = 1$;

$-3\sqrt[3]{(x+3)^2(x-16)} + 3\sqrt[3]{(x+3)(x-16)^2} = 1 - 19$

$\sqrt[3]{(x+3)^2(x-16)} - 3\sqrt[3]{(x+3)(x-16)^2} = 6$

$\sqrt[3]{(x+3)(x-16)} \cdot (\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x-16}) = 6$, но т.к. $\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x-16} = 1$, то $\sqrt[3]{(x+3)(x-16)} \cdot 1 = 6$.

Возведем ещё раз в куб, получим квадратное уравнение:

$x^2 - 13x - 264 = 0$

$x_1 = 24,\ x_2 = -11.$

Проверка. Подстановкой найденных значений x в заданное уравнение убеждаемся, что все они являются его корнями.

1) $\sqrt[3]{(x_1+3)} - \sqrt[3]{(x_1-16)} = \sqrt[3]{24+3} - \sqrt[3]{24-16} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} = 3 - 2 = 1.\ \ 1 = 1.$

2) $\sqrt[3]{(x_2+3)} - \sqrt[3]{(x_2-16)} = \sqrt[3]{-11+3} - \sqrt[3]{-11-16} = \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{-27} = -2 + 3 = 1.\ \ 1 = 1.$

Ответ: $x_1 = 24,\ x_2 = -11.$

Пример №5.

Решим уравнение $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$ (1*).

Решение:

Возведем обе части уравнения в куб, воспользовавшись несколько видоизмененной формулой куба суммы двух выражений, а именно формулой $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

Получим: $x + 2x - 3 + 3\sqrt[3]{x(2x-3)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}) = 12(x-1)$ (2).

Воспользовавшись уравнением (1*), заменим выражение $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}$ выражением $\sqrt[3]{12(x-1)}$. Получим:

$3x - 3 + 3\sqrt[3]{x(2x-3)}\sqrt[3]{12(x-1)} = 12(x-1)$ (3)

или $\sqrt[3]{x(2x-3)12(x-1)} = 3(x-1).$

Возведем в куб обе части последнего уравнения:

$12x(2x-3)(x-1) = 27(x-1)^3,$

$4x(2x-3)(x-1) = 9(x-1)^3,$

$4x(2x-3)(x-1) - 9(x-1)^3 = 0,$

$(x-1)(4x(2x-3) - 9(x-1)^2) = 0.$

$x - 1 = 0$ или $4x(2x-3) - 9(x-1)^2 = 0$

$x_1 = 1$

$8x^2 - 12x - 9x^2 + 18x - 9 = 0$

$-x^2 + 6x - 9 = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0.$ $D = 0;$

$x_{2,3} = 3.$

Проверка. Подставляя найденные значения x в уравнение, убеждаемся, что они удовлетворяют ему.

Замечание. Поскольку при решении уравнения (1*) мы пользовались операцией возведения обеих частей уравнения в куб, а, как известно, возведение в куб (нечетную степень не нарушаем равносильности уравнения, то казалось бы, найденные решения можно не проверять. Однако это не так. При переходе от уравнения (2) к уравнению (3) мы заменим выражение $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}$ выражением $\sqrt[3]{12(x-1)}$. Ясно, что всякий корень уравнения (2) является и корнем уравнения (3), а наоборот, вообще говоря, неверно. Значит, уравнение (3) есть следствие уравнение (2), а потому проверка необходима. Следующий пример подтверждает эту мысль.

Пример №6.

Решим уравнение $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1.$

Последовательно имеем:

$(2x-1) + (x-1) + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\ (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1,$

$3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 3 - 3x$

$(2x-1)(x-1) = (1-x)^3$

$(x-1)((2x-1)+(x-1)^2)=0$

$(x-1)(2x-1+x^2-2x+1)=0$

$(x-1)(x^2)=0;$

$x-1=0$ или $x_2=0$

$x_1=1;$

Проверка. Подставляя найденные значения x в исходное уравнение, убеждаемся, что значение $x_2=0$ уравнению не удовлетворяет: $(\sqrt[3]{(2\cdot 0-1}+\sqrt[3]{(0-1}=-2; -2\neq 1)$.

Заданное уравнение имеет единственный корень $x=1$.

$(\sqrt[3]{(2-1}+\sqrt[3]{1-1}=\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{0}; 1=1)$.

Ответ: $x=1$.

Пример №7.

Решим уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

Записав уравнение в виде

$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=-\sqrt[3]{x+3}$, возведем его дважды в куб.

После первого возведения получим:

$\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)}=x+2$, а после второго

$(x+1)(x+2)(x+3)=(x+2)^3$, откуда

$(x+2)((x+1)(x+3)-(x+2)^2)=0$

$x=2$ или $(x^2+4x+3-x^2-4x-4)=0$

$3-4=0$ корней нет.

Проверка. $x=-2$. $\sqrt[3]{-2+1}+\sqrt[3]{-2+2}+\sqrt[3]{-2+3}=\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{1}=-1+0+1=0; 0=0$.

Ответ: $x=-2$.

Пример №8.

Решим уравнение $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$.

Возведя обе части уравнения в куб, получим:

$1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+3\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}})=8$

$3\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}})=6$

$3\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\cdot 2=6$

$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=1$

$\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)(1-\sqrt{x})}=1$

$\sqrt[3]{-1-x}=1;$ $1-x=1;$ $x=0$

Проверка. $\sqrt[3]{1+\sqrt{0}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{0}}=1+1=2;$ $2=2;$

Ответ: $x=0$.

Пример №9.

Решим уравнение $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2}-1$

Возведя обе части уравнения в куб, получим равносильное уравнение:

$(x+1)-(x-1)-3\sqrt[3]{x^2-1}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})=\sqrt{x^2-1}$

Учитывая, что $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$, получим

$2-3\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[6]{x^2-1}=\sqrt{x-1}$

$2-3\sqrt[6]{(x^2-1)^2(x^2-1)}=\sqrt{x^2-1}$

$2 - 3\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-1}$

$-4\sqrt{x^2-1} = -2;$ $2\sqrt{x^2-1} = 1;$

$4(x^2-1) = 1;$ $4x^2 - 5 = 0;$ $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

Решить уравнения:

1) $\sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt[3]{x^2+3} = \sqrt{6x^2+10}$

2) $\sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} - \sqrt{9x+7} + \sqrt{x-2} = 0$

3) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+1}$

4) $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

5) $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5$

6) $\sqrt{x+9} + x + 8 = 0$

7) $\sqrt{x+8} - x + 2 = 0$

8) $3x - \sqrt{18x+1} + 1 = 0$

9) $\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{x^2+3} = \sqrt{6x^2+10}$

10) $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$

11) $\sqrt{5+\sqrt{x-4}} = 3$

12) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+12}} = 1 + x$

13) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x - 1$

14) $x = -2 + \sqrt{4+x\sqrt{36+x^2}}$

15) $x = 1 - \sqrt{1+x\sqrt{16+x^2}}$

16) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x+6} = 5$

Замечание. Проверка найденных значений х и невсегда достаточно проста, а в некоторыхслучаях и вообще не возможна (если, например, проверяемые значения заполняют целый промежуток, что бывает часто при решении неравенств. Как выполнить прверку, если подстановка найденных значений в исходное уравнение сопряжена с вычислительными трудностями? В этом случае нужно проводить проверку по области определения исходного уравнения или по условиям задающим область определения.

Следуетотметить, что данный путь проверки не следует переоценивать, т.к. он является полноценным только в тех случаях, когда при решении уравнений, кроме расширения области определения другихнеравносильных переходов от уравнения к уравнению не было.

Рассмотренное выше решение уравнения

$\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$ $x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2};$ $x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ относятся к таким случаям.

По ОДЗ исходного уравнения легко сделали проверку.

ОДЗ исходного уравнения

$x2 - 1 \geq 0$

$(x-1)(x+1) \geq 0$

$x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$.

$x1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \in [1; \infty)$ значит, является корнем уравнения $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x^2-1}$

x1 = $\frac{\sqrt{5}}{2}$ Є (–∞; 1] - корень данного уравнения.

Ответ: $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

А вот другой пример: решить уравнение

$\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6} = 5$

Решение:

$\sqrt{5x-6} = 5 - \sqrt{2x+5}$, $\qquad (\sqrt{5x-6})^2 = (5 - \sqrt{2x+5})^2$

$5x - 6 = 25 - 10\sqrt{2x+5} + 2x + 5$,

$10\sqrt{2x+5} = 36 - 3x$, $(10\sqrt{2x+5})^2 = (36-3x)^2$

$100(2x+5) = 1296 - 216x + 9x^2$

$9x^2 - 416x + 796 = 0$

$x_1 = \frac{398}{9} = 44\frac{2}{9}$, $\qquad x_2 = 2$

В процессе преобразований расширилась область определения: дважды применялось неравносильная операция – возведения в квадрат,значит, мы получим в итоге уравнение – следствие. Проверка обязательна.

Проверка. $x_1 = 2$; $\sqrt{2x_1+5} + \sqrt{5x_1-6} = \sqrt{4+5} + \sqrt{10-6} = \sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$; $5 = 5$;

$x_2 = \frac{398}{9}$, $\qquad \sqrt{2x_2+5} + \sqrt{5x_2-6} = \sqrt{2\,\frac{398}{9} + 5} + \sqrt{5\,\frac{398}{9} - 6} =$

$\sqrt{\frac{398 \cdot 2 + 45}{9}} + \sqrt{\frac{5 \cdot 398 - 45}{9}} = \frac{\sqrt{796+45}}{3} + \frac{\sqrt{1990-45}}{3} = \frac{\sqrt{841}}{3} + \frac{\sqrt{1936}}{3} =$

$= \frac{398}{3} + \frac{44}{3} = \frac{73}{3} = 24\frac{1}{3}$; $\qquad 24\frac{1}{3} \neq 5$. $\qquad x_2 = \frac{398}{9}$ - посторонний корень.

Можно было и по другому $\sqrt{2\,\frac{398}{9} + 5} > 5$, значит x_2 не может удовлетворять данному уравнению.

$x_2 = \frac{398}{9}$ - посторонний корень. Ответ: x = 2.

Проверку можно было првести по ОДЗ исходного уравнения.

$$\begin{cases} 2x + 5 \geq 0 \\ 5x - 6 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x \geq -5 \\ 5x \geq 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -2{,}5 \\ x \geq \frac{6}{5} \end{cases} \qquad x \geq \frac{6}{5}$$

И $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{398}{9}$ удовлетворяют этому неравенству. Тем не менее, мы видем, что x_1 – корень, а x_2 – посторонний корень. В этом примере установленная область определения не помогла бы установить посторонннний корень.

Значит, в зависимости от вида найденных корней (простые или сложные), от способа решения уравнений может быть выбран тот или иной способ проверки.

Основный метод решения иррациональных неравенств.

Классическая схема решения иррациональных неравенств вида

$\sqrt{f(x)} < g(x)$ и $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Решение более сложных иррациональных неравенств, содержащих несколько корней. Решение неравенств вида

$\sqrt{f(x)} \cdot m(x) \geq 0$ и $\sqrt{f(x)} \cdot m(x) \leq 0$, где $m(x)$ - алгебраическое или дробно- рациональное неравенство.

Например, практическое задание: Решить неравенство $\sqrt{x+18} < 2 - x$.

Решение иррациональных неравенств
методом введения новой переменной .

Для решения иррациональных неравенств, так же как и для решения иррациональных уравнений, с успехом может применяться метод введения новой переменной. Необходимо заменить иррациональную функцию, входящую в неравенство, новой переменной таким образом, что относительно этой переменной неравенство становится рациональным.

Например, практическое задание: Решить неравенство $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geq 0$.

Решение иррациональных неравенств
с использованием свойств входящих в них функций.

Использование монотонности функции.

Пусть на промежутке $(a;b)$ задана возрастающая функция $y = f(x)$ и требуется решить неравенство $f(x) < c$ (или $f(x) > c$). Если x_0 – корень уравнения $y = f(x)$, причем $a < x_0 < b$, то решения данного неравенства – весь промежуток $(a;x_0)$ (соответственно промежуток $(x_0;b)$). Единственность корня следует из монотонности f . Понятно, что если требуется решить нестрогое неравенство, то при том же рассуждении в ответ войдет и число $f(x_0)$, а если функция задана на замкнутом или полуоткрытомпромежутке, то в ответ войдут соответствующие концы промежутка.

Например, практическое задание: Решить неравенство $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} < 6$.

Решение иррациональных неравенств
с использованием свойств входящих в них функций .

Решим неравенство $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$ с использованием ОДЗ.

Решение. ОДЗ этого неравенства есть все x из промежутка $-3 \leq x \leq 9$.

Разобьем это множество на два промежутка $-3 \le x \le 0$ и $0 \le x \le 9$.

Для x из промежутка $-3 \le x \le 0$ имеем $\sqrt{x+3} \ge 0$, $\sqrt[4]{9-x} \ge \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$. Следовательно, $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} \ge \sqrt{3}$ на этом промежутке, и поэтому исходное неравенство не имеет решений на этом промежутке.

Пусть x принадлежит промежутку $0 \le x \le 9$, тогда $\sqrt{x+3} > \sqrt{3}$ и $\sqrt[4]{9-x} \ge 0$. Следовательно, $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$ для таких x, и, значит, на этом промежутке исходное неравенство также не имеет решений.

Ответ: Корней нет.

Например, практическое задание: Решить неравенство $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$

Решение иррациональных неравенств
с использованием свойств входящих в них функций .

Решим неравенство $\sqrt{1-x^2} < \sqrt[8]{5-x}$ ***с использованием графиков функций***

Решение. ОДЗ этого неравенства есть все x из промежутка $[-1;1]$. Эскизы графиков функций $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ и $g(x) = \sqrt[8]{5-x}$ представлены на рисунке 3. Из рисунка следует, что для все x из ОДЗ данное неравенство справедливо.

Докажем это. Для каждого x из промежутка $[-1;1]$ имеем $0 \le f(x) \le 1$, а для

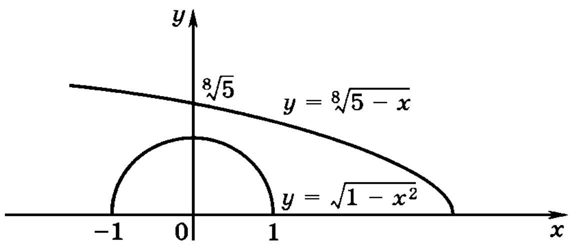

Рис. 1

каждого такого x имеем $\sqrt[8]{5-x} \ge \sqrt[8]{4} > 1$. Значит, для каждого $x \in [-1;1]$ имеем $f(x) \le 1 < g(x)$. Следовательно, решениями исходного неравенства будут все x из промежутка $[-1;1]$.

Ответ: $x \in [-1;1]$

«Решение иррациональных неравенств» .

Неравенства, при решении которых необходимо комплексное применение знаний по всем изученным методам решения.

Итоговое занятие (1ч)

Семинар « Нестандартные уравнения и неравенства».